

مکانیک کلاسیک
ماریون- تورنتون

تهیه کننده: سید یاسر ایازی

خلاصه فصل ۵: طرح مساله

یکی از شاخه های وسیع ریاضیات، نوع خاصی از تعمیم حساب در آن است. **حساب تغییرات (وردشها)** در جستجوی یافتن مجموعه ای از مسیرها، خم ها، خمینه ها و ... است که به عنوان توابعی پیوسته و مشتق پذیر دارای اکسترم طولی هستند (که اغلب در مسائل فیزیکی از آن به عنوان کمینه یا بیشینه نیز یاد می شود). در ریاضیات، مقدار این اکسترمم بوسیله ی انتگرال معین زیر نمایش داده می شود:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_1} f\{y(\alpha,x), y'(\alpha,x); x\}dx$$

در مسئله ی کوتاه ترین خم زمانی (brachystochrone problem) که توسط یوهان برنولی (Johann BERNOULLI) به سال ۱۶۹۶ علناً مطرح شد یافتن y ای در انتگرال فوق مطرح است که در آن بتوانیم تعریف ذیل را نمایان سازیم:

اگر دو نقطه ی p1 و p2 در ارتفاعات متفاوت اما نه واقع بر بالای یکدیگر، مفروض باشند، می خواهیم از جمیع خم های ممکن واصل آنها، خمی را بیابیم که یک نقطه ی مادی (material point) از p1 به p2 در امتداد آن و تحت تاثیر گرانی یا ثقل (صرفنظر از اصطکاک) در کوتاهترین زمان ممکن بلغزد.

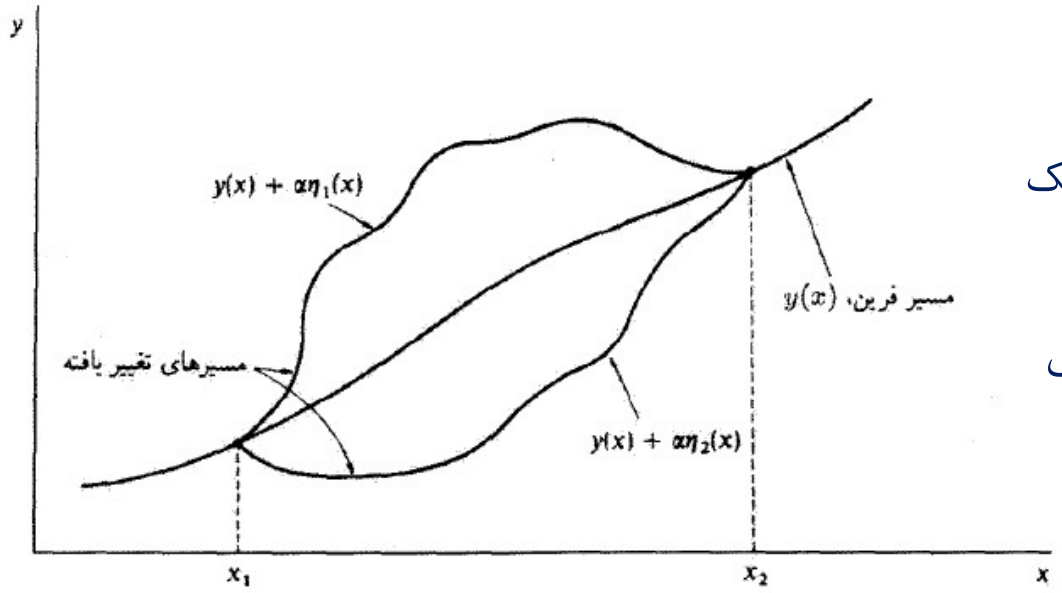
خلاصه فصل ۵: طرح مساله

مثالی ساده از چنین مسائلی یافتن خمی با کوتاه ترین طول بین دو نقطه است. اگر هیچ قیدی در کار نباشد، جواب این مسئله خط مستقیم بین آن دو نقطه خواهد بود.

با این حال، اگر روی خمی قید بگذاریم که در رویه مورد نظر باقی بماند، آنگاه جواب کمی غیر بدیهی شده و ممکن است هم‌زمان چندین جواب وجود داشته باشد. به چنین راه حل هایی ژئودزی‌ها گویند. مسئله مرتبط دیگری توسط اصل فرما بیان می شود: نور کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه را طی می کند، که طول مسیر آن به مواد فضای پیرامونی اش بستگی دارد. مفهوم مرتبط دیگر در مکانیک اصل کمترین کنش است.

می توان گفت که حساب تغییرات از مسئله مقاومت کمینه نیوتون در ۱۶۸۷ آغاز گشت، که به دنبال آن مسئله خم براخیستوکرون (خم کوتاه‌ترین زمان) در ۱۶۹۶ توسط یوهان برنولی مطرح شد

طرح مساله



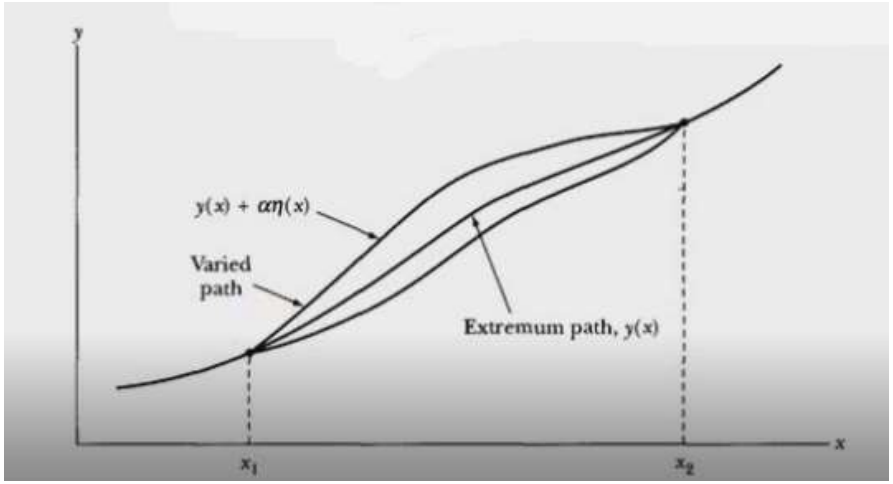
حساب تغییرات یا **حساب وردشی** حوزه ای از آنالیز ریاضی است که از وردش (تغییرات) کوچک در توابع و تابعک ها برای یافتن ماکسیمم‌ها و مینیمم‌ها سود می جوید: نگاشت هایی از یک دسته تابع به اعداد حقیقیتابعک ها اغلب به صورت انتگرال های معینی بیان می شوند که در آن توابع و مشتقاتشان ظاهر می شوند. توابعی که تابعک ها را ماکسیمم و مینیمم می کنند را می توان در حساب تغییرات توسط معادلات اویلر-لاگرانژ پیدا کرد.

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\}dx$$

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x)$$

$$y = y(0, x) = y(x) \quad ،\alpha = 0$$

خلاصه فصل ۵: طرح مساله



در *ریاضیات تابعی* را نگاشتی از توابع به اسکالر می‌دانند. استفاده از آن از حساب وردشی سرچشمه می‌گیرد، که در آنجا هدف یافتن یک تابع است که *تابعی* مورد نظر را کمینه کند

$$f\{y(x), y'(x); x\}$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\}\, dx$$

خلاصه فصل ۵: طرح مساله

شرط لازم برای اینکه انتگرال J یک مقدار مانا داشته باشد:

$$\left.\begin{aligned} & y(\alpha,x)=y(0,x)+\alpha\,\eta(x) \\ & \eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \\ & \alpha=0 \quad \Rightarrow y(0,x)=y(x) \end{aligned}\right\}$$

$$\eta(x) \text{ به ازای هر تابع } \Rightarrow \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=0$$

خلاصه فصل ۵: معادله اویلر

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\} dx \quad \longrightarrow \quad \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

از آنجا که حدود انتگرالگیری ثابت است، عمل مشتق‌گیری فقط انتگرالده را در برمی‌گیرد. از این‌رو

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x) dx \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x); \qquad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx$$

خلاصه فصل ۵: معادله اویلر

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx}dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)dx$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\right)dx$$

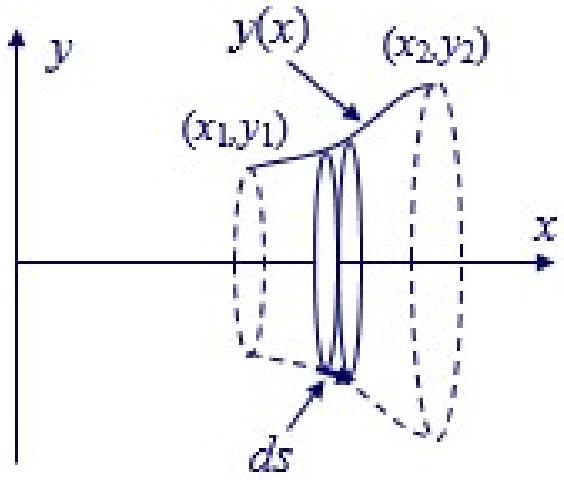
$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta(x)dx$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

معادلهٔ اویلر

خلاصه فصل ۵: معادله اویلر

مثال: سطحی را در نظر بگیرید که خط واصل بین دو نقطهٔ ثابت (x_1, y_1) و (x_2, y_2) با گردیدن حول محوری هم‌صفحه با آن دو نقطه، ایجاد می‌کند. معادلهٔ خط واصل بین این دو نقطه را بیابید به‌طوری که مساحت سطح تولیدشده به‌وسیلهٔ گردش (یعنی، مساحت سطح گردش) کمینه باشد.



$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

برخی روش های حساب وردشی

که در آن $y' = dy/dx$. برای یافتن مقدار فرین فرض می‌کنیم

$$f = x(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0$$

$$\frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const.} \equiv a$$

$$y' = \frac{a}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = a \cos h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

$$x = a \cos h\left(\frac{y - b}{a}\right)$$

فصل ۶: اصل همیلتون, دینامیک لاگرانژی و همیلتونی

تقریباً نیم قرن پس از آنکه نیوتن کتاب اصول ریاضی فلسفی طبیعی را در ۱۷۲۹ منتشر کرد و درآن قوانین مکانیک را به صورتی که امروز می شناسیم تدوین کرد، ژوزف لویی لا گرانژ ریاضیدان فرانسوی توانست فرمول بندی جدید ولی معادلی از مکانیک ارایه کند که هم برای تعمیم های نظری و هم برای تحلیل مسائل پیچیده کارایی خیلی بیشتری داشت.

مکانیک نیوتنی متکی بر مفاهیم هندسی بود، اما لا گرانژ توانست با کاربرد آنالیز به جای هندسه به آن هم وحدت و هم استحکام بخشد.

در صورت بندی نیوتن می بایست برای برای هر مسئله ای تجزیه تحلیل دقیقی از بردارهای نیروها انجام دهیم. هم چنین معادلات حاکم بر نیروها و شتاب ها در هر دستگاه مختصاتی یک شکل و یک قیافه معین پیدا می کند.

در صورت بندی لا گرانژ نیازی به تجزیه تحلیل این بردار ها نیز و جود ندارد، و بالاتر از همه شکل معادلات حرکت که آنها را معادلات اویلر- لا گرانژ می نامیم کاملا مستقل از نوع مختصاتی هستند که به کار می بریم.

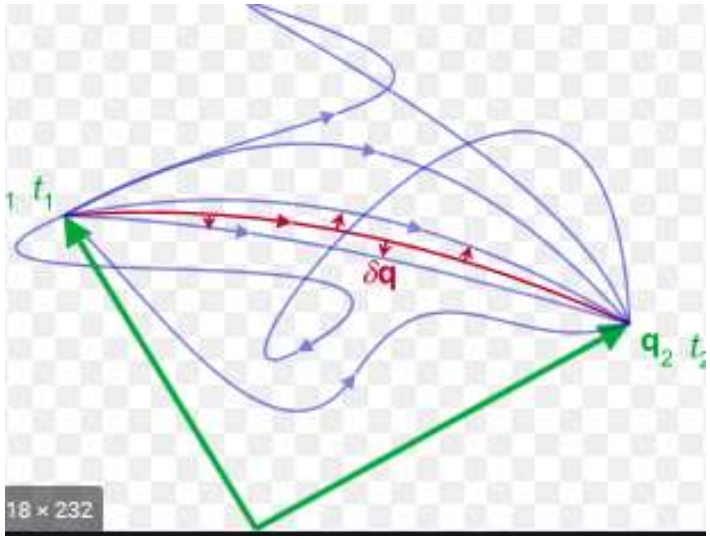
فصل ۶: اصل همیلتون، دینامیک لاگرانژی و همیلتونی

۱- تحلیل کمیت‌های برداری(مکانیک نیوتنی):
سیستم بر اساس ویژگی‌های برداری (نیرو، شتاب، سرعت، جابجایی) مورد پردازش قرار می‌گیرد.

۲- تحلیل تغییرات کمیت‌های نرده‌ای(مکانیک لاگرانژی):
سیستم بر اساس ویژگی‌های نرده‌ای (انرژی‌های جنبشی و پتانسیل) مورد پردازش قرار می‌گیرد.

اصل جهان شمول بودن قوانین فیزیک ایجاب می‌کند: نتایج بدست آمده در هریک از این رویکردها (مکانیک لاگرانژی و مکانیک نیوتنی) همواره هم‌ارز باشد.

اصل همیلتون



در فیزیک ، **اصل** هامیلتون فرمول بندی ویلیام همیلتون از اصل کمترین کنش است .

این اصل بیان می کند که دینامیک یک سیستم فیزیکی توسط یک مسئله حساب وردشی (تغییرات) برای یک تابعی مبتنی بر یک تابع واحد، لاگرانژین، تعیین می شود، که شامل تمام اطلاعات فیزیکی مربوط به سیستم و نیروهایی است که بر روی آن عمل می کنند.

فصل ۶: معادله اویلر-لاگرانژ

معادلهٔ اویلر-لاگرانژ در دههٔ ۱۷۵۰ میلادی، به وسیلهٔ اویلر و لاگرانژ به دست آمد، زمانی که آن‌ها مشغولِ حلِ مسئلهٔ خم همزمانی بودند. مسئلهٔ منحنی همزمانی دربارهٔ این است که چه‌طور می‌توان منحنی‌ای پیدا کرد که اگر از رویِ آن منحنی توپی را رها کنیم، زمانِ رسیدنِ توپ به پایینِ منحنی مقدارِ ثابتی باشد و فرقی نکند که توپ را از چه ارتفاعی از منحنی به پایین رها کرده‌ایم.

لاگرانژ این مسئله را در سال ۱۷۵۵ حل کرد و جواب را برایِ اویلر فرستاد. این دو به کمکِ هم، متدِ لاگرانژ را گسترش دادند و در حلِ مسئله‌هایِ مکانیک به کار گرفتند، تلاشی که در نهایت به خلقِ مکانیک لاگرانژی ختم شد. به علاوه مکاتبه‌هایِ آن‌ها، به خلقِ کاملِ حسابِ وردشی منجر شد. نخستین بار در سالِ ۱۷۶۶، اویلر بود که این نام را برایِ تکنیک‌های‌شان به کار برد.

فصل ۶: معادله اویلر-لاگرانژ

معادلهٔ لاگرانژ، معادله‌ای است که هدفِ حل کردنِ آن، یافتن **تابعی** چون q است که ویژگی این تابع q، آن است اگر در انتگرالِ زیر قرار بگیرد، آن را اکسترمم می‌کند:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\, \mathrm{d}t$$

$$\delta S = 0 \longrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0$$

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} v_i^2 - U(\mathbf{x})$$

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

اصل همیلتون

از تمام مسیرهای ممکنی که سیستم دینامیکی می‌تواند در امتداد آنها در فاصلهٔ زمانی خاصی (سازگار با هر قیدی) از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر برود، مسیر واقعی که طی می‌شود عبارت است از مسیری که انتگرال زمانی اختلاف بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل را کمینه کند.

$$L \equiv T - V$$

فصل ۶: معادله اویلر-لاگرانژ

اگر این تبدیلات را انجام دهیم

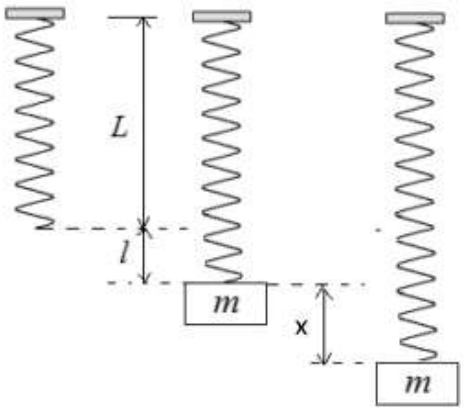
$$
\begin{aligned}
x &\to t \\
y_i(x) &\to x_i(t) \\
y_i'(x) &\to \dot{x}_i(t) \\
f\{y_i(x_i), y_i'(x); x\} &\to L(x_i, \dot{x}_i)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}.
$$

معادله اویلر-لاگرانژ

فصل ۶: معادله اویلر-لاگرانژ

مثال: مطابق با شکل زیر سیستمی از جرم و فنر را در نظر بگیرید.



در مسئله جرم و فنر T و V به‌ترتیب برابر با $m\dot{x}^2/2$ و $kx^2/2$ هستند. در نتیجه لاگرانژین در سیستم جرم و فنر برابرند با

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

برای مسئله جرم و فنر $\partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ و $\partial L/\partial x = kx$ هستند

$$m\ddot{x} = -kx$$

فصل ۶: معادله اویلر-لاگرانژ

مثال: **حرکت پرتابی**



$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \\ U = mgz \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \\ U = mgz \end{cases}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

فصل ۶: معادله اویلر-لاگرانژ

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad \Rightarrow L = L(\dot{x}, z, \dot{z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: & \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\ z: & \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$x: \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 - \dfrac{d}{dt}m\dot{x} = 0 \\ \underline{\ddot{x} = 0} \end{array} \right. \quad (i)$$

$$z: \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z} = mg \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\dot{z} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -mg - \dfrac{d}{dt}m\dot{z} = 0 \\ \boxed{\ddot{z} = -g} \end{array} \right. \quad (ii)$$

$$(i) \Rightarrow \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \dot{x} = ctc \quad \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_\circ = v_{\circ x} = v_\circ \cos\theta$$

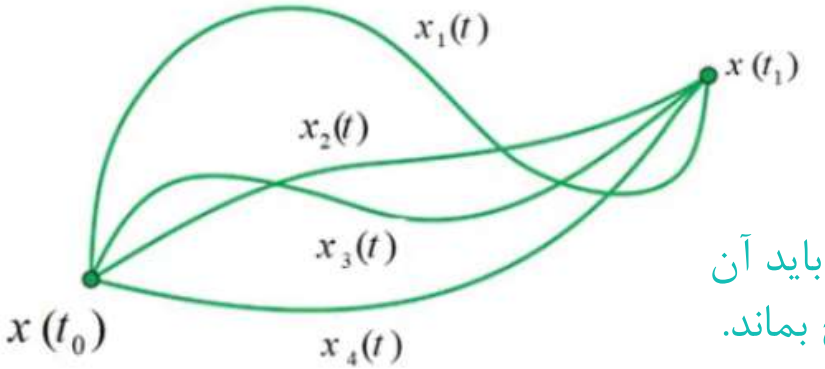
$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = v_\circ \cos\theta} \quad (iii)$$

$$(iii) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_\circ \cos\theta \quad \Rightarrow \boxed{x = v_\circ \cos\theta\, t} \quad (iv)$$

$$(ii) \Rightarrow \ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \dot{z} = -gt + \dot{z}_\circ \Rightarrow \boxed{\dot{z} = -gt + v_\circ \sin\theta} \quad (v)$$

$$(v) \Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2} gt^2 + v_\circ \sin\theta\, t} \quad (vi)$$

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته



یک سیستم مکانیکی کلی را در نظر می‌گیریم که از مجموعهٔ n ذرهٔ نقطه‌ای مجزا تشکیل می‌شود، که بعضی از آنها ممکن است به یکدیگر بپیوندند و اجسام صلبی را تشکیل دهند.

در مکانیک کلاسیک یک قید روی یک سیستم، پارامتری است که سیستم باید آن را رعایت کند. مثلا جعبه‌ای که روی سطح شیبدار قرار دارد باید روی سطح بماند.

از آنجا که هر بردار شعاعی از یک سه‌تایی از اعداد (مثلاً، مختصات قائم) تشکیل می‌شود، باید $3n$ کمیت مشخص شود تا موضع تمام ذرات را توصیف کند.

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

هر مجموعه ازکمیتهایی راکه حالت یک سیستم را به‌طورکامل مشخص می‌کند، مختصات تعمیم‌یافته می‌نامیم.

در حالت کلی مختصات تعمیم یافته، می‌توانند چیزهایی غیر ازمختصات دکارتی باشند، مثلا زاویه!

در یک سیستم دینامیکی، قیود سینماتیکی اغلب به سبب روابط بین جابجایی ها بوجود می آیند. یک ذره بدون قید تنها سه درجه آزادی انتقالی دارد .در یک سیستم n ذره ای، اگر m قید وجود داشته باشد درجهٔ آزادی سیستم:

$$f_k(x_{\alpha,i},t)=0 \qquad k=1,2,\ldots,m$$
$$s=3n-m$$

تعداد مختصات‌های عمومی برابر درجهٔ‌آزادی می‌باشد. بنابراین وقتی که درجهٔ آزادی n است مختصه های عمومی $q_1,\ldots,q_n$، یک دستگاه کامل و مستقل را تشکیل می دهند.

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

علاوه بر مختصات تعمیم‌یافته، ممکن است مجموعه‌ای از کمیتها که مشتقهای زمانی q_j هستند، یعنی $\dot{q}_1$، $\dot{q}_2$، ...، یا به بیان ساده $\dot{q}_j$، را تعریف کنیم. در شباهت با اصطلاحات مربوط به مختصات قائم، $\dot{q}_j$ را سرعتهای تعمیم‌یافته می‌نامیم.

اگر این امکان را که معادلات پیونددهندهٔ $x_{\alpha,i}$ و q_j صریحاً شامل زمان‌اند مجاز بدانیم، آنگاه مجموعهٔ معادلات تبدیل به صورت زیر می‌باشند

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \cdots, q_s, t), \qquad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$= x_{\alpha,i}(q_j, t), \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$\longleftrightarrow$$

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t)$$

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

حالت سیستمی متشکل از n ذره و دستخوش m قید که برخی از $3n$ مختصهٔ قائم را به هم پیوند می‌دهد به کمک $s = 3n - m$ مختصهٔ تعمیم‌یافته به‌طور کامل مشخص می‌شود. از این‌رو می‌توانیم حالت چنین سیستمی را با نقطه‌ای در یک فضای sبعدی به نام فضای پیکربندی نمایش دهیم. هر بعد این فضا با یکی از مختصات q_j متناظر است.

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

مثال: مجموعه مختصات تعمیم‌یافتهٔ مناسبی را برای ذره‌ای نقطه‌ای بیابید که روی سطح نیم‌کره‌ای به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات، حرکت می‌کند.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad z \geq 0 \longrightarrow q_1 = \frac{x}{R}, \quad q_2 = \frac{y}{R}, \quad q_3 = \frac{z}{R}$$

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \qquad q_3 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}$$

اما، می‌توان $q_1 = x/R$ و $q_2 = y/R$ را به‌عنوان مختصات تعمیم‌یافتهٔ مناسب انتخاب کرد، و این کمیتها، همراه با معادلهٔ قیدی

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

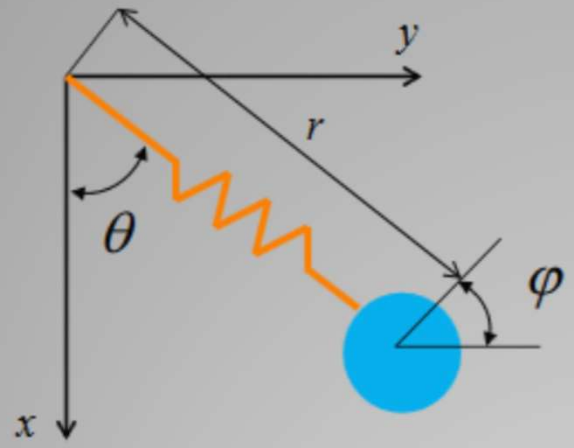
برای آنکه موضع ذره را به‌طور منحصر به فردی مشخص کنند، کافی‌اند.

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

مثال:

یک جسم صلب که توسط یک فنر بدون جرم به یک نقطه ثابت متصل است.

حرکت در صفحه xy



انتخاب مختصه های عمومی

$$(r,\theta,\varphi)$$

$$(x,y,\varphi)$$

انتخاب های دیگر هم می تواند وجود داشته باشد

حال اگر فنر انعطاف پذیر با یک میله صلب به طول ثابت a جایگزین شود دو قید اضافی به وجود می آید:

$$r = a$$

$$\varphi = \theta$$

آنگاه تعداد مختصاتی که برای توضیح سیستم لازمند به یک کاهش می یابد.

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

لا گرانژی عبارت است از تابع زیر:

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q_1, q_2, \cdots q_N),$$

انرژی یک کمیت اسکالر است و از این رو لاگرانژی نیز یک تابع اسکالر است. لذا لاگرانژی باید نسبت به تبدیلات مختصات ناوردا باشد.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N, t].$$

$$S = \int \mathcal{L}[q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N, t]\, dt,$$

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

اصل همیلتون

از تمام مسیرهای ممکنی که سیستم دینامیکی می‌تواند در امتداد آنها در فاصلهٔ زمانی خاصی (سازگار با هر قیدی) از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر برود، مسیر واقعی که طی می‌شود عبارت است از مسیری که انتگرال زمانی اختلاف بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل را کمینه کند.

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

بدین‌ترتیب اصل هامیلتون به‌صورت زیر در می‌آید

$$\delta S = 0 \longrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0$$

اصل همیلتون

$$x \to t$$
$$y_i(x) \to q_j(t)$$
$$y_i'(x) \to \dot{q}_j(t)$$
$$f\{y_i, y_i', x\} \to L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

معادلات اویلر- لاگرانژ در مختصات تعمیم یافته

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}; \cdots; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_N} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_N}.$$

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

پی‌بردن به این موضوع که اعتبار معادلات لاگرانژ مستلزم برآورده‌شدن شرط زیر است اهمیت دارد:

۱. نیروهای وارد بر سیستم (به غیر از نیروهای قیدی) باید از یک پتانسیل (یا چند پتانسیل) حاصل شوند.

۲. معادلات قیدی باید رابطه‌هایی باشند که مختصات ذرات را به هم‌دیگر ارتباط می‌دهند و ممکن است توابعی از زمان باشند

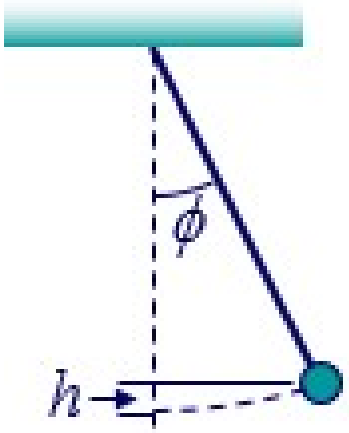
$$f_k = f_k(x_{\alpha,i}, t), \qquad k = ۱, ۲, \ldots, m$$

ما در اینجا فقط حرکت سیستمهایی را ازنظر می‌گذرانیم که در معرض نیروهای پایستارند. چنین نیروهایی را همواره می‌توان از توابع پتانسیل استخراج کرد، بنابراین شرط ۱ برآورده می‌شود.

معادلات اویلر- لاگرانژ: مختصات تعمیم یافته

مثال:

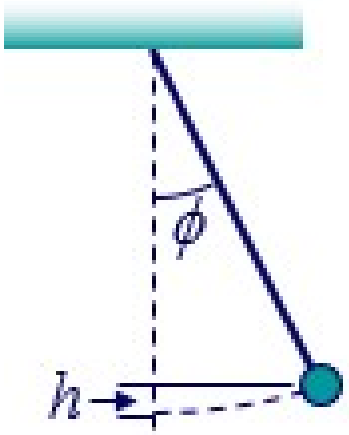
معادلات حرکت آونگ ساده را با رهیافت مکانیک لاگرانژی به‌دست آورید:



$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ U &= mgy \end{aligned}\right\}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

معادلات حرکت آونگ ساده را با رهیافت مکانیک لاگرانژی به‌دست آورید:



$$U = m\,g\,h = m\,g\,l(1-\cos\phi)$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2.$$

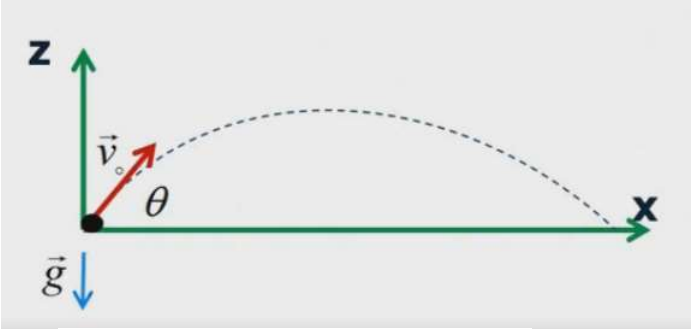
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}},$$

$$\longrightarrow \quad -mg\ell\sin\phi = m\ell^2\ddot{\phi}.$$

مشخصهٔ دیگر مهم روش به کار رفته در دو مثال سادهٔ قبلی این است که در هیچ‌کجای محاسبات گزاره‌ای که با نیرو مرتبط باشد وارد نشد. معادلات حرکت فقط از طریق مشخص‌کردن خواص معینی که به ذره وابسته است (انرژیهای جنبشی و پتانسیل) به‌دست آمدند، و نیازی به تصریح این نکته که یک عامل خارجی بر ذره اثر می‌کند (نیرو) نبود.

حرکت پرتابی

مثال: حرکت پرتابی در مختصات قطبی



در مختصات قطبی داریم

که در آن به‌ازای $\theta = 0$، داریم $V = 0$.

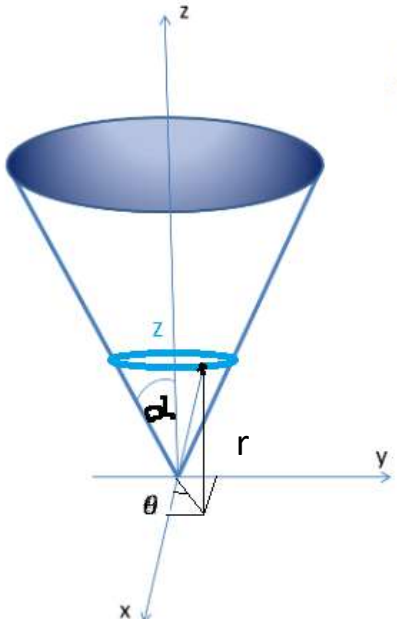
$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2$$
$$V = mgr\sin\theta$$

$$\longrightarrow \quad L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$
$$mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = 0$$
$$r\dot{\theta}^2 - g\sin\theta - \ddot{r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$
$$-mgr\cos\theta - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$
$$-gr\cos\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} = 0$$

ذره مقید روی مخروط



مثال: ذره‌ای مقید است که روی سطح یک مخروط با نیم زاویه α حرکت کند. راس مخروط را در مبدا و محور آن را محور z بگیرید

معادلهٔ قید را به‌صورت زیر داریم

$$z = r\cot\alpha$$

از این‌رو فقط دو درجهٔ آزادی، و بنابراین فقط دو مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ مناسب، برای سیستم وجود دارد.

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha \\ &= \dot{r}^2\operatorname{cosec}^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$U = mgz = mgr\cot\alpha$$

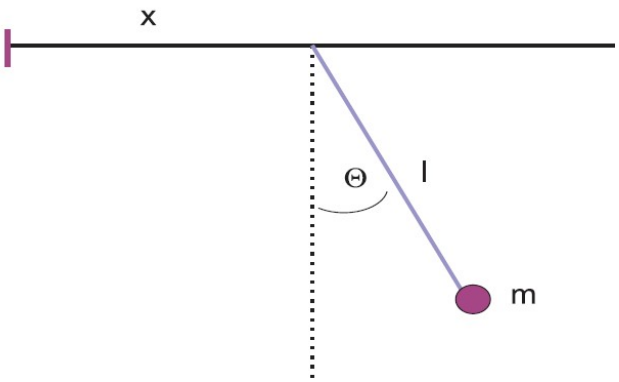
$$\longrightarrow \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\operatorname{cosec}^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cot\alpha$$

ذره مقید روی مخروط

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \longrightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

پاندول با نقطه اتکای لغزان :



مثال: شکل یک پاندول را نشان می دهد که نقطه اتکای آن روی یک میله بدون اصطکاک می لغزد.

جرم پاندول را با M و جرم نقطه اتکای آن را با m نشان می دهیم

$$x = X + l\sin\theta, \qquad y = -l\cos\theta,$$

$$\dot{x} = \dot{X} + l\cos\theta\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = l\sin\theta\dot{\theta}, \qquad V = -gl\cos\theta.$$

بنابراین لاگرانژی عبارت خواهد بود با:

$$L = \frac{1}{2}m \quad \dot{X}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{X}\dot{\theta}) + gl\cos\theta\mathrm{M}$$

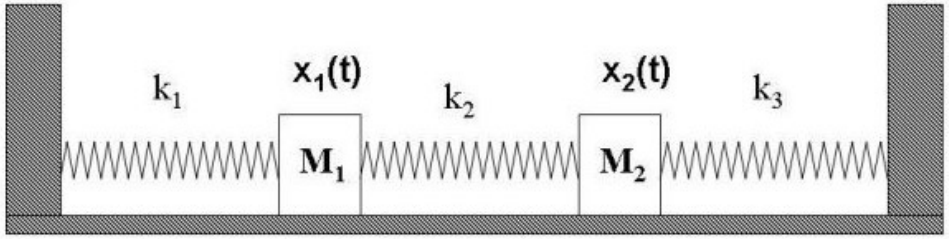
ذره دریک پتانسیل با تقارن کروی

مثال ۳ : ذره دریک پتانسیل با تقارن کروی: دراین حالت مختصات ذره را با (r, θ, ϕ) نشان می دهیم. داریم $V = V(r)$ و $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$ بنابراین لاگرانژی عبارت است از:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r).$$

دو نوسانگر هارمونیک جفت شده

مثال: در شکل زیر یک سیستم ارتعاشی دو درجه آزادی را می‌بینید. با استفاده از معادله اویلر-لاگرانژ معادلات حرکت این سیستم را بدست آورید.



پاسخ: همان‌گونه که در تصویر فوق می‌بینید این سیستم درجه آزادیش دو بوده که با استفاده از دو مختصات $x_1(t)$ و $x_2(t)$ قابل توصیف هستند. انرژی جنبشی این سیستم برابر است با:

$$T = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

دو نوسانگر هارمونیک جفت شده

از طرفی مجموع انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنرها نیز با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید.

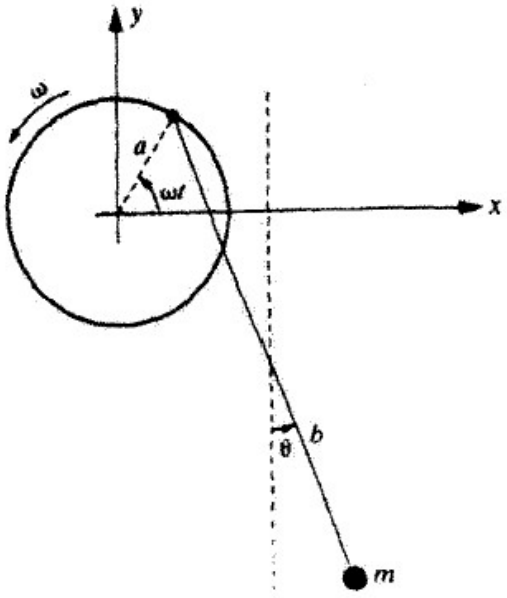
$$V = 1/2k_1x_1^2 + 1/2k_2(x_2 - x_1)^2 + 1/2k_3x_2^2$$

معادله اویلر لاگرانژ را نسبت به متغیرهای x_1 و x_2، به‌طور جداگانه می‌نویسیم.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned}$$

آونگ چرخشی



مثال: نقطهٔ آویز آونگ ساده‌ای به طول b روی طوقهٔ بی‌جرمی به شعاع a حرکت می‌کند؛ این طوقه خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. عبارت مربوط به مؤلفه‌های دکارتی سرعت و شتاب جرم m را به‌دست آورید.

$$x = a\cos\omega t + b\sin\theta$$
$$y = a\sin\omega t - b\cos\theta$$

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t + b\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\dot{y} = a\omega\cos\omega t + b\dot{\theta}\sin\theta$$

آونگ چرخشی

با یک‌بار دیگر مشتق‌گیری نسبت به زمان، شتاب به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a\omega^2 \cos\omega t + b(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) \\ \ddot{y} = -a\omega^2 \sin\omega t + b(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \end{cases}$$

حال روشن است که تنها مختصهٔ تعمیم‌یافته θ است. انرژیهای جنبشی و پتانسیل عبارت‌اند از

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U = mgy \end{cases} \longrightarrow$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}[a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega\sin(\theta - \omega t)] - mg(a\sin\omega t - b\cos\theta)$$

آونگ چرخشی

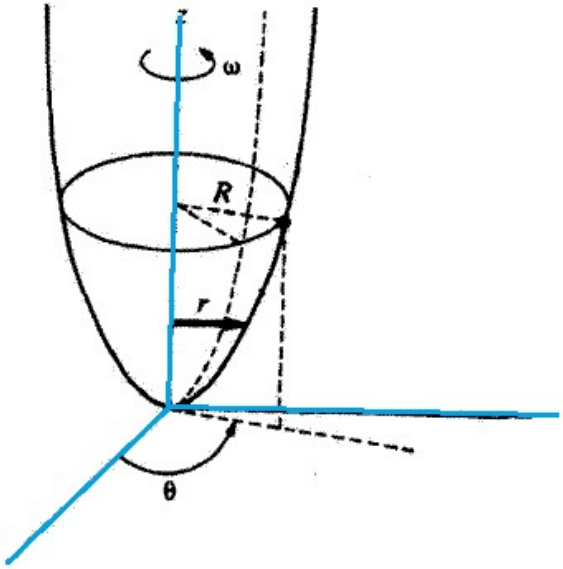
مشتقهای مربوط به معادلهٔ حرکت لاگرانژ نسبت به θ عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\ddot{\theta} + mba\omega(\dot{\theta} - \omega)\cos(\theta - \omega t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mb\dot{\theta}a\omega\cos(\theta - \omega t) - mgb\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2 a}{b}\cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{b}\sin\theta$$

مهره در سهمی



مثال: مُهره‌ای در امتداد سیم صافی که به شکل سهمی $z = cr^2$ خم شده است، می‌لغزد هرگاه سیم حول محور تقارن قائمش با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، مهره در دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد. مقدار c را بیابید.

حل: از آنجا که مسئله تقارن استوانه‌ای دارد، r، θ، و z را به‌عنوان مختصات تعمیم‌یافته اختیار می‌کنیم. انرژی جنبشی مهره عبارت است از

$$T = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + (r\dot{\theta})^2]$$

مهره در سهمی

انرژی پتانسیل عبارت است از

$$U = mgz$$

اما r، z، و θ مستقل نیستند. معادله قیدی مربوط به سهمی عبارت است از

$$\begin{cases} z = cr^2 \\ \dot{z} = 2cr\dot{r} \end{cases}$$

وابستگی زمانی صریح گردش زاویه‌ای را نیز داریم

$$\begin{cases} \theta = \omega t \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

مهره در سهمی

حالا می‌توانیم لاگرانژی را به‌طریقی بنویسیم که فقط به r وابسته باشد، زیرا هیچگونه وابستگی مستقیمی به θ وجود ندارد.

$$L = T - U$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2 + r^2\omega^2) - mgcr^2$$

در صورت مسئله گفته شد که مهره در دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. خواننده ممکن است در این مرحله وسوسه شود که بگیرید $r = R = \text{const.}$ و $\dot{r} = 0$. این جایگذاری در لاگرانژی در این مرحله اشتباه است. اول باید معادلهٔ حرکت را به‌ازای متغیر r پیدا کنیم و آنگاه $r = R$ را به‌عنوان شرط مربوط به یک حرکت خاص در نظر گیریم.

مهره در سهمی

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{2}(2\dot{r} + 8c^2 r^2 \dot{r})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{2}(2\ddot{r} + 16c^2 r\dot{r}^2 + 8c^2 r^2 \ddot{r})$$

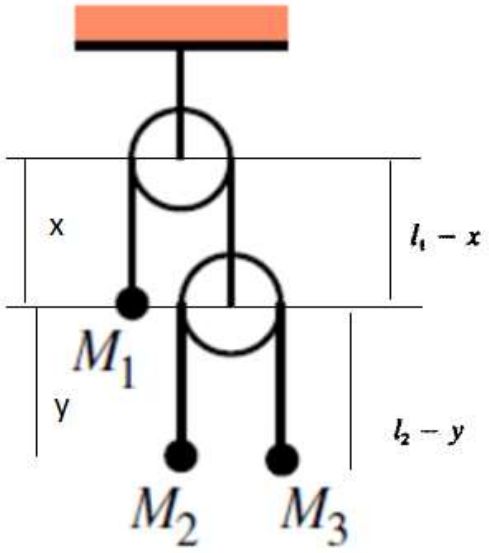
$$\frac{\partial L}{\partial r} = m(4c^2 r\dot{r}^2 + r\omega^2 - 2gcr)$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{r}(1 + 4c^2 r^2) + \dot{r}^2(4c^2 r) + r(2gc - \omega^2) = 0$$

اگر مهره در $r = R = \text{const.}$ بچرخد، در این صورت $\dot{r} = \ddot{r} = 0$،

$$R(2gc - \omega^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad c = \frac{\omega^2}{2g}$$

ماشین آتوود



مثال : یک قرقره دوتایی بدون وزن به سه جرم مطابق شکل متصل است. شتاب هر یک از اجرام را بیابید؟

حل: فرض کنید قرقره‌ها بی‌جرم باشند، و فرض کنید l_1 و l_2 طول طنابهایی باشد که آزادانه از هر یک از دو قرقره آویخته شده‌اند. فواصل x و y از مرکز دو قرقره اندازه گرفته می‌شوند

$$m_1: \quad v_1 = \dot{x}$$

$$m_2: \quad v_2 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + y) = -\dot{x} + \dot{y}$$

$$m_3: \quad v_3 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + l_2 - y) = -\dot{x} - \dot{y}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2$$

ماشین آتوود

انرژی پتانسیل را در $x = 0$ می‌گیریم؛ $U = 0$.

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$
$$= -m_1 g x - m_2 g(l_1 - x + y) - m_3 g(l_1 - x + l_2 - y)$$

معادلات حرکت برابر ند با:

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_1 - m_2 - m_3)g$$
$$-m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_2 - m_3)g$$

معادلات اویلر- لاگرانژ:

خلاصه

در این مطلب یکی از معادلات اصلی موجود در مکانیک لاگرانژی تحت عنوان معادله اویلر لاگرانژ توضیح داده شد. این معادله بیان می‌کند که انتگرالِ کمیتی تحت عنوانِ لاگرانژ که معیاری از انرژی جنبشی و پتانسیل یک سیستم محسوب می‌شود، زمانی اکسترمم است که معادله‌ی اویلر لاگرانژ برقرار باشد.

بنابراین جهت بدست آوردن معادلات حرکت یک سیستم می‌توان معادله دیفرانسیل اویلر لاگرانژ را حل کرده و از مسیر سهل‌تری به معادلات دست یافت. البته این معادله در مسائلی که می‌خواهیم کمیتی را مینیمم کنیم نیز کاربرد دارد. برای نمونه جهت مینیمم کردن طول، مساحت یا حجم، استفاده از این معادله زمان حل را بسیار کاهش می‌دهد.

قیدهای هولونوم و قیدهای ناهلونوم

دو نوع قید وجود دارد: قیدهای هولونوم و قیدهای غیر ناهلونوم.

قیدهای هولونوم	$f(x_i,t)-\text{cte}=0$
قیدهای ناهولونوم	$f(x_i,\dot{x}_i,t)-\text{cte}=0$

قیودی که ممکن باشد به‌صورت معادله‌ای بیان شوند که مختصات را به هم مربوط کنند هولونوم نامیده می‌شوند. برای مثال، ذره‌ای که به قرار داشتن روی سطح یک کُره مقید است، تحت قید هولونوم است. اگر ذره بتواند در اثر نیروی گرانش از سطح کره جدا شده و سقوط کند، آنگاه قید غیر هولونوم می‌شود.

یک سیستم مکانیکی اسکلرونوم است، در صورتی که زمان یک متغیر صریح برای معادلات قیدهای سیستم نباشد و این معادلات را بتوان با مختصات تعمیم یافته توصیف کرد.

قیدهای هولونوم و قیدهای ناهلونوم

هرگونه قیدی که لازم باشد برحسب سرعت ذرات موجود در سیستم بیان شود، به‌صورت زیر است

$$f(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0$$

و قیدهای ناهولونوم را تشکیل می‌دهند مگر آنکه بتوان از این معادلات انتگرال گرفت تا روابط بین مختصه‌ها حاصل شوند.

اگر ذره بتواند در اثر نیروی گرانش از سطح کره جدا شده و سقوط کند، آنگاه قید غیر هولونوم می‌شود.

قیدهای هولونوم و قیدهای ناهلونوم

قیود غیر هولونومیک قیود سینماتیکی یا دینامیکی هستند که به صورت روابطی بین متغیر های تعمیم یافته و مشتقات مرتبه اول و دوم زمانی آنها ظاهر شده وقابل انتگرال گیری و تبدیل به معادلات قیدی جبری نیستند

رابطه‌ای قیدی به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

به‌طور کلی، این معادله غیرقابل انتگرالگیری، و بنابراین قید ناهولونوم است. اما اگر A_i و B به این شکل باشند

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f = f(x_i, t)$$

قیدهای هولونوم و قیدهای ناهلونوم

در این صورت داریم:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{df}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad f(x_i, t) - \text{const.} = 0$$

بنابراین قید عملاً هولونوم است. قیدهایی را که بشود به شکل دیفرانسیلی زیر بیان

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0$$

$$f_k(x_{\alpha,i}, t) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$
$$s = 3n - m$$

معادلات لاگرانژ با ضرایب نامعین

همانطور که گفته شد قیود غیر هولونومیک قیود سینماتیکی یا دینامیکی هستند که به صورت روابطی بین متغیر های تعمیم یافته و مشتقات مرتبه اول و دوم زمانی آنها ظاهر شده وقابل انتگرال گیری و تبدیل به معادلات قیدی جبری نیستند. به همین دلیل متغیر های تعمیم یافته در نظر گرفته شده مستقل از هم نیستند اما چون وابستگی آنها با معادلات دیفرانسیل مشخص شده و نه معادلات جبری نمی توان آنها را حذف کرد و به تعداد درجات آزادی سیستم تقلیل داد.

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j = 0 \qquad \begin{cases} j = 1, 2, \ldots, s \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

در این حالت یافتن معادلات دیفرانسیل حرکت با استفاده از روشهای معمول مثل روش لاگرانژ منجر به وارد شدن ضرائب لاگرانژ و بیشتر شدن تعداد معادلات از درجات آزادی سیستم میشود .

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0$$

معادلات لاگرانژ با ضرایب نامعین

معادلات لاگرانژ با ضرایب نامعین

مزیت عمدهٔ فرمولبندی لاگرانژی مکانیک این است که گنجانیدن صریح نیروهای قیدی در آنها ضروری نیست؛ یعنی، تأکید بر دینامیک سیستم است تا محاسبهٔ نیروهای وارد بر هر یک از مؤلفه‌های سیستم.

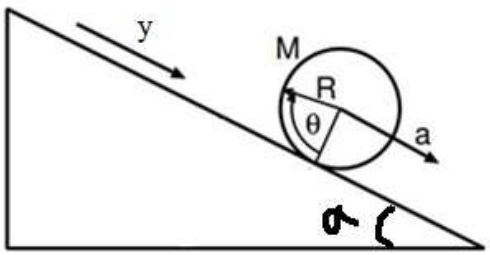
اما، در مواردی شاید شناسایی نیروهای قیدی مورد نظر باشد.

$\lambda_k(t)$ ⟷ ضرایب نامعین لاگرانژ نیرو های قیدی هستند.

دیسک بر روی سطح شیب دار

مثال **دیسک غلتان روی سطح شیبدار**

در ابتدا مطابق با شکل زیر، سطحی شیبدار را در نظر می‌گیریم که دیسکی نیز روی آن در حال غلتش است.



$$y = R\theta \quad \longleftrightarrow \quad g(y,\theta) = y - R\theta = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -R$$

دیسک بر روی سطح شیب دار

انرژی جنبشی را می‌شود به‌صورت جمله‌های انتقالی و چرخشی جدا کرد

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$U = Mg(l - y)\sin\alpha$$

لاگرانژی عبارت است از

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(y - l)\sin\alpha$$

دیسک بر روی سطح شیب دار

هر دو y و θ را مختصات تعمیم‌یافته بگیریم و از روش ضرایب نامعین سود جوییم.

در این حالت معادلات لاگرانژ عبارت‌اند از

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

با انجام عملیات دیفرانسیل‌گیری، برای معادلات حرکت به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} Mg\sin\alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \\ -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0 \\ y = R\theta \end{cases}$$

دیسک بر روی سطح شیب دار

از دیفرانسیل‌گیری معادلهٔ قیدی خواهیم داشت

$$\ddot{\theta} = \ddot{y}/R$$

$$\lambda = -\frac{۱}{۲}M\ddot{y}$$

با ترکیب این معادلات داریم:

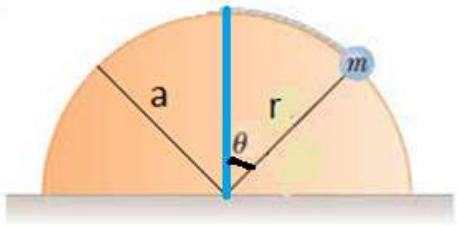
$$\begin{cases} \ddot{y} = \dfrac{۲g\sin\alpha}{۳} \\ \lambda = -\dfrac{Mg\sin\alpha}{۳} \end{cases}$$

توجه کنید که می‌توانیم $\dot{\theta}$ را از لاگرانژی، از طریق جانشانی $\dot{\theta} = \dot{y}/R$ از معادلهٔ قیدی، حذف کنیم

$$L = \frac{۳}{۴}M\dot{y}^{۲} + Mg(y-l)\sin\alpha \longrightarrow Mg\sin\alpha - \frac{۳}{۲}M\ddot{y} = ۰$$

ذره روی نیم کره

مثال : ذره‌ای به جرم m واقع بر قلهٔ نیم‌کرهٔ ثابت صافی به شعاع a از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. نیروی قیدی را بیابید، و تعیین کنید که این ذره در چه زاویه‌ای نیم‌کره را ترک می‌کند.



معادلهٔ قیدی عبارت است از

$$f(r,\theta) = r - a = 0$$

$$\begin{cases} T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\ U = mgr\cos\theta \end{cases} \longrightarrow \quad L = T - U$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta$$

ذره روی نیم کره

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

معادلات حرکت برابرند با:

$$m r \dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - m\ddot{r} + \lambda = 0$$

$$mgr\sin\theta - mr^2\ddot{\theta} - 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

ذره روی نیم کره

آنگاه قید $r = a$ را به این معادلات حرکت اعمال می‌کنیم

$$r = a, \qquad \dot{r} = 0 = \ddot{r}$$

$$\begin{cases} ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0 \\ mga\sin\theta - ma^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\int \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{a}\int \sin\theta d\theta \longrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{a}\cos\theta + \frac{g}{a}$$

که ثابت انتگرالگیری برابر است با g/a، زیرا در $t = 0$، وقتی که $\theta = 0$، داریم $\dot{\theta} = 0$.

ذره روی نیم کره

$$ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{a}\cos\theta + \frac{g}{a}$$

$$\lambda = mg(3\cos\theta - 2)$$

ذره‌نیمکره را در زاویهٔ θ_0 ترک می‌کند که در این حالت $\lambda = 0$.

$$\lambda = 0 = mg(3\cos\theta_0 - 2)$$

$$\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

معادلات لاگرانژ با ضرایب نامعین : جمع بندی

روش ضرایب نامعین متضمن دو فایده است:

۱. ضرایب لاگرانژ همان نیروهای قیدی هستند که اغلب مورد نیازند.

۲. وقتی مجموعهٔ مناسبی از مختصات تعمیم‌یافته مورد نیاز نباشد یا دستیابی به آن دشوار باشد، این روش را می‌توان برای افزایش تعداد مختصات تعمیم‌یافته با گنجانیدن روابط قیدی مابین مختصه‌ها به کار گرفت.

هم ارزی معادلات لاگرانژ با معادلات نیوتن

لاگرانژی عبارت است از :

$$L(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3} v_i^2 - U(\mathbf{x}),$$

اگر از لاگرانژین بالا، مشتق پاره‌ای بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial L(t,\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial x_i} = -\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i} = F_i(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial L(t,\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial v_i} = mv_i = p_i,$$

$$\longrightarrow \quad F_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{x}_i(t) = m\ddot{x}_i(t),$$

هم ارزی معادلات لاگرانژ با معادلات نیوتن

حالا معادلات حرکت لاگرانژ را با استفاده از مفاهیم نیوتونی استخراج می‌کنیم

لازم است که مختصات x_i را به مختصات تعمیم‌یافتهٔ q_j تبدیل کنیم.

$$x_i = x_i(q_j, t)$$

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i}$$

تکانهٔ تعمیم‌یافتهٔ p_j وابسته به q_j به‌آسانی تعیین می‌شود

$$p_j \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

هم ارزی معادلات لاگرانژ با معادلات نیوتن

مثال : در مورد ذره‌ای که درمختصات قطبی حرکت می‌کند داریم:

$$T = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)m/2$$

$$r: \quad p_r = m\dot{r} \qquad \text{تکانه‌ای خطی}$$

$$\theta: \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \qquad \text{تکانهٔ زاویه‌ای}$$

کار مجازی و نیروی تعمیم یافته:

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j \quad \longleftrightarrow \quad Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

هم ارزی معادلات لاگرانژ با معادلات نیوتن

. اگر q طول باشد Q نیروست؛ اگر q زاویه باشد، Q گشتاور نیروست.

برای یک سیستم پایستار، Q_j از انرژی پتانسیل قابل استنتاج است

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

معادلات لاگرانژ

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2\right)$$

$$= \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$p_j = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i}$$

هم ارزی معادلات لاگرانژ با معادلات نیوتن

$$\dot{p}_j = \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$$

نیروی تعمیم یافته

$$\dot{p}_j = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i,k} m_i \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$$

نیرو

جملهٔ آخر را بسط می‌دهیم

جملهٔ دوم عبارت است از $\partial T / \partial q_j$

$$T = \sum \tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

$$= \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \sum_{i,k} m_i \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k$$

یک وابستگی زمانی صریح در معادلات تبدیل را حذف کرده‌ایم.

هم ارزی معادلات لاگرانژ با معادلات نیوتن

$$\dot{p}_j = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i,k} m_i \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$$

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

در نتیجه داریم:

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$p_j \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

چون U به سرعتهای تعمیم‌یافته، $\dot{q}_j$، وابسته نیست،

هم ارزی معادلات لاگرانژ با معادلات نیوتن

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

معادلات لاگرانژ

سرشت مکانیک لاگرانژی

مکانیک نیوتنی متکی بر مفاهیم هندسی بود، اما لاگرانژ توانست با کاربرد آنالیز به جای هندسه به آن هم وحدت و هم استحکام بخشد.

در صورت بندی نیوتن می بایست برای برای هر مسئله ای تجزیه تحلیل دقیقی از بردارهای نیروها انجام دهیم. هم چنین معادلات حاکم بر نیروها و شتاب ها در هر دستگاه مختصاتی یک شکل و یک قیافه معین پیدا می کند.

در صورت بندی لا گرانژ نیازی به تجزیه تحلیل این بردار ها نیز و جود ندارد، و بالاتر از همه شکل معادلات حرکت که آنها را معادلات اویلر- لا گرانژ می نامیم کاملا مستقل از نوع مختصاتی هستند که به کار می بریم.

تفاوت فلسفی : مکانیک نیوتنی ← علت فاعلی

مکانیک لاگرانژی ← علت غایی

قضیه اویلر

اگر $f(y_k)$ تابع همگنی از y_k، با درجهٔ n، باشد، در این صورت

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = nf$$

اثبات برای یک مورد خاص:

اگر انرژی جنبشی در مختصات ثابت و قائم بیان شود، نتیجه عبارت است از تابع درجهٔ دوم همگنی از $\dot{x}_{\alpha,i}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{3} m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}^2$$

قضیه اویلر

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t), \qquad j = ۱, ۲, \ldots, s$$

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=۱}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}$$

مجذور $\dot{x}_{\alpha,i}$ را به‌دست می‌آوریم

$$\dot{x}_{\alpha,i}^{۲} = \sum_{j,k} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + ۲ \sum_{j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^{۲}$$

قضیه اویلر

انرژی جنبشی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$T = \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$+ \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j$$

$$+ \sum_{\alpha} \sum_{i} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2$$

$$\longleftrightarrow \quad T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j} b_j \dot{q}_j + c$$

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0, \quad b_j = 0, \quad c = 0$$

یک سیستم اسکلرونوم

$$\longrightarrow \quad T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

قضیه اویلر

نسبت به $\dot{q}_l$ دیفرانسیل می‌گیریم

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk}\dot{q}_k + \sum_j a_{jl}\dot{q}_j$$

طرفین این معادله را در $\dot{q}_l$ ضرب و روی l جمع می‌کنیم، داریم

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k,l} a_{lk}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{j,l} a_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l$$

$$T = \sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = ۲\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = ۲T$$

قضایای پایستگی

همگنی زمان و قانون بقای انرژی

در فیزیک اصطلاح پایستگی به شرایطی اطلاق دارد که در آن یک کمیت با گذشت زمان ثابت بماند.

در فیزیک سه کمیت اصلی وجود دارد که مقدار آن‌ها با گذشت زمان ثابت است. این کمیت‌ها، انرژی، تکانه و تکانه زاویه‌ای هستند.

کمیت های پایسته کمیت هایی هستند که مقدارشان در طول زمان، هر چقدر هم که دینامیک پیچیده ای بر یک سیستم حاکم باشد، ثابت باقی می ماند.

آنچه که مهم است این است که یک رابطه ساده و یک به یک بین تقارن های پیوسته لاگرانژی و کمیت های پایسته برقرار است.

قضایای پایستگی

زمان در داخل یک چارچوب مرجع لخت همگن است.

لاگرانژیی که سیستم بسته‌ای (یعنی، سیستمی که با هیچ چیزی خارج از سیستم برهم‌کنش ندارد) را توصیف می‌کند نمی‌تواند صریحاً وابسته به زمان باشد،یعنی

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

بنابراین مشتق کامل لاگرانژی می‌شود

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

قضایای پایستگی

$$\frac{dL}{dt} - \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H = \text{const.}$$

هامیلتون

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

تکانه مزدوج با مختصه q_i به شکل زیرتعریف می شود:

این تکانه با تکانه خطی لزوماً یکی نیست.

قضایای پایستگی

هامیلتونی دستگاه به صورت زیرتعریف می شود:

$$H := \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L.$$

حال سوال می کنیم که عبارت هامیلتونی چه ربطی به انرژی جنبشی و پتانسیل دارد. برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که لا گرانژی به صورت زیراست:

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q) \longrightarrow H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - V).$$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \longrightarrow H = T + V$$

اگر انرژی پتانسیل به سرعتهای یا زمان وابستگی صریحی نداشته باشد

بنابراین بقای انرژی ناشی از همگنی زمان است.

قضایای پایستگی

توجه به این نکته مهم است که فقط اگر شرایط زیر برآورده شوند، هامیلتونی H باانرژی کل برابر است:

۱. معادلات تبدیل رابط بین مختصات قائم و تعمیم‌یافته باید مستقل از زمان باشند، بدینسان تضمین می‌شود که انرژی جنبشی تابع درجهٔ دوم همگنی از $\dot{q}_j$ است.

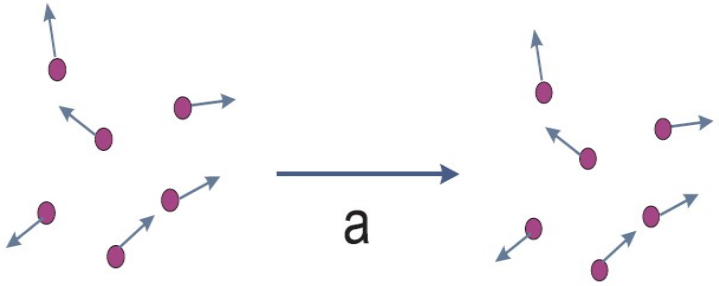
$$q_j = q_j(x_{\alpha,i}) \text{ یا } x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$$

$$U = U(q_j) \text{، و } \partial U/\partial \dot{q}_j = 0.$$

۲. انرژی پتانسیل باید مستقل از سرعت باشد، که بدینسان امکان حذف جمله‌های $\partial U/\partial \dot{q}_j$ از معادلهٔ مربوط به H فراهم می‌آید.

در این‌صورت سؤالهایی از این دست که «آیا برای سیستم $E = H$؟» و «آیا انرژی سیستم پایسته است؟»، به دو جنبهٔ مختلف مسئله مربوط می‌شوند، و هر سؤال را باید جداگانه بررسی کرد.

همگنی فضا و قانون بقای اندازه حرکت خطی



همگنی فضا به این معناست که اگر مکان همه ذرات را به اندازه بردارِ دلخواه جابجا کنیم، ولی تکانه های آنها را دست نزنیم، هامیلتونی هیچ تغییری نمی کند،

انتقال بینهایت کوچک هر بردار شعاعی مانند $\mathbf{r}_\alpha$ را به‌صورت $\mathbf{r}_\alpha \to \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$ در نظر بگیرید؛ این عمل به انتقال کل سیستم به‌اندازهٔ $\delta\mathbf{r}$ می‌انجامد.

تغییر در لاگرانژی L به‌علت جابه‌جایی بینهایت کوچک $\delta\mathbf{r} = \sum_i \delta x_i \mathbf{e}_i$ عبارت است از

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i = 0 \quad \longleftarrow \quad \delta\dot{x}_i = \delta\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x_i \equiv 0$$

δx_i توابع صریح یا ضمنی از زمان نیستند.

قانون بقای اندازه حرکت خطی

بنابراین δL می‌شود

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{const}$$

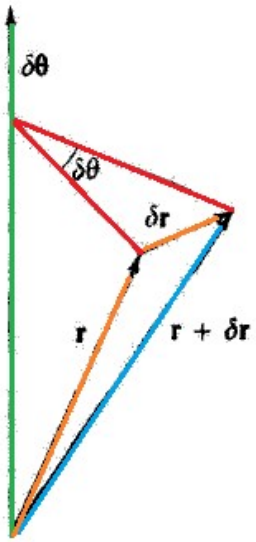
$$\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2}m\sum_j \dot{x}_j^2\right) = m\dot{x}_i = \text{const} = p_i$$

پس همگنی فضا حکم می‌کند که تکانهٔ خطی یک سیستم بسته، p، نسبت به زمان ثابت باشد.

همسانگردی فضا و قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای

یکی از مشخصه‌های چارچوب مرجع لخت همسانگردی فضاست-یعنی، سمتگیری یک سیستم بسته تاثیری بر خواص مکانیکی آن سیستم نمی‌گذارد.

در حالت خاص، اگر سیستمی به‌اندازهٔ زاویهٔ بینهایت کوچک $\delta\theta$ حول محور معینی بچرخد بردار شعاعی $\mathbf{r}$ مربوط به یک نقطهٔ معین به $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$ تغییر می‌کند، که در اینجا داریم



$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}}$$

تغییر L ناشی از چرخش بینهایت کوچک عبارت است از

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i = 0$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \quad \delta L = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0$$

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = 0$$

همسانگردی فضا و قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \longrightarrow \delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + \delta\boldsymbol{\theta} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = 0 \longrightarrow \delta\boldsymbol{\theta} \cdot [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] = 0$$

ضرب عددی سه‌گانه را به‌ترتیب چرخه‌ای جایگشت می دهیم

$$\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \longleftarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.}$$

بنابراین بقای تکانه زاویه ای نتیجه مستقیم همسانگردی فضاست.

جمع بندی

مشخصهٔ چارچوب لخت	خاصیت لاگرانژی	کمیت پایسته
زمان همگن	تابع صریحی از زمان نیست	انرژی کل
فضای همگن	ناوردا نسبت به انتقال	تکانهٔ خطی
فضای همسانگرد	ناوردا نسبت به چرخش	تکانهٔ زاویه‌ای

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

برای یک دستگاه با N درجه آزادی، درصورتبندی لا گرانژ N معادله دیفرانسیل درجه دوم داریم که این معادلات با دردست داشتن مختصات و سرعت های اولیه یکحل یکتا به عنوان مسیر درفضای پیکربندی ها بدست می دهند.
هامیلتون صورت بندی متفاوت زیررا ازمکانیک کلاسیک بدست داده است که ازبسیاری جهات بخصوص برای تعمیم نظری مکانیک کلاسیک به چهارچوب کوانتومی مناسب است.

تکانه مزدوج با مختصه q_i به شکل زیرتعریف می شود:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

هامیلتونی دستگاه به صورت زیرتعریف می شود:

$$H := \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L.$$

باید تاکید کنیم که در فرمول بندی هامیلتون متغیرهای مستقل q_i ها و p_i ها هستند.

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

هامیلتونی همواره تابع مجموعهٔ (q_k, p_k, t) در حالی‌که لاگرانژی تابع مجموعهٔ $(q_k, \dot{q}_k, t)$ است

$$H = H(q_k, p_k, t), \qquad L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

از این‌رو دیفرانسیل کامل H عبارت است از

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\longrightarrow \quad dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

جمله دوم و چهارم با توجه به تعریف تکانه مزدوج یعنی $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ یکدیگر را حذف می کنند

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

این معادلات که2s معادله دیفرانسیل درجه یک هستند معادلات هامیلتون نامیده می شوند و معادلات حرکت در صورت بندی هامیلتون نامیده می شوند.

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

نوسانگر هارمونیک

مثال: برای نوسانگرهارمونیک به جرم m و فرکانس ω، هامیلتونی برابراست با:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

q و p دو مختصه مزدوج هستند. معادلات هامیلتون عبارت خواهند بود از:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q.$$

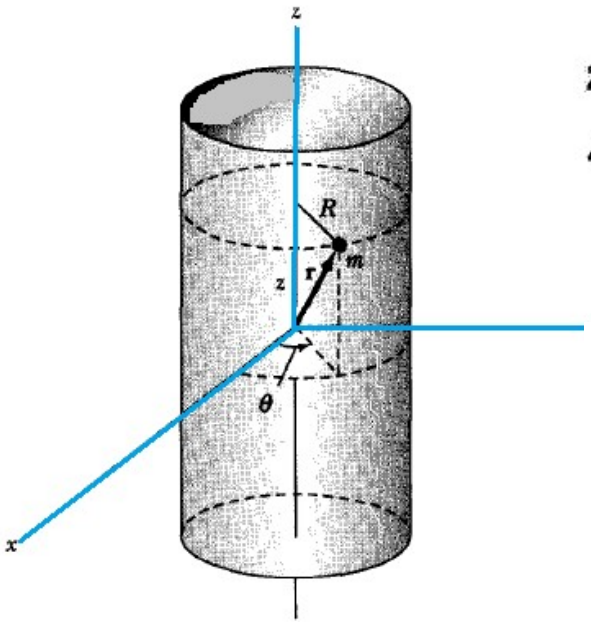
با ترکیب این دو معادله بدست می آوریم

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q^2 = 0,$$

که معادله حرکت یک نوسانگر هارمونیک است.

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

مثال: برای یافتن معادلات حرکت ذره‌ای به جرم m که مقید است روی سطح استوانه‌ای به معادلهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ حرکت کند، از روش هامیلتونی بهره گیرید. این ذره تحت تأثیر نیرویی است که راستای آن به‌سوی مبدأ و متناسب است با فاصلهٔ ذره ازمبدأ: $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$.



پتانسیل متناظر با نیروی $\mathbf{F}$ عبارت است از

$$U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$= \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

در مختصات استوانه‌ای، مجذور سرعت عبارت است از

$$v^2 = \dot{R}^2 + \dot{R}^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

اما در اینجا $r = R$ ثابت است، از این‌رو انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

لاگرانژی به صورت زیراست:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k(R^2 + z^2)$$

مختصات تعمیم‌یافته عبارت‌اند از θ و z، و تکانه‌های تعمیم‌یافته عبارت‌اند از

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$H(z, p_\theta, p_z) = T + U$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} kz^2$$

از آنجا که سیستم پایستار است و معادلات تبدیل بین مختصات قائم و استوانه‌ای صریحاً شامل زمان نیستند، هامیلتونی H عبارت است از همان انرژی کل که برحسب متغیرهای θ، p_θ، z، و p_z بیان شده باشد. اما θ به‌طور صریح ظاهر نمی‌شود،

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

$$H(z, p_\theta, p_z) = T + U = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta} = \text{constant}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \qquad \omega_0^2 \equiv k/m$$

روش لاگرانژی آسانتر به معادلات حرکت می‌انجامد تا روش هامیلتونی.

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

به‌طورکلی، توانایی شایان توجه رهیافت هامیلتونی در دینامیک، در ساده‌سازی جوابهای مسائل مکانیک جلوه نمی‌کند؛ بلکه، شالوده‌ای را فراهم می‌آورد که می‌توان آن را به سایر حوزه‌ها بسط داد.

مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q_k و تکانهٔ تعمیم‌یافتهٔ p_k کمیتهای مزدوج بنادی هستند.

اگر q_k در هامیلتونی ظاهر نشود، دراین‌صورت $\dot{p}_k = 0$، و تکانهٔ مزدوج p_k یک ثابت حرکت به‌شمار می‌آید.

مختصه چرخه ای: مختصه‌هایی راکه صریحاً در عبارتهای مربوط به T و U ظاهر نمی‌شوند مختصه چرخه ای میگویند.

مختصه‌ای که در H چرخه‌ای باشد در L نیز چرخه‌ای است.

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

اما، حتی اگر q_k در L ظاهر نشود، سرعت تعمیم‌یافتهٔ $\dot{q}_k$ وابسته به این مختصه به‌طورکلی در L حضور دارد.

$$L = L(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

گرچه یک مختصه چرخه‌ای است، ولی به هیچگونه کاهشی در تعداد درجه‌های آزادی این سیستم دست نمی‌یابیم؛ و هنوز هم باید s معادلهٔ مرتبهٔ دوم را حل کرد.

در فرمولبندی بنادی، اگر q_k چرخه‌ای باشد، p_k ثابت است، $p_k = \alpha_k$، و

$$H = H(q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \ldots, p_s, t)$$

از این‌رو باید $2s - 2$ معادلهٔ مرتبهٔ اول را حل کنیم، و در واقع پیچیدگی مسئله کاهش یافته است؛

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

معادلهٔ حرکت برای مختصهٔ چرخه‌ای عبارت است از

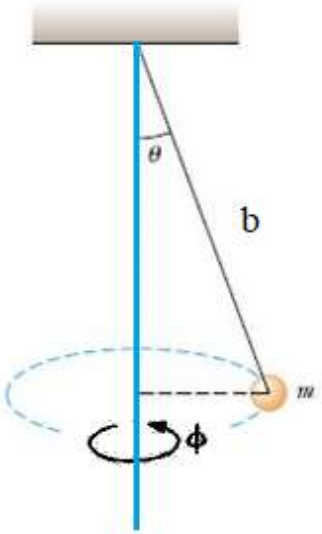
$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} \equiv \omega_k$$

که بلافاصله می‌توان از آن انتگرال گرفت و رسید به

$$q_k(t) = \int \omega_k dt$$

درنتیجه، فرمولبندی بنادی هامیلتون مخصوصاً برای بررسی مسائلی که در آنها یک یا چند مختصه چرخه‌ای‌اند کاملاً مناسب است.

آونگ کروی



مثال: با بهره‌گیری از روش هامیلتونی، معادلات حرکت آونگی کروی به جرم m و طول b را بیابید

مختصات تعمیم‌یافته عبارت‌اند از θ و ϕ. انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mb^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 \qquad U = -mgb\cos\theta$$

پس تکانه‌های تعمیم‌یافته عبارت‌اند از

$$\begin{cases} p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta} \\ p_\phi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mb^2 \sin^2\theta\dot{\phi} \end{cases}$$

آونگ کروی

هامیلتونی دستگاه به صورت زیر بیان می شود:

$$H = T + U$$

$$= \frac{1}{2} mb^2 \frac{p_\theta^2}{(mb^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{mb^2 \sin^2\theta p_\phi^2}{(mb^2 \sin^2\theta)^2} - mgb\cos\theta$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\phi^2}{2mb^2 \sin^2\theta} - mgb\cos\theta$$

معادلات هامیلتون

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mb^2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mb^2 \sin^2\theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{mb^2 \sin^3\theta} - mgb\sin\theta$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

چون ϕ چرخه‌ای است، تکانهٔ p_ϕ حول محور تقارن ثابت است.

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

معادلات بنادی حرکت را نیز می‌توان مستقیماً از یک محاسبهٔ وردشی به‌دست آورد

تابع لاگرانژی را می‌توان این‌طور بیان کرد

$$L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0$$

اصل همیلتون

با انجام عملیات وردشی طبق روش استاندارد، به‌دست می‌آوریم

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt = 0$$

صورتبندی هامیلتون از مکانیک

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta q_j dt = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \dot{p}_j \delta q_j dt$$

$\dot{q}_j$ها در اینجا نیز از q_jها مستقل نیستند.

جزءبه‌جزء انتگرال می‌گیریم، جملهٔ انتگرال گرفته‌شده صفر می‌شود

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt = 0 \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left\{ \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt = 0$$

q و p دو مختصه مزدوج هستند.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$


فصل ۷: نیروی مرکزی

فصل ۷: نیروی مرکزی

نیروی مرکزی نیرویی است که همیشه یک مرکز ثابت ، یا دور از آن موثر است و اندازه آن فقط تابعی از فاصله ذره تا نقطه اثر نیرو است. به بیان دیگر می‌توان گفت کروی ، نیروی مرکزی فقط تابعی از شعاع می‌باشد.

هر گاه یکی از ذرات در مبدا قرار گرفته باشد، نیروی وارد بر دیگری از نوع مرکزی خواهد بود. به عنوان مثال نیروی گرانشی خورشید بر سیارات یا نیروی جاذبه الکتریکی هسته اتم بر الکترون ، نیروی مرکزی جاذبه است. نیروی موجود بین یک پروتون یا یک ذره آلفا و یک هسته دیگر ، نیروی مرکزی دافعه است.

فصل ۷ : نیروی مرکزی

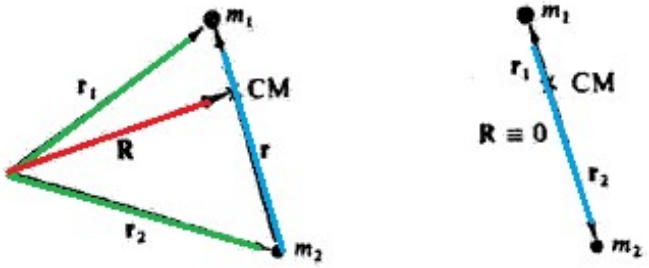
نیروی که در نمایش دستگاه مختصات کروی دارای فرم روبرو باشد را **نیروی مرکزی** می‌نامیم: $\vec{F} = f(r)\hat{r}$

نیروی گرانش و قانون کولن دو نمونه از نیروی مرکزی هستند. از آنجایی که تاو نیروهای مرکزی صفر است($\nabla \times \vec{F} = 0$)، تمام نیروهای مرکزی نیروی پایستار هستند. بنابراین می‌توانیم تابع انرژی پتانسیل را تعریف کنیم:

$$V(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{r_{ref}}^{r} f(r)dr$$

فصل ۷: جرم کاهش یافته

مسئله دو جسم می‌تواند با فرمول‌بندی مجدد، به دو مسئله تک‌جسم مستقل تبدیل شده و حل شود.



توصیف سیستمی متشکل از دو ذره مستلزم تشخیص شش کمیّت است؛ مثلاً سه مؤلفهٔ هر یک از دو بردار $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ مرتبط به این دو ذره.[1] به گونه‌ای معادل، می‌توانیم سه مؤلفهٔ بردار مرکز جرم، $\mathbf{R}$، و سه مؤلفهٔ $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ را اختیار کنیم. لاگرانژی چنین سیستمی را می‌توان این‌طور نوشت

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1^2| + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2^2| - U(r)$$

انرژی پتانسیل فقط تابعی از $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$

فصل ۷: جرم کاهش یافته

از آنجا که حرکت انتقالی سیستم کلاً از دیدگاه مدار ذرات نسبت به یکدیگر مهم نیست، می‌توانیم مبدأ دستگاه مختصات را مرکز جرم ذرات اختیارکنیم ــ یعنی، $\mathbf{R} \equiv 0$

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$$

این معادله، پس از ترکیب با $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$، نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}$$

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}^2| - U(r)$$

فصل ۷: جرم کاهش یافته

که μ جرم کاهش‌یافته نامیده می‌شود:

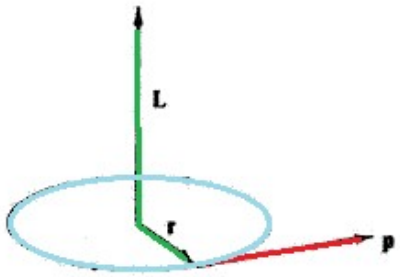
$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

بنابراین مسئله حرکت دو جسم را به‌طور صوری به یک مسئله یک جسمی معادل تبدیل کرده‌ایم که در آن فقط باید حرکت یک «ذره»، به جرم μ را در میدان مرکزی توصیف شده به‌وسیلهٔ تابع پتانسیل $U(r)$ تعیین کنیم.

فصل ۷: قضایای پایستگی، انتگرالهای اول حرکت

سیستمی که می‌خواهیم در خصوص آن بحث کنیم عبارت است از ذره‌ای به جرم μ که در یک میدان نیروی مرکزی، که با تابع پتانسیل $U(r)$ توصیف می‌شود، حرکت می‌کند.

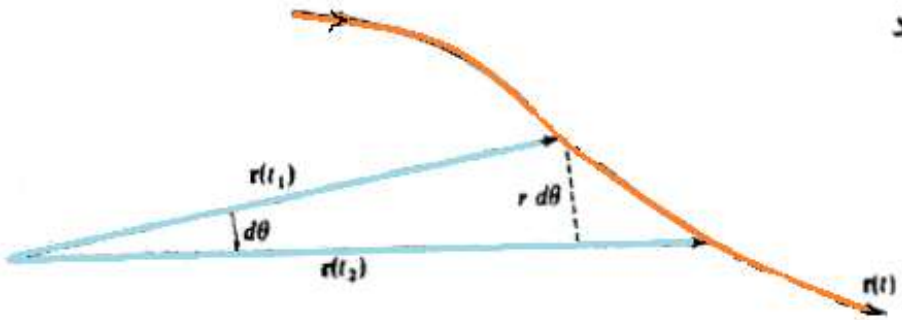
از آنجا که انرژی پتانسیل فقط به فاصلهٔ ذره از مرکز نیرو بستگی دارد و مستقل از سمتگیری آن است، سیستم دارای تقارن کروی است، تحت این شرایط تکانهٔ زاویه‌ای سیستم پایسته است:



$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.}$$

از این رابطه، روشن است که هم بردار شعاعی و هم بردار تکانهٔ خطی ذره همواره در صفحه‌ای عمود بر بردار تکانهٔ زاویه‌ای، $\mathbf{L}$، که در فضا ثابت است، قرار دارند

فصل ۷: قضایای پایستگی، انتگرالهای اول حرکت



در این صورت لاگرانژی را می‌توان به‌طور مناسبی در مختصات قطبی تخت بیان کرد

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

از آنجا که لاگرانژی بر حسب θ چرخه‌ای است، تکانهٔ زاویه‌ای مزدوج با مختصهٔ θ پایسته است

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

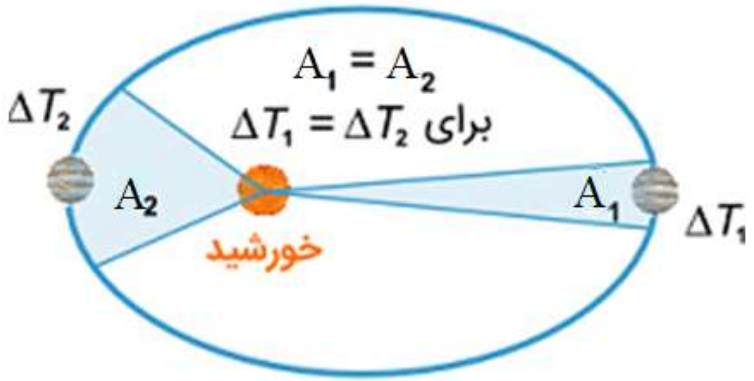
$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

$$l \equiv \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

کمیّت p_θ یک انتگرال اول حرکت است

فصل ۷: قضایای پایستگی، انتگرالهای اول حرکت

ثابت بودن l یک تعبیر هندسی ساده دارد.



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

سرعت سطحی

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$= \frac{l}{2\mu} = \text{const.}$$

بدینسان سرعت سطحی نسبت به زمان ثابت است. کپلر در مورد حرکت سیارات به‌طور تجربی به این نتیجه رسید. این نتیجه را قانون دوّم کپلرمی‌گویند.

فصل ۷: قضایای پایستگی، انتگرالهای اول حرکت

پایستگی انرژی کّل، E، به‌طور خودکار تضمین می‌شود چرا که ما بحث خود را به سیستمهای بی‌اتلاف محدود کرده‌ایم.

$$T + U = E = \text{const.}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$$

$$\longrightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

فصل ۷: معادلات حرکت

وقتی $U(r)$ مشخص شود، معادلهٔ انرژی سیستم را به‌طورکامل توصیف می‌کند، و انتگرالگیری از این معادله جواب کلّی مسئله را بر حسب پارامترهای E و l به‌دست می‌دهد.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}$$

معادلهٔ مسیر بر حسب r و θ مورد نظر ماست.

پس از انتگرالگیری داریم

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2\mu(E - U - l^2/2\mu r^2)}}$$

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr}dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}dr$$

$$\dot{\theta} = l/\mu r^2$$

هر چند که مسئله را به محاسبهٔ صوری یک انتگرال کاهش داده‌ایم، جواب واقعی را فقط می‌توان برای برخی اشکال معین قانون نیرو به‌دست آورد

فصل ۷: : معادلات حرکت

اگر $F(r) \propto r^n$ این جوابها را فقط به‌ازای $n = ۱, -۲, -۳$ می‌توان بر حسب انتگرالهای بیضوی بیان کرد

- $n = ۱$ ⟶ نوسانگر هماهنگ
- $n = -۲$ ⟶ قانون مهّم نیروی عکس مجذور

همچنین می‌توانیم با بهره‌گیری از معادلهٔ لاگرانژ مربوط به مختصهٔ r به حل این مسئله مبادرت ورزیم

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = ۰$$

$$L = \frac{۱}{۲}\mu(\dot{r}^۲ + r^۲\dot{\theta}^۲) - U(r)$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r)$$

فصل ۷: معادلات حرکت

با تغییر متغیر $u \equiv \frac{1}{r}$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

$$\dot{\theta} = l/\mu r^2$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{l}\dot{r}$$

با جانشانی برای $\dot{\theta}$ داریم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\mu}{l}\dot{r}\right) = \frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{l}\dot{r}\right) = -\frac{\mu}{l\dot{\theta}}\ddot{r}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu^2}{l^2}r^2\ddot{r}$$

با حل این معادله به‌ازای $\ddot{r}$ و $r\dot{\theta}^2$ بر حسب u، می‌رسیم به

$$\ddot{r} = -\frac{l^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{\mu^2}u^3$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2}F(u)$$

معادله حرکت

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2}F(r)$$

مثال: الف) قانون نیرو را برای یک میدان نیروی مرکزی که اجازه می‌دهد ذره‌ای در یک مدار مارپیچ لگاریتمی به معادلهٔ $r = ke^{\alpha\theta}$ حرکت کند، بیابید؛ k و α ثابت‌اند.

از معادلهٔ $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2}F(r)$ بهره می‌گیریم.

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{-\alpha\theta}}{k}\right) = \frac{-\alpha e^{\alpha\theta}}{k}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha^2 e^{-\alpha\theta}}{k} = \frac{\alpha^2}{r}$$

$$F(r) = \frac{-l^2}{\mu r^2}\left(\frac{\alpha^2}{r} + \frac{1}{r}\right)$$

$$F(r) = \frac{-l^2}{\mu r^3}(\alpha^2 + 1)$$

ب: $r(t)$ و $\theta(t)$ را تعیین کنید.

$$l \equiv \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} = \frac{l}{\mu k^2 e^{2\alpha\theta}}$$

$$e^{2\alpha\theta} d\theta = \frac{l}{\mu k^2} dt$$

پس از انتگرالگیری داریم

$$\frac{e^{2\alpha\theta}}{2\alpha} = \frac{lt}{\mu k^2} + C'$$

طرفین را در 2α ضرب می‌کنیم

$$e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha l t}{\mu k^2} + C$$

با گرفتن لگاریتم

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{2\alpha l t}{\mu k^2} + C\right)$$

می‌توانیم به‌طور مشابهی معادله را برای $r(t)$ با بررسی معادلات

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} = \frac{l}{\mu k^2 e^{2\alpha\theta}}$$

$$e^{2\alpha\theta} d\theta = \frac{l}{\mu k^2} dt$$

$$\frac{e^{2\alpha\theta}}{2\alpha} = \frac{lt}{\mu k^2} + C'$$

$$\frac{r^2}{k^2} = e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha l t}{\mu k^2} + C$$

$$r(t) = \left[\frac{2\alpha l}{\mu} t + k^2 C\right]^{\frac{1}{2}}$$

ج: انرژی کُل مدار چقدر است؟

انرژی از معادلهٔ $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$ تعیین می‌شود.

$$U(r) = -\int F dr = \frac{+l^2}{\mu}(\alpha^2+1)\int r^{-3}dr$$

$$U(r) = -\frac{l^2(\alpha^2+1)}{2\mu}\times\frac{1}{r^2}$$

فرض کرده‌ایم $U(\infty) = 0$.

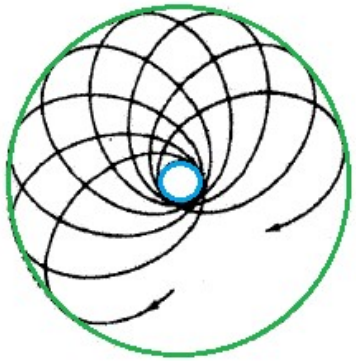
$$l \equiv \mu r^2\dot{\theta} = \text{const.} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr}\times\frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \\ \dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\times\frac{l}{\mu r^2} = \alpha k e^{\alpha\theta}\frac{l}{\mu r^2} = \frac{\alpha l}{\mu r} \end{cases} \longrightarrow E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\alpha l}{\mu r}\right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{l^2(\alpha^2+1)}{2\mu r^2}$$

$$E = 0$$

فصل ۷: مدارها در میدان مرکزی

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}$$

$$\dot{r} = 0 \longrightarrow r = \text{const}$$



سرعت شعاعی در ریشه های رادیکال معادله مقابل صفر است.

معنای صفر شدن سرعت این است که به یک نقطه برگشت در حرکت رسیده ایم. این معادله دو ریشه دارد: r_{min} و r_{max}

اگر تنها یک ریشه داشته باشیم شعاع ثابت است و حرکت دایره ای است.

اگر حرکت ذره‌ای در پتانسیل $U(r)$ تناوبی باشد، در این صورت مدار بسته است؛ یعنی، پس از تعداد معدودی سفر بین حدود شعاعی r_{min} و r_{max}، حرکت دقیقاً تکرار می‌شود.

امّا اگر مدار بعد از تعداد محدودی نوسان روی خودش بسته نشود، آن را باز می‌گویند

فصل ۷: مدارها در میدان مرکزی

تغییر زاویهٔ θ که ناشی از یک گذر کامل r از r_{min} تا r_{max} و برگشت به r_{min} است را محاسبه کنیم

$$\Delta\theta = ۲\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(l/r^۲)dr}{\sqrt{۲\mu\left(E - U - \frac{l^۲}{۲\mu r^۲}\right)}}$$

فقط در صورتی‌که $\Delta\theta$ کسر گویایی از ۲π باشد ــ یعنی، اگر $\Delta\theta = ۲\pi(a/b)$ ، که a و b اعداد صحیح‌اند ــ مسیر بسته است.

می‌توانیم نشان دهیم که اگر پتانسیل با توان صحیحی از فاصلهٔ شعاعی تغییر کند، یعنی $U \propto r^{n+۱}$، در این صورت فقط وقتی یک مسیر بستهٔ غیر دایره‌ای می‌تواند حاصل شود که $n = +۱$ یا $n = -۲$.

- $n = ۱$ ⟶ نوسانگر هماهنگ
- $n = -۲$ ⟶ قانون مهّم نیروی عکس مجذور

فصل ۷: انرژی مرکز گریزی و پتانسیل موثر

در عبارتهای قبلی مربوط به $\dot{r}$، $\Delta\theta$، و جز اینها، یک جملهٔ رادیکالی در همه مشترک است

$$\sqrt{E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}}$$

جملهٔ آخر زیر رادیکال دارای ابعاد انرژی است و می‌توان آن را چنین نوشت

$$\frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2$$

$$l \equiv \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

اگر این کمیت را «انرژی پتانسیل» تعبیر کنیم

$$U_c \equiv \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

در این صورت «نیروی» وابسته به U_c عبارت است از

$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2$$

نیروی مرکز گریز

فصل ۷: انرژی مرکز گریزی و پتانسیل موثر

ما می توانیم یک انرژی پتانسیل موثر به صورت مقابل تعریف کنیم:

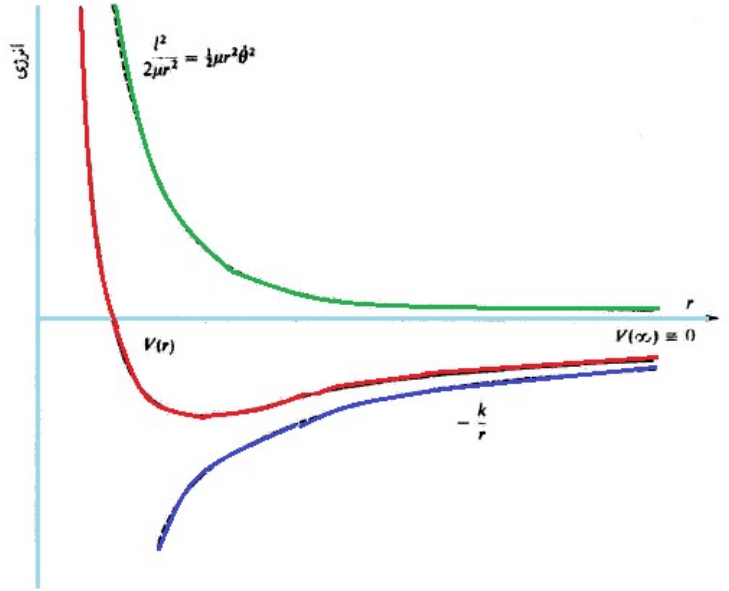
$$V(r) \equiv U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

مثال:) قانون مهم نیروی عکس مجذور نیرو چنین به‌دست می‌آید

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}$$

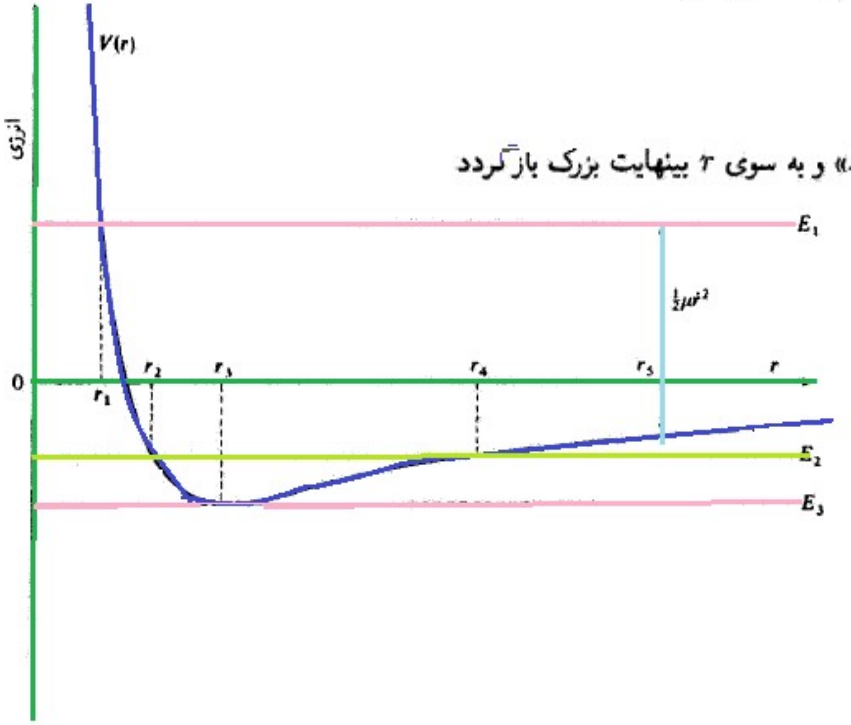
$$U(r) = -\int F(r)dr = -\frac{k}{r}$$

$$\longrightarrow \quad V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



فصل ۷: انرژی مرکز گریزی و پتانسیل موثر

اگر انرژی کّل، E، ذره را روی نموداری مشابه با شکل ترسیم کنیم، سه ناحیهٔ از نظر فیزیکی جالب را می‌توانیم شناسایی کنیم



۱) اگر انرژی کل مثبت یا صفر باشد (یعنی، $E_1 \geq 0$)، در این صورت حرکت نامقید است؛ ذره از بینهایت به سوی مرکز نیرو (واقع در $r = 0$) حرکت می‌کند تا به سد پتانسیل در نقطهٔ برگشت $r = r_1$ «برخورد کند» و به سوی r بینهایت بزرگ بازگردد

۲) اگر انرژی کل منفی و بین صفر و مقدار کمینهٔ $V(r)$ واقع باشد، مانند E_2، در این صورت حرکت، با $r_2 \leq r \leq r_3$ ، مقید است. مقادیر r_2 و r_3 نقاط برگشت، یا فواصل اوج و حضیض، مدار هستند.

فصل ۷: حرکت سیاره ای و قوانین کپلر

معادلهٔ مربوط به مسیر ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی که مقدار آن با عکس مجذور فاصلهٔ بین ذره و مرکز نیرو متناسب است، حرکت می‌کند را می‌توان از عبارت زیر به‌دست آورد

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}} + \text{const.}$$

اگر متغیر انتگرالگیری به $u \equiv l/r$ تغییر داده شود

$$\cos\theta = \frac{\frac{l^2}{\mu k} \times \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}$$

حال ثابتهای زیر را تعریف می‌کنیم

$$\alpha \equiv \frac{l^2}{\mu k}$$

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$$

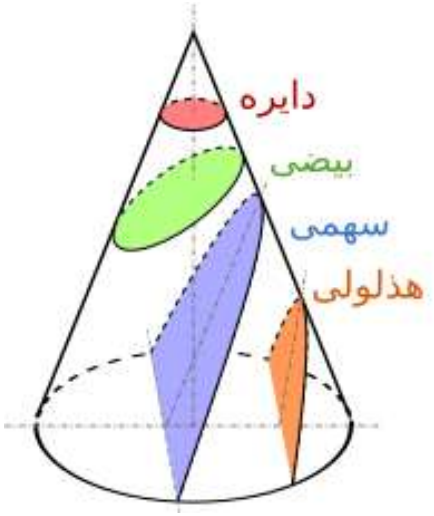
$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta$$

معادلهٔ یک مقطع مخروطی

2α را پارامتر سهمی

خروج از مرکز

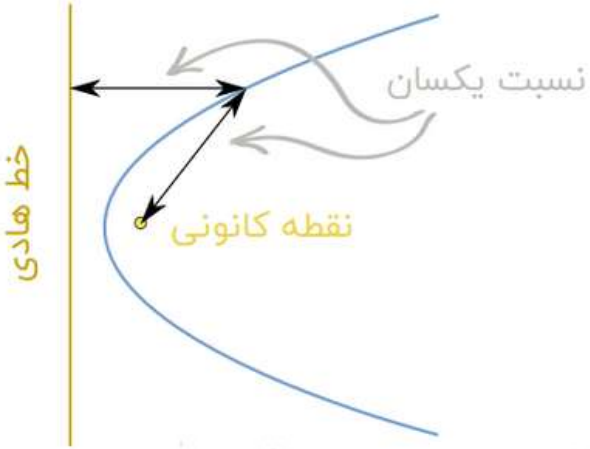
فصل ۷: مقاطع مخروطی



مقطع مخروطی : به خمی گویند که از برخورد یک مخروط و یک صفحه حاصل شود.

این منحنی‌ها را می‌توان با استفاده از یک خط راست **(خط هادی)** و یک نقطه **(نقطه کانونی)** تعریف کرد. هنگامی که فاصله نقطه کانونی تا یک نقطه بر روی یک منحنی و فاصله عمودی خط هادی تا آن نقطه را اندازه‌گیری کنیم، نسبت این دو فاصله همیشه یک نسبت ثابت خواهد بود.

فصل ۷: مقاطع مخروطی



نسبت فواصل در منحنی‌های مختلف به صورت زیر است:

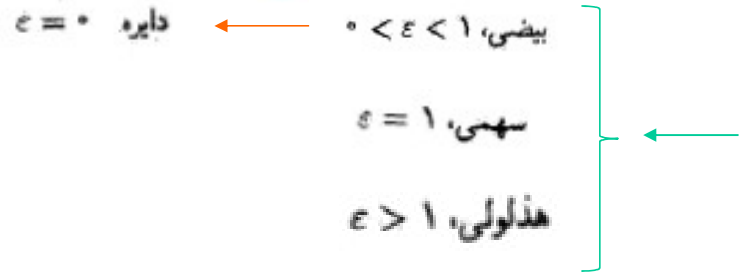
بیضی: نسبت فواصل کوچک‌تر از ۱ است.

سهمی: نسبت فواصل برابر ۱ است؛ بنابراین، فواصل با هم برابر خواهند بود.

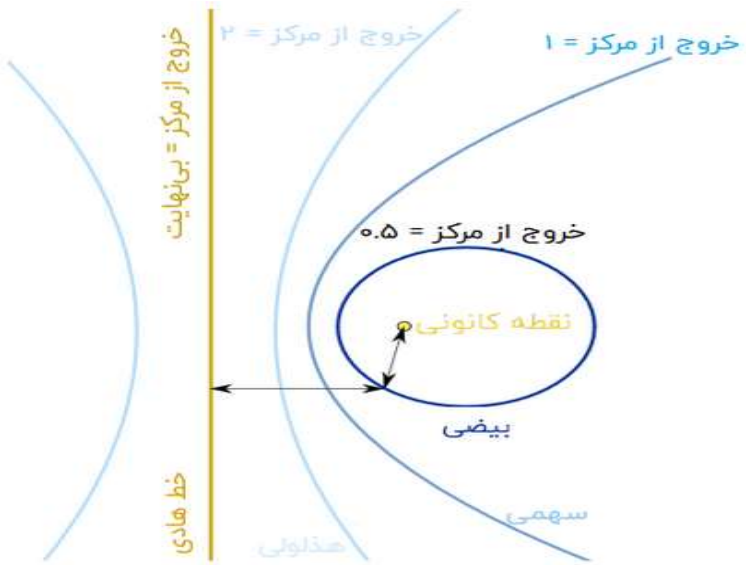
هذلولی: نسبت فواصل بزرگ‌تر از ۱ است.

خروج از مرکز

نسبتی که در بالا به آن اشاره شد، «خروج از مرکز» نام دارد. با توجه به تعریف خروج از مرکز می‌توان گفت: یک مقطع مخروطی، تمام نقاطی است که فاصله آن‌ها تا نقطه کانونی برابر با حاصل‌ضرب خروج از مرکز در فاصله تا خط هادی باشد.



فصل ۷: مقاطع مخروطی



اگر خروج از مرکز،

بین ۰ تا ۱ باشد: مقطع مخروطی، بیضی خواهد بود.

برابر با ۱ باشد: مقطع مخروطی، سهمی خواهد بود.

بزرگ‌تر از ۱ باشد: مقطع مخروطی، هذلولی خواهد بود.

فصل ۷: مقاطع مخروطی

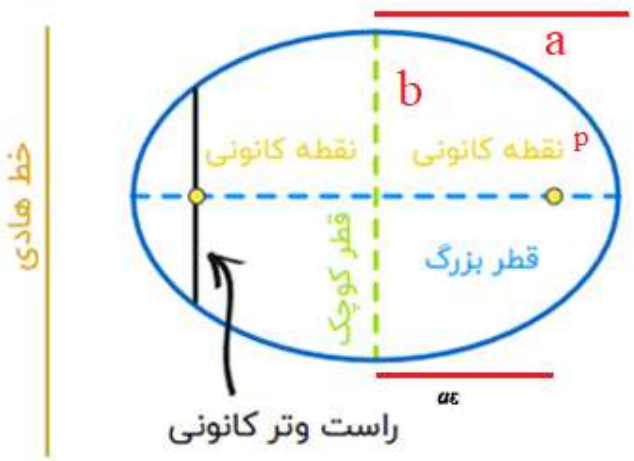
مقادیر گوناگون خروج از مرکز (و از آنرو مقادیر مختلف انرژی E) مدارها را مطابق مقاطع مخروطی مختلف رده‌بندی می‌کنند

هذلولی	$E > 0$	$\varepsilon > 1$,
سهمی	$E = 0$	$\varepsilon = 1$,
بیضی	$V_{min} < E < 0$	$0 < \varepsilon < 1$,
دایره	$E = V_{min}$	$\varepsilon = 0$
غیر مجاز	$E < V_{min}$	$\varepsilon < 0$,

فصل ۷: حرکت سیاره ای و قوانین کپلر

در مورد حرکت سیاره‌ای، مدارها بیضیهایی‌اند که قطرهای بزرگتر و کوچکتر آنها (به ترتیب، برابر با $2a$ و $2b$) با روابط زیر مشخص می‌شوند.

$$a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$$
$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$



فواصل حضیض و اوج (r_{min} و r_{max} که از کانونها تا مدار اندازه‌گیری شده‌اند) چنین به‌دست می‌آیند

$$r_{min} = a(1-\varepsilon) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$$
$$r_{max} = a(1+\varepsilon) = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$

فصل ۷: حرکت سیاره ای و قوانین کپلر

برای یافتن دورهٔ تناوب مربوط به حرکت بیضوی، معادلهٔ زیر را برای سرعت سطحی بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.}$$

$$dt = \frac{2\mu}{l} dA$$

از آنجا که مساحت کُل بیضی، A، در یک دورهٔ کامل، τ، جاروب می‌شود

$$\int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA$$

$$\tau = \frac{2\mu}{l} A$$

مساحت بیضی عبارت است از $A = \pi ab$ و با استفاده از مقادیر a و b می‌رسیم به

$$a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$$

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$\tau = \frac{2\mu}{l} \times \pi ab = \frac{2\mu}{l} \times \pi \times \frac{k}{2|E|} \times \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$= \pi k \sqrt{\mu/2} \times |E|^{-\frac{3}{2}}$$

نصف قطر کوچکتر را می‌شود چنین می‌توان نوشت

$$b = \sqrt{\alpha a}$$

بنابراین، از آنجا که $\alpha = l^2/\mu k$، دورهٔ تناوب τ را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3$$

قانون سوم کپلر

از آنجا که نیروی گرانشی از عبارت زیر به‌دست می‌آید

$$F(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

$$k = Gm_1 m_2$$

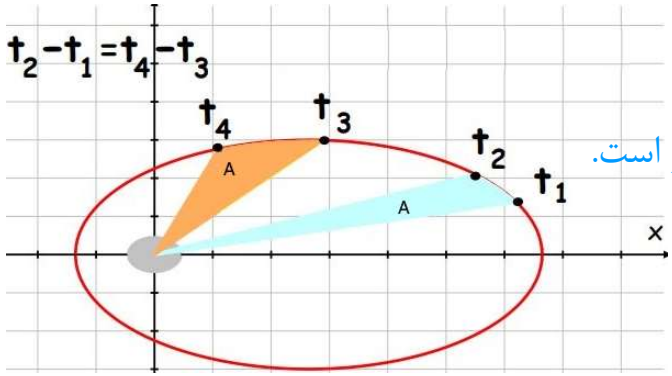
$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \cong \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_2}, \qquad m_1 \ll m_2$$

قوانین کپلر

قانون اول کپلر

قانون اول کپلر بیان می‌کند که مسیر طی شده توسط یک سیاره، به صورت بیضی، سهمی، هذلولی یا دیگر مقاطع مخروطی است که جسمِ مرکز (برای نمونه خورشید) در یکی از کانون‌های آن قرار می‌گیرد.

قانون دوم کپلر



قانون دوم کپلر بیان می‌کند که مساحت جارو شده توسط سیاره در دو بازه زمانی برابر، مقداری برابر است.

قانون سوم کپلر یا قانون هارمونیک

نسبت مجذور زمان تناوب گردش دو سیاره برابر است با نسبت مکعب نیم قطر طول آنها

فصل ۷: حرکت سیاره ای و قوانین کپلر

مثال:) دنباله‌دار هالی، که اخیراً در ۱۹۸۶ از کنار خورشید گذر کرد، در مدار بیضوی بزرگی با خروج از مرکز ۰٫۹۶۷ و دورهٔ تناوب ۷۶ سال حرکت می‌کند. بیشینه و کمینه فواصل آن را از خورشید محاسبه کنید.

دورهٔ تناوب حرکت و نصف قطر بزرگتر توسط معادلهٔ به هم مربوط می‌شوند.

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \cong \frac{4\pi^2 a^3}{G m_2}, \qquad m_1 \ll m_2$$

$$a = \left(\frac{G m_{\text{خورشید}} \tau^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[\frac{\left(6{,}67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right)(1{,}99 \times 10^{30}\text{kg})\left(76\text{y}\frac{365\text{d}}{\text{y}}\frac{24\text{h}}{\text{d}}\frac{3600\text{s}}{\text{h}}\right)^2}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$a = 2{,}68 \times 10^{12}\text{m}$$

فصل ۷: حرکت سیاره ای و قوانین کپلر

$$r_{min} = a(1-\varepsilon) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$$
$$r_{max} = a(1+\varepsilon) = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$

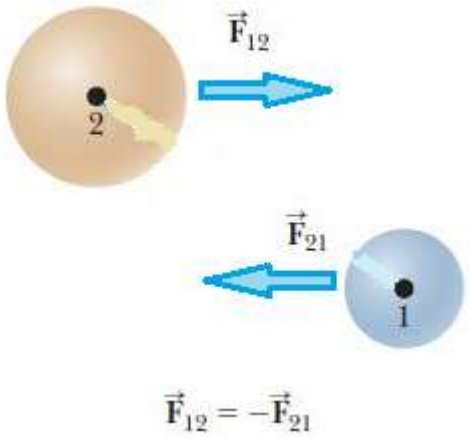
$$r_{min} = ۲٫۶۸ \times ۱۰^{۱۲}\,m(۱ - ۰٫۹۶۷) = ۸٫۸ \times ۱۰^{۱۰}\,m$$
$$r_{max} = ۲٫۶۸ \times ۱۰^{۱۲}\,m(۱ + ۰٫۹۶۷) = ۵٫۲۷ \times ۱۰^{۱۲}\,m$$

فصل ۸ :دینامیک سیستم ذرات



فصل ۸ :دینامیک سیستم ذرات

اگر سیستم از N ذره تشکیل شده باشد، هر یک از ذرات، علاوه بر نیروهایی که از طرف محیط به آن‌ها وارد می‌شود، تحت تأثیر N-1 ذره دیگر هم قرار می‌گیرد. نیروی مبادله شده بین هر جفت ذره از ذرات تشکیل دهندهٔ سیستم، معمولاً به فاصله دو ذره از هم وابسته‌است.

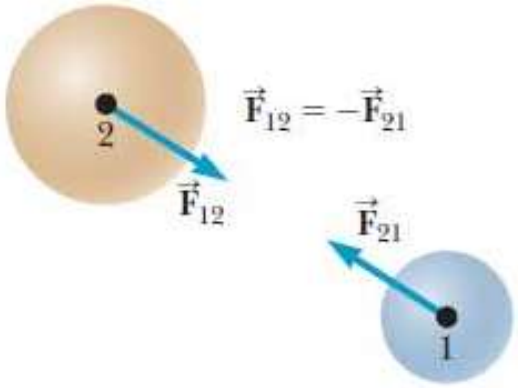


قانون سوم: هر گاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیرویی برابر انرژی پتانسیل یا جنبشیِ ذخیره در خود و در جهت مخالف نیروی جسم اول به جسم اول وارد می‌کند.

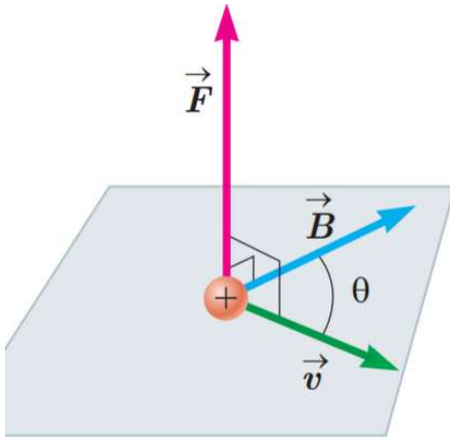
قانون سوم نیوتن معمولاً به دو شکل بیان می‌شود: شکل ضعیف و شکل قوی. در شکل ضعیف تنها به این اکتفا می‌شود که نیروی واکنش قرینهٔ نیروی کنش است یعنی $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$ (شاخص‌های پایین معرف آن است که نیرو از جسم ۱ به جسم ۲ وارد می‌شود یا برعکس).

فصل ۸ :دینامیک سیستم ذرات

اما در شکل قوی علاوه‌بر این فرض می‌شود که این نیروها در امتداد خط و اصل میان دو ذره می‌باشند یعنی $\vec{F}_{1\to 2} \propto (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.



به عنوان مثال نیروهای وابسته به سرعت، نیروی مغناطیسی



فصل ۸ :مرکز جرم

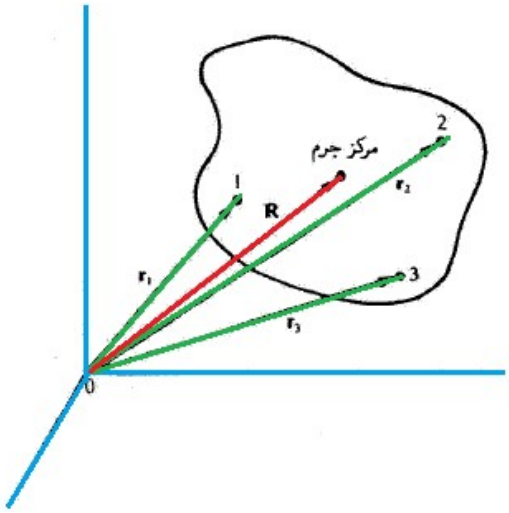
سیستمی متشکل از n ذره را در نظر بگیرید، جرم هر ذره با m_α نشان داده می‌شود، که شاخص زیرین α از $\alpha = 1$ تا $\alpha = n$ تغییر می‌کند. جرم کل سیستم، M، عبارت است از

$$M = \sum_\alpha m_\alpha$$

اگر $\mathbf{r}_\alpha$ عبارت باشد از برداری که مبدأ مختصات را به ذرهٔ αام متصل می‌کند، در آن صورت برداری که مکان مرکز جرم سیستم را تعریف می‌کند، عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha$$

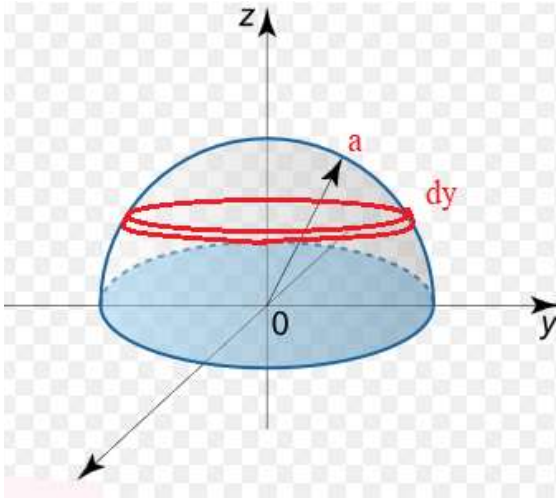
در مورد توزیع پیوستهٔ جرم، علامت انتگرال به جای مجموع‌یابی می‌نشیند



$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm$$

فصل ۸ :مرکز جرم

تعریف موضع مرکز جرم هر جسم منحصر به فرد است، اما بردار مکان **R** به دستگاه مختصات انتخابی بستگی دارد. اگر در شکل مبدأ را در جای دیگری انتخاب می‌کردیم، بردار **R**، بردار متفاوتی بود .



مثال: مرکز جرم نیمکره‌ای جامد با چگالی ثابت را بیابید.

حل: : فرض کنید که چگالی نیمکره ρ، جرم آن M، و شعاعش a باشد.

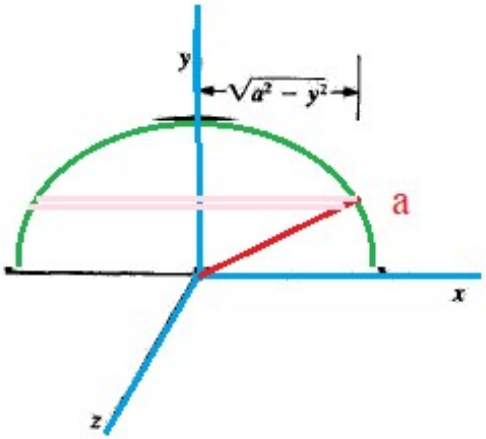
$$\rho = \frac{M}{\frac{2}{3}\pi a^3}$$

با توجه به تقارن داریم:

$$X = \frac{1}{M}\int_{-a}^{a} x\,dm = 0$$

$$Z = \frac{1}{M}\int_{-a}^{a} z\,dm = 0$$

زیرا، روی توان فرد متغیر با حدود متقارن، انتگرال می‌گیریم. ولی، این حدود در مورد Y نامتقارن است.



$$Y = \frac{1}{M}\int_{0}^{a} y\,dm$$

$$dm = \rho dV = \rho\pi(a^2 - y^2)dy$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_{0}^{a} \rho\pi y(a^2 - y^2)dy$$

$$Y = \frac{\pi\rho a^4}{4M} = \frac{3a}{8}$$

مکان مرکز جرم عبارت است از $(0, 3a/8, 0)$.

فصل ۸ :تکانه خطی سیستم

تکانه خطی یک سیستم بس ذره‌ای (سیستم متشکل از دو یا چند ذره) به صورت حاصل جمع تکانه‌های خطی تک تک ذرات تشکیل دهنده سیستم تعریف می‌شود:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_N\mathbf{v}_N$$

$$M\mathbf{V}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_N\mathbf{v}_N \longrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}_{cm} = M\mathbf{V}_{cm}$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان، قانون دوم نیوتون برای سیستم بس ذره‌ای به شکل حاصل می‌شود:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt}$$

فصل ۸ :تکانه خطی سیستم

در یک سیستم N ذره‌ای، هر یک از ذرات تشکیل دهنده، هم تحت تاءثیر محیط و هم تحت تاءثیر $(N-1)$ ذرهٔ دیگر (همهٔ ذرات سیستم به جز خودش) است.

پس هر ذره، علاوه بر نیروهایی که از طرف محیط سیستم به آن وارد می‌شود، $(N-1)$ نیرو از $(N-1)$ ذرهٔ داخل سیستم دریافت می‌کند.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{ext} + (\mathbf{f}_{1\to i}^{int} + \mathbf{f}_{2\to i}^{int} + \cdots + \mathbf{f}_{(i-1)\to i}^{int} + \mathbf{f}_{(i+1)\to i}^{int} + \cdots + \mathbf{f}_{N\to i}^{int})$$

در این معادله، $\mathbf{f}_i^{ext}$ برآیند نیروهای خارجی وارد شده به ذرهٔ iام و $\mathbf{f}_{j\to i}^{int}$ نیروی وارد شده از ذرهٔ j ام به ذرهٔ i ام هستند.

در نتیجه، در محاسبهٔ نیروی کل وارد بر کل سیستم N ذره‌ای، علاوه بر نیروهای خارجی، N نیروی داخلی هم داریم که دو به دو همدیگر را حذف می‌کنند؛ بنابراین،

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i^{ext} = \mathbf{f}_1^{ext} + \mathbf{f}_2^{ext} + \cdots + \mathbf{f}_N^{ext}$$

فصل ۸ :تکانه خطی سیستم

یعنی این که، نیروهای داخلی سیستم اثری بر رفتار کل سیستم ندارند و در مطالعه دینامیک سیستم کافی است فقط نیروهای خارجی را در نظر بگیریم

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{cm}}{\mathrm{d}t}$$

مرکز جرم هر سیستم چنان حرکت می‌کند که گویی تک ذره‌ای است با جرمی برابر جرم کل سیستم، و نیرویی برابر با کل نیروی خارجی بر آن اثر می‌کند، و حرکتش مستقل از ماهیت نیروهای داخلی است (البته این تعبیر تا زمانی معتبر است که این نیروها از صورت ضعیف قانون سوم نیوتون، $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$، پیروی می‌کنند).

فصل ۸ :تکانه خطی سیستم

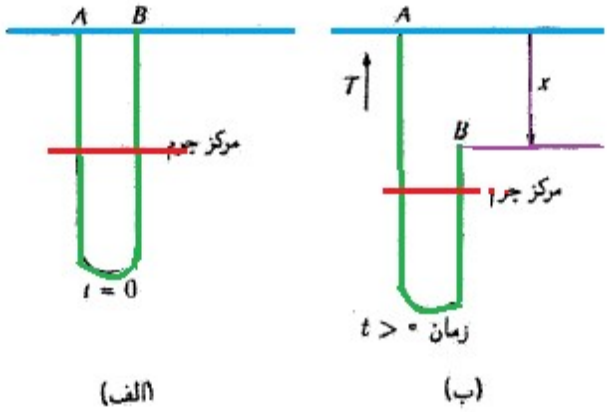
به این ترتیب، اگر نیروی خارجی وجود نداشته باشد تکانهٔ خطی کل پایسته است.

تکانهٔ خطی کل هر سیستم فارغ از تأثیر نیروهای خارجی ثابت، و برابر است با تکانهٔ خطی مرکز جرم (قانون پایستگی تکانهٔ خطی سیستم).

تکانهٔ خطی سیستم چنان است که گویی تک ذره‌ای به جرم M در موقعیت مرکز جرم قرار گرفته و به همان ترتیبی حرکت می‌کند که مرکز جرم حرکت می‌کند.

فصل ۸ :تکانه خطی سیستم

مثال: طنابی با چگالی یکنواخت به طول b و جرم M، مطابق شکل ۴.۸، آویخته شده است. در لحظهٔ $t = 0$، دو سر A و B در کنار همدیگر قرار می‌گیرند، اما سر B رها می‌شود. بعد از اینکه سر B به اندازهٔ x سقوط کرده است، کشش طناب در نقطهٔ A را پیدا کنید.



(الف) (ب)

تکانه مرکز جرم برابر است با:

$$\dot{P} = Mg - T$$

قائم بر نقطهٔ A وارد می‌آید، و نیروی گرانشی Mg که طناب را به پایین می‌کشد. تکانهٔ مرکز جرم نسبت به این نیروها به‌صورت زیر عکس‌العمل نشان می‌دهد

$$P = \left(\frac{M}{b}\right)\left(\frac{b-x}{2}\right)\dot{x}$$

$$\dot{P} = \frac{M}{2b}[-\dot{x}^2 + \ddot{x}(b-x)]$$

چون $x = \frac{1}{2}gt^2$ داریم

$$\dot{x} = gt = \sqrt{2gx}$$

$$\ddot{x} = g$$

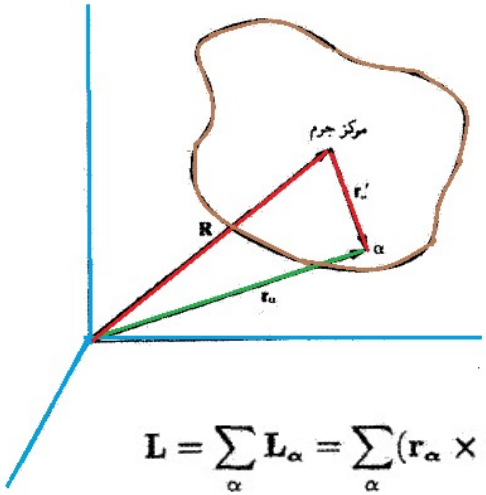
$$\dot{P} = \frac{M}{2b}(gb - 2gx) = Mg - T$$

$$T = \frac{Mg}{2}\left(\frac{2x}{b} + 1\right)$$

فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

اغلب اوقات بهتر است که سیستم را به کمک یک بردار مکان نسبت به مرکز جرم توصیف کنیم.

بردار مکان $\mathbf{r}_\alpha$ در چارچوب مرجع لخت چنین می‌شود



$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_\alpha$$

$$\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha$$

تکانهٔ زاویه‌ای ذرهٔ αام حول مبدأ طبق معادلهٔ عبارت است از

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha \mathbf{L}_\alpha = \sum_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \sum_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha)$$
$$= \sum_\alpha (\mathbf{r}'_\alpha + \mathbf{R}) \times m_\alpha (\dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \dot{\mathbf{R}})$$
$$= \sum m_\alpha [(\mathbf{r}'_\alpha \times \dot{\mathbf{r}}'_\alpha) + (\mathbf{r}'_\alpha \times \dot{\mathbf{R}}) + (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{r}}'_\alpha) + (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})]$$

$$\left(\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha\right) \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha\right)$$

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}) = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R} \sum_\alpha m_\alpha$$

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} \equiv 0$$

فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

در نتیجه داریم:

تکانهٔ زاویه‌ای کل حول مبدأ برابر است با مجموع تکانهٔ زاویه‌ای مرکز جرم حول مبدأ و تکانهٔ زاویه‌ای سیستم حول موقعیت مرکز جرم.

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{p}'_{\alpha} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{p}'_{\alpha}$$

مشتق زمانی تکانه زاویه‌ای ذرهٔ αام برابر است با

$$\dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha}) = \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \left(\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta}\right)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha,\beta\neq\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta})$$

فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

جمله آخر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{f}_{\alpha\beta})=\sum_{\alpha<\beta}[(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{f}_{\alpha\beta})+(\mathbf{r}_\beta\times\mathbf{f}_{\beta\alpha})]$$

بنابر تعریف، $\mathbf{r}_{\alpha\beta}\equiv\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta$

$\mathbf{f}_{\alpha\beta}=-\mathbf{f}_{\beta\alpha}$

$$\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{f}_{\alpha\beta})=\sum_{\alpha<\beta}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta)\times\mathbf{f}_{\alpha\beta}$$
$$=\sum_{\alpha<\beta}\mathbf{r}_{\alpha\beta}\times\mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

اکنون می‌خواهیم دامنهٔ بحث را به نیروهای داخلی مرکزی محدود کنیم و صورت «قوی» قانون سوم نیوتون را به کار گیریم. از آنجا که $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ در همان راستای $\pm\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ است و

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta}\times\mathbf{f}_{\alpha\beta}\equiv 0$$

$$\dot{\mathbf{L}}=\sum_\alpha[\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{F}_\alpha^{(e)}]$$

$$\dot{\mathbf{L}}=\sum_\alpha\mathbf{N}_\alpha^{(e)}=\mathbf{N}^{(e)}$$

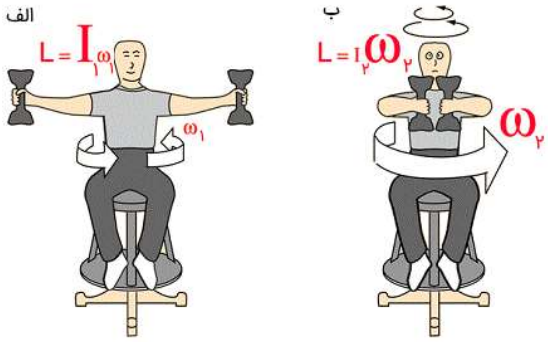
فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

اگر برایند خالص گشتاور نیروهای خارجی حول محور مفروضی صفر شود، در آن صورت تکانهٔ زاویه‌ای کل سیستم حول آن محور نسبت به زمان ثابت می‌ماند.

اگر نیروهای داخلی مرکزی باشند، یعنی $f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha}$، گشتاور نیروی داخلی کل باید صفر شود و تکانه زاویه‌ای سیستم منزوی را نمی‌توان بدون اعمال نیروهای خارجی تغییر داد.

فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

مثال) ورزشکاری را تصور کنید که روی یک صندلی با سرعت ۵۴۰ درجه در ثانیه به دور خود می‌چرخد. ناگهان این شخص دستان خود را به نحوی جمع می‌کند که لختی دورانی او ۲/۳ برابر می‌شود. در این حالت سرعت زاویه ای این ورزشکار را بیابید؟

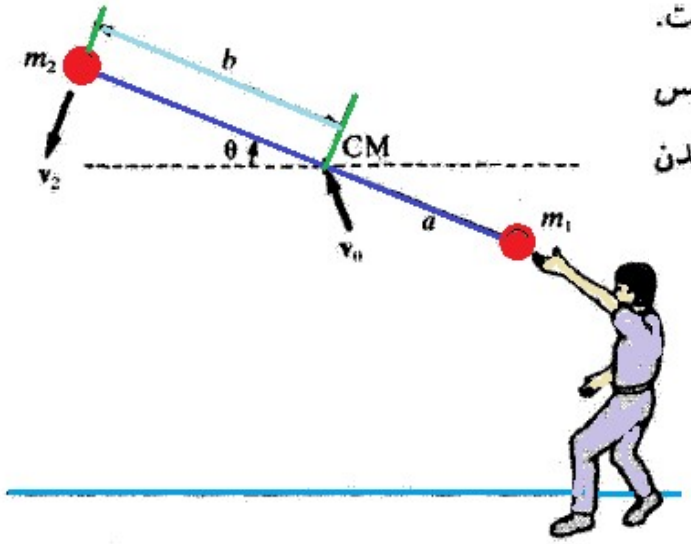


از آنجایی که تکانه زاویه ای کل در حالت دست باز و دست بسته، ثابت است، می‌توان گفت:

$$L = I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \longrightarrow L = I_1 \times 540 = \frac{2}{3} I_1\omega_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{3}{2} \times 540 = 760 \ deg/s$$

فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

مثال به دو سر ریسمان سبکی به طول a، دوگوی به جرمهای m_1 و m_2 $(m_2 > m_1)$ متصل است. سر متصل به گوی m_1 را در دست می‌گیریم و به سرعت به دور سر خود می‌چرخانیم و سپس رهایش می‌کنیم. حرکت این گوی را پس از رها کردن تشریح، وکشش ریسمان را پس از رها شدن پیدا کنید.



مرکز جرم آن در فاصلهٔ b از جرم m_2 واقع است.

$$b = [m_1/(m_1 + m_2)]a$$

پس از رها شدن، تنها نیروهای وارد بر سیستم همان نیروهای گرانشی مؤثر بر m_1 و m_2 هستند.

فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

فرض کنید v_0 سرعت اولیهٔ مرکز جرم،CM، باشد. مرکز جرم،تحت تأثیر گرانی چنان مسیر سهموی را می‌پیماید که گویی تمامی جرم $(m_1 + m_2)$ در CM متمرکز است. اما وقتی رها می‌شود، جرم m_2 به سرعت حول جرم m_1 به چرخش در می‌آید. چون هیچ گشتاور نیروی خارجی در کار نیست، سیستم به چرخش خود ادامه می‌دهد.

$\mathbf{v}_2 \longrightarrow$ سرعت خطی جرم m_2

$v_1 = (a-b)\dot{\theta}$ $\quad$ $v_2 = b\dot{\theta}$

اکنون هم m_1 و هم m_2 حول CM می‌چرخند، و تکانهٔ زاویه‌ای پایسته است.

$$\text{کشش} = m_2 b\dot{\theta}^2 = m_2\left(\frac{m_1 a}{m_1+m_2}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{m_1 m_2 a\dot{\theta}^2}{m_1+m_2}$$

$$\text{کشش} = \text{نیروی مرکز گریز} = \frac{m_2(b\dot{\theta})^2}{b}$$

کاری که روی سیستم برای تغییر پیکربندی از حالت ۱ به ۲ برابر است:

$$W_{12} = \sum_\alpha \int_1^2 \mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{r}_\alpha \quad \longleftrightarrow \quad W_{12} = \sum \int_1^2 d\left(\tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2\right) = T_2 - T_1$$

$\mathbf{F}_\alpha$ برایند نیروی خالص وارد بر ذرهٔ α

$$T = \sum_\alpha T_\alpha = \sum_\alpha \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \dot{\mathbf{R}}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha = v_\alpha^2 &= (\dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \dot{\mathbf{R}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \dot{\mathbf{R}}) \\
&= (\dot{\mathbf{r}}'_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}'_\alpha) + 2(\dot{\mathbf{r}}'_\alpha \cdot \dot{\mathbf{R}}) + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) \\
&= v_\alpha'^2 + 2(\dot{\mathbf{r}}'_\alpha \cdot \dot{\mathbf{R}}) + V^2
\end{aligned}$$

V سرعت مرکز جرم است.

$$\mathbf{v}' \equiv \dot{\mathbf{r}}'$$

بنابراین

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha'^2 + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha V^2 + \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{d}{dt} \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha \quad \longrightarrow \quad \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha = 0$$

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha'^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با مجموع انرژی جنبشی یک ذره به جرم M که با سرعت مرکز جرم حرکت می‌کند و انرژی جنبشی حرکت تک تک ذرات نسبت به مرکز جرم.

در مرحلهٔ بعد، نیروی کل از هم جدا کرد:

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha}$$

اگر نیروهای $\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}$ و $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ پایستار باشند،

$$\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} = -\nabla_{\alpha} U_{\alpha}$$

$$\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\nabla_{\alpha} \overline{U}_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} = -\sum_{\alpha} \int_1^2 (\nabla_{\alpha} U_{\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_{\alpha}$$

$$= -\sum_{\alpha} U_{\alpha} \Big|_1^2$$

$$\sum_{\alpha,\beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha<\beta} \int_1^2 (\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\beta\alpha} \cdot d\mathbf{r}_{\beta})$$

$$= \sum_{\alpha<\beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_{\alpha} - d\mathbf{r}_{\beta}) = \sum_{\alpha<\beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha\beta}$$

$$d\mathbf{r}_{\alpha\beta} = d\mathbf{r}_{\alpha} - d\mathbf{r}_{\beta}$$

چون $\overline{U}_{\alpha\beta}$ فقط تابعی از فاصلهٔ بین m_α و m_β است، بنابراین به شش کمیت بستگی دارد—یعنی، سه مختصهٔ $(x_{\alpha,i})m_\alpha$ و سه مختصهٔ $(x_{\beta,i})m_\beta$. بنابراین مشتق کامل $\overline{U}_{\alpha\beta}$ برابر مجموع شش مشتق جزئی است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$d\overline{U}_{\alpha\beta} = \sum_i \left(\frac{\partial \overline{U}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha,i}} dx_{\alpha,i} + \frac{\partial \overline{U}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta,i}} dx_{\beta,i} \right) \longrightarrow d\overline{U}_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\nabla}_\alpha \overline{U}_{\alpha\beta}) \cdot d\mathbf{r}_\alpha + (\boldsymbol{\nabla}_\beta \overline{U}_{\alpha\beta}) \cdot d\mathbf{r}_\beta$$

$$\boldsymbol{\nabla}_\alpha \overline{U}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\alpha\beta} \quad \text{و} \quad \overline{U}_{\alpha\beta} = \overline{U}_{\beta\alpha}$$

پس داریم:

$$\boldsymbol{\nabla}_\beta \overline{U}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\nabla}_\beta \overline{U}_{\beta\alpha} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha} = \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

بنابراین

$$d\overline{U}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_\alpha - d\mathbf{r}_\beta)$$
$$= -\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_\alpha = -\sum_{\alpha<\beta} \int_1^2 d\overline{U}_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha<\beta} \overline{U}_{\alpha\beta}\Big|_1^2$$

از ترکیب معادلات برای محاسبهٔ W_{12} خواهیم یافت

$$W_{12} = -\sum_\alpha U_\alpha\Big|_1^2 - \sum_{\alpha<\beta} \overline{U}_{\alpha\beta}\Big|_1^2$$

در این حالت، انرژی پتانسیل کل سیستم (هم داخلی و هم خارجی) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$U = \sum_{\alpha} U_{\alpha} + \sum_{\alpha<\beta} U_{\alpha\beta} \longrightarrow W_{12} = -U\Big|_{1}^{2} = U_1 - U_2$$

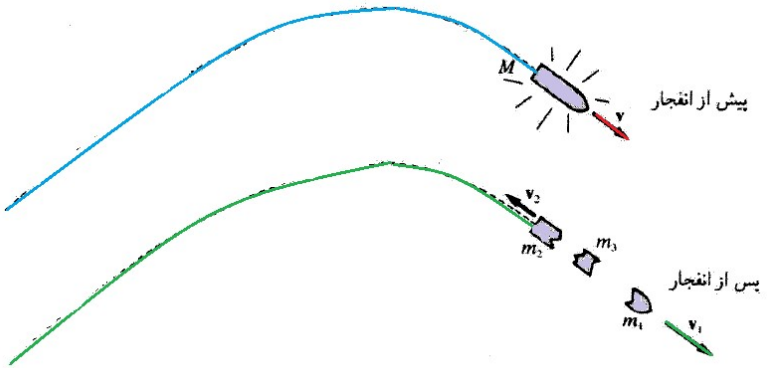
خواهیم داشت

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \longrightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$E_1 = E_2$$

انرژی کل هر سیستم پایستار ثابت است.

فصل ۸ : انرژی سیستم



مثال پرتابه‌ای به جرم M در خلال پرواز منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود یکی از این پاره‌ها به جرم $m_۱(= M/۲)$، در راستای اولیهٔ حرکت پرتابه به حرکت در می‌آید، دیگری به جرم $m_۲(= M/۶)$، در راستای عکس حرکت می‌کند، و سوّمی هم به جرم $m_۳(= M/۳)$، به حال سکون در می‌آید. انرژی آزاد شده در انفجار، E، پنج برابر انرژی جنبشی پرتابه در هنگام انفجار است. سرعت هر یک از این پاره‌ها چقدر است؟

حل: سرعت پرتابه به جرم M برابر $\mathbf{v}$

$$m_۱ = \frac{M}{۲}, \mathbf{v}_۱ = k_۱\mathbf{v} \qquad k_۱ > ۰ \text{، به سمت جلو}$$

$$m_۲ = \frac{M}{۶}, \mathbf{v}_۲ = -k_۲\mathbf{v} \qquad k_۲ > ۰ \text{، به سمت عقب}$$

$$m_۳ = \frac{M}{۳}, \mathbf{v}_۳ = ۰ \qquad \text{در حالت سکون}$$

بنابر پایستگی تکانهٔ خطی و انرژی خواهیم داشت

$$Mv = \frac{M}{۲}k_۱v - \frac{M}{۶}k_۲v$$

$$E + \frac{۱}{۲}Mv^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{M}{۲}(k_۱v)^۲ + \frac{۱}{۲}\frac{M}{۶}(k_۲v)^۲$$

$$۵\left(\frac{۱}{۲}Mv^۲\right) + \frac{۱}{۲}Mv^۲ = \frac{Mv^۲}{۴}k_۱^۲ + \frac{Mv^۲}{۱۲}(۳k_۱ - ۶)^۲$$

$$\Rightarrow k_۱^۲ - ۳k_۱ = ۰$$

$$k_۱ = ۰ \longrightarrow k_۲ = -۶$$

$$k_۱ = ۳ \longrightarrow k_۲ = ۳$$

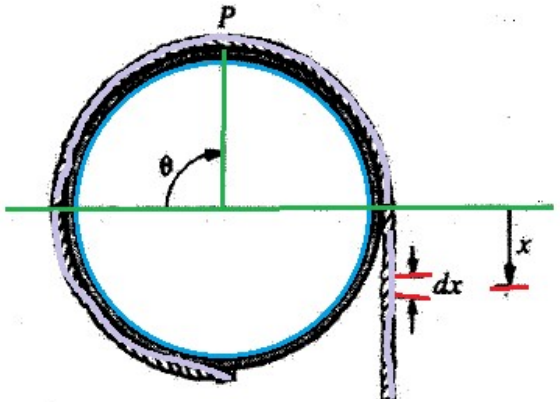
سرعت هر یک از پاره‌ها عبارت خواهند بود از

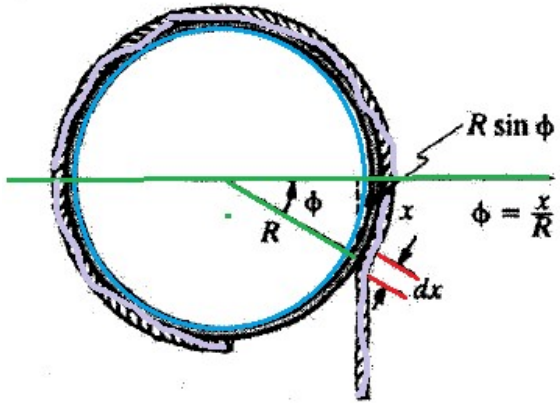
$$\mathbf{v}_۱ = ۳\mathbf{v}$$
$$\mathbf{v}_۲ = -۳\mathbf{v}$$
$$\mathbf{v}_۳ = ۰$$

فصل ۸ :تکانه زاویه ای سیستم

مثال

طنابی به چگالی طولی (خطی) یکنواخت ρ و جرم m یک دور کامل به دور استوانه‌ای توخالی به جرم M و شعاع R پیچیده شده است. همراه با باز شدن طناب، استوانه آزادانه حول محور خودش می‌چرخد وقتی نقطهٔ P در $\theta = 0$ واقع است و سیستم قدری از تعادل در حال سکون خود خارج شده است، هر دو انتهای طناب در $x = 0$ قرار دارند (یکی ثابت و دیگری آزاد است). سرعت زاویه‌ای استوانه را پیدا کنید.





$$dx \text{ مسافت طی‌شده توسط} = x - R\sin\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$\text{کار انجام شده} = (\rho dx)g\left[x - R\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right]$$

کل کار انجام شده توسط گرانش در بازکردن طناب برابر است با

$$W = \int_{۰}^{R\theta} \rho g \left[x - R\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right] dx$$
$$= \rho g R^{۲}\left(\frac{\theta^{۲}}{۲} + \cos\theta - ۱\right)$$

کار انجام شده توسط گرانش باید با انرژی جنبشی که طناب و استوانه به‌دست می‌آورند، برابر باشد

$$T = \frac{۱}{۲}m(R\dot{\theta})^{۲} + \frac{۱}{۲}M(R\dot{\theta})^{۲}$$

$$\rho = m/(۲\pi R) \text{ و } W = T$$

$$\frac{mgR}{۲\pi}\left[\frac{\theta^{۲}}{۲} + \cos^{۲}\theta - ۱\right] = \frac{۱}{۲}(m+M)R^{۲}\dot{\theta}^{۲}$$

$$\dot{\theta}^{۲} = \frac{mg(\theta^{۲} + ۲\cos^{۲}\theta - ۲)}{۲\pi R(m+M)}$$

فصل ۸ :برخورد

هنگامی که دو جسم با تکانه های متفاوت به یکدیگر برخورد می کنند تکانه ی خالص در آن ها تغییر نمی کند .

هر گاه دو جسم با هم برخورد کنند، در صورتی که با هم یک تک سیستم تلفیقی شوند، نیرویی که هر کدام در خلال تماس بر دیگری وارد می‌آورد، نیرویی داخلی است. تکانه‌ی خطی کل بدون تغییر باقی می‌ماند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

با توجه به قانون پایستگی انرژی می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v'_2}^2 + Q$$

بر کاهش یا افزایش خالص انرژی جنبشی, ناشی از برخورد، دلالت کند.

فصل ۸ :برخورد

در حالت برخورد کشسان، انرژی جنبشی کل تغییر نمی‌کند، از این رو Q = ۰ است. اگر کاهش انرژی پیش بیاید، در این صورت Q مثبت است و این برخورد را **انرژی‌زا** (گرمازا) می‌گویند. اما اگر اتفاقا بر اثر برخورد انرژی تولید شود، مثلاً هرگاه برخوردی انفجاری روی یکی از اجسام پیش آید، در این حالت Q منفی است و برخورد **انرژی‌گیر** (گرماگیر) خواهد بود.

برخورد مستقیم (یک بعدی)

حالت خاص برخورد رو در روی دو جسم یا ذره، را که در آن حرکت کاملاً بر یک خط مستقیم صورت می‌گیرد، در نظر می‌گیریم.

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

در صورت پایستگی انرژی جنبشی

در صورت پایسته نبودن انرژی جنبشی

$$\epsilon = \frac{|v'_2 - v'_1|}{|v_2 - v_1|} = \frac{v'}{v}$$

ϵ به نام ضریب بازگشت

در حالت **برخورد کشسان**, مقدار $\epsilon = 1$ می‌باشد و در آن $Q = 0$ است، که قبلاً بررسی شد.
در حالت **برخورد کاملاً ناکشسان**, دو جسم بعد از برخورد به هم می‌چسبند، به طوری که $\epsilon = 0$ است.

در مورد اکثر اجسام حقیقی مقدار ϵ بین دو مقدار ۰ و ۱ است.

حال می‌توانیم مقادیر سرعت نهایی را محاسبه کنیم. نتیجه عبارت خواهد بود از:

$$v_1' = \frac{(m_1 - \epsilon m_2)v_1 + (m_2 + \epsilon m_2)v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_1 + \epsilon m_1)v_1 + (m_2 - \epsilon m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

فصل ۸ :ضربه در برخورد

نیروهایی فوق‌العاده کوتاه مدت که تحت برخورد وارد می‌شود نیروهای ضربه‌ای نامیده می‌شوند. اگر بازه زمانی برخورد از t۱ تا t۲ باشد (این بازه زمانی عبارت است از مدت زمانی که در خلال آن نیروی مورد نظر وارد می‌آید)، و نیرویی که در حین برخورد اعمال شده F باشد در این صورت ضربه که آن را با J نشان می‌دهیم چنین بیان می‌شود:

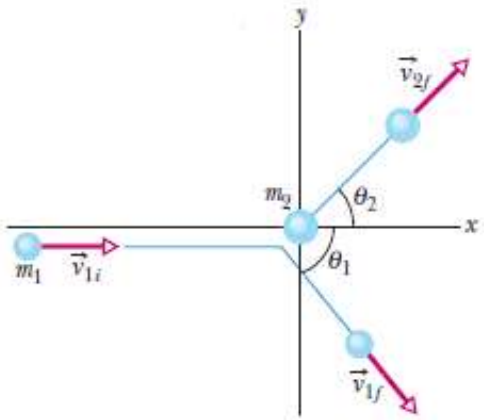
$$J = \Delta(m\mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt$$

یکای اس‌آی ضربه نیوتون-ثانیه (N.s) است و با توجه به اینکه $1N = 1\frac{kg.m}{s^2}$ بنابراین یکای دیگر ضربه kg.m/s خواهد بود که همان یکای تکانه است.

فصل ۸ :برخورد

برخورد مایل (دو بعدی)

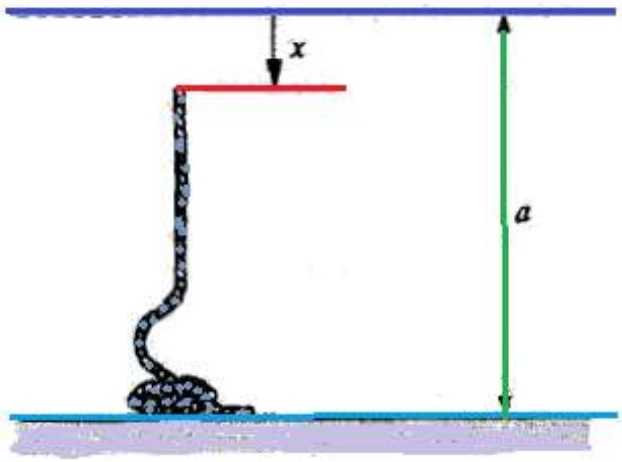
برخورد مایل زمانی رخ می‌دهد که مرکز جرم دو جسم برخورد کننده در یک راستا نباشند، مانند توپ‌ها در بازی بیلیارد. در این حالت با توجه به اینکه نیروهای ضربه‌ای فوق‌العاده بزرگ‌اند می‌توان از سایر نیروهای وارد بر دو جسم چشم‌پوشی کرد. در نتیجه تکانه خطی کل پایسته می‌ماند.



$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}. \longrightarrow \begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2, \\ 0 = -m_1 v_{1f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f} \sin\theta_2. \end{cases}$$

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}. \longrightarrow \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

فصل ۸ :برخورد



مثال جرم واحد طول طنابی ρ و طول آن a است؛ این طناب درست بر فراز میزی‌آویخته شده است اگر طناب از حالت سکون در بالا رها شود، نیروی وارد بر میز را در هنگامی محاسبه کنید که طول x از طناب بر روی میز افتاده است.

نیروی گرانشی $mg = \rho x g$

نیروی ضربه‌ای را نیز برای آن به حساب آوریم

$$F = \frac{dp}{dt}$$

در طی فاصله زمانی dt جرمی از طناب مساوی با $\rho(vdt)$ روی میز فرو می‌افتد.

تغییر تکانهٔ وارد بر میز عبارت است از

$$dp = (\rho v dt)v = \rho v^2 dt$$

$$\frac{dp}{dt} = \rho v^{۲} = F_{\text{ضربه‌ای}}$$

سرعت v در زمان t از طریق رابطهٔ $v^{۲} = ۲gx$ با x مربوط می‌شود، زیرا هر جزء از باقیماندهٔ طناب تحت شتاب ثابت g واقع است.

$$F_{\text{ضربه‌ای}} = \rho v^{۲} = ۲\rho g x$$

$$F = F_g + F_{\text{ضربه‌ای}} = ۳\rho x g$$

فصل ۹ :حرکت در دستگاه غیر لخت

چرا طوفان ها می چرخند؟



فصل ۹ :حرکت در دستگاه غیر لخت

دستگاه مرجع یعنی محورهای مختصاتی که حرکت جسم نسبت به آنها سنجیده می‌شود.

دستگاههای مرجعی که در آنها قانون اول نیوتن مشاهده می‌شود، دستگاههای مرجع اینرسیال یا لخت نامیده می‌شوند.

ویژگی این دستگاه شتابدار نبودن آن است. مثلاً در اکثر مواقع زمین را به عنوان یک دستگاه مرجع لخت در نظر می‌گیرند.

در حد آزمایشهایی که روی زمین انجام می‌شود، زمین می‌تواند یک دستگاه مرجع لخت به حساب بیاید امّا در آزمایشهای دقیق‌تر و یا بیرون از سطح زمین این فرض معتبر نیست، چون زمین یک حرکت دورانی حول محور خود و یک حرکت چرخشی دور خورشید دارد.

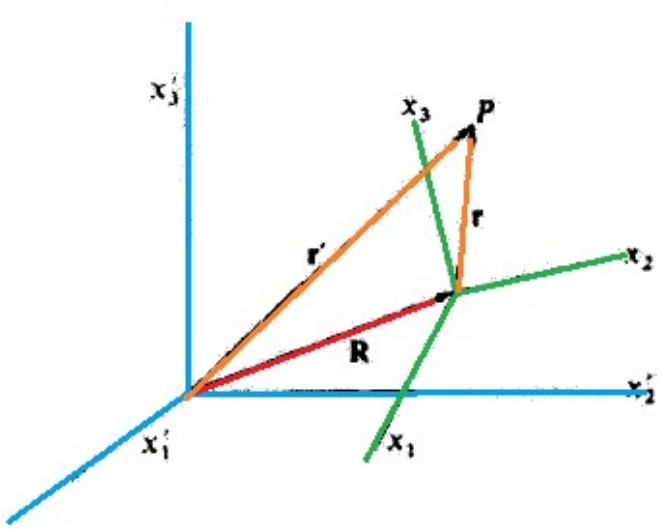
این دو حرکت باعث می‌شود زمین از دید ناظری که مثلاً روی خورشید نشسته یک جسم شتابدار به نظر آید که نمی‌تواند به عنوان مرجع لخت در نظر گرفته شود.
حرکت نسبت به دستگاههای مرجع غیرلخت از قوانینی غیر از قوانین حاکم نسبت به دستگاههای سخت تبعیت می‌کنند. از دید ناظر غیرلخت علل حرکت با علل مشاهده شده در دستگاه مرجع لخت متفاوت است. اگر ناظری داخل دستگاه مرجع غیرلخت باشد برای او سخت است که مدام تعیین کند که حرکت جسم در دستگاه مرجع لخت چگونه است؛ ولی باید تفاوت بین قوانین حرکت در دستگاههای مرجع لخت و غیرلخت را بداند.

فصل ۹ :حرکت در دستگاه غیر لخت

از جمله آزمایشهایی که اثر چرخش زمین را نشان میدهند آونگ فوکو است که نمونهٔ این آونگ در ساختمان دانشکدهٔ فیزیک دانشگاه صنعتی شریف نصب شده است.

در جهان دستگاه مرجع لخت نداریم! اما در مواقع نیاز **میتوان از ستاره های خیلی دور بعنوان دستگاه لخت استفاده کرد** و در واقع این دقیقترین و بهترین انتخاب است.

فصل ۹ : دستگاه مختصات چرخان



دو مجموعه محور مختصات در نظر بگیرید و فرض کنید یک مجموعه «ثابت» یا محورهای لخت باشد، و مجموعهٔ دوم مجموعه‌ای اختیاری است که نسبت به دستگاه لخت در حال حرکت است.

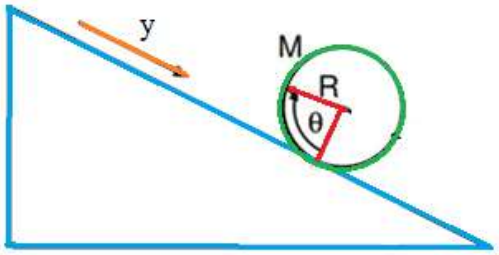
این محورها را به‌ترتیب محورهای «ثابت» و «چرخان» می‌نامیم. مختصات دستگاه ثابت را با نماد x_i و مختصات دستگاه چرخان را با نماد x_i' نشان می‌دهیم.

برای نقطه P داریم:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}$$

در اینجا $\mathbf{r}'$ بردار شعاعی نقطهٔ P در دستگاه ثابت و $\mathbf{r}$ بردار شعاعی P در دستگاه چرخان است. بردار $\mathbf{R}$ موقعیت مبدأ دستگاه چرخان را در دستگاه ثابت معین می‌کند.

فصل ۹ : دستگاه مختصات چرخان



همواره می‌توانیم هر جابه‌جایی بینهایت کوچک دلخواهی را با یک چرخش محض حول محوری که آن را محور لحظه‌ای چرخش می‌نامیم، نمایش دهیم.

مثال : دیسک غلتان روی سطح شیبدار

بنابراین، اگر دستگاه x_i چرخش بینهایت کوچک $\delta\theta$ را انجام دهد، که متناظر با جابه‌جایی بینهایت کوچک دلخواهی است، حرکت نقطه P را (که می‌توان فرض کرد در دستگاه x_i موقتا در حال سکون باشد) می‌شود به صورت زیر نوشت

$$(d\mathbf{r})_{\text{ثابت}} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{برای نقطهٔ ثابت } P \text{ در دستگاه } x_i)$$

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

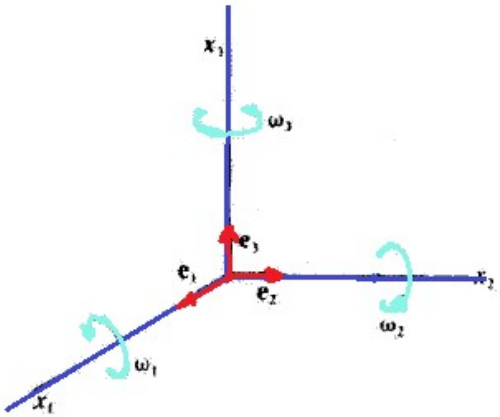
سرعت زاویه‌ای چرخش

فصل ۹ : دستگاه مختصات چرخان

اگر فرض کنیم سرعت نقطهٔ P در دستگاه مختصات x_i عبارت باشد از $(d\mathbf{r}/dt)_{\text{چرخان}}$ ،
این سرعت را باید به $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ افزود تا آهنگ زمانی تغییر $\mathbf{r}$ در دستگاه ثابت به‌دست آید

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

فصل ۹ : دستگاه مختصات چرخان



مثال : بردار $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ را در دستگاه چرخان در نظر بگیرید. فرض کنید دستگاههای ثابت و چرخان مبدأ مشترکی داشته باشند. اگر سرعت زاویه‌ای دستگاه چرخان در دستگاه ثابت $\boldsymbol{\omega}$ باشد، از طریق مشتق‌گیری مستقیم، $\mathbf{r}$ را در دستگاه ثابت پیدا کنید.

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i\mathbf{e}_i\right)$$

$$= \sum_i (\dot{x}_i\mathbf{e}_i + x_i\dot{\mathbf{e}}_i) \quad = \dot{\mathbf{r}}_r + \sum_i x_i\dot{\mathbf{e}}_i$$

$$\dot{\mathbf{r}}_r = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخان}}$$

به شکل نگاه کنید و ببینید که کدام مؤلفهٔ ω_i گرایش به چرخاندن $\mathbf{e}_1$ دارد. می‌بینیم که ω_2 می‌خواهد $\mathbf{e}_1$ را به سوی $-\mathbf{e}_3$ بچرخاند و ω_3 تمایل به چرخاندن $\mathbf{e}_1$ را به سوی $+\mathbf{e}_2$ دارد.

بنابراین، داریم

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \omega_3\mathbf{e}_2 - \omega_2\mathbf{e}_3$$

و به همین ترتیب، داریم

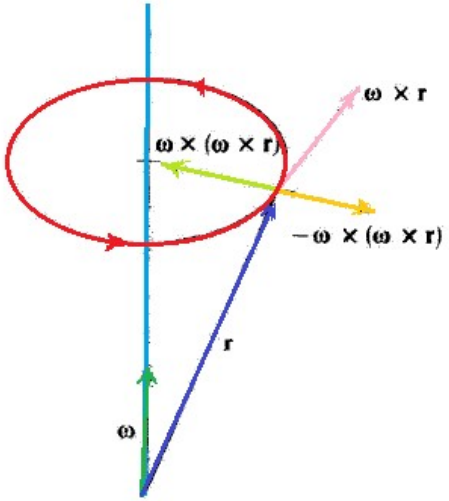
$$\frac{de_2}{dt} = -\omega_2 e_1 + \omega_1 e_2$$
$$\frac{de_2}{dt} = \omega_2 e_1 - \omega_1 e_2$$

$$\dot{e}_i = \omega \times e_i$$

در نتیجه

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \dot{r}_r + \sum_i \omega \times x_i e_i$$
$$= \dot{r}_r + \omega \times r$$

فصل ۹ :سرعت در دستگاه ثابت



اعتبار این عبارت به بردار $\mathbf{r}$ محدود نمی‌شود. در واقع، برای هر بردار دلخواه $\mathbf{Q}$ داریم

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}$$

مثلاً، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ در هر دو دستگاه ثابت و چرخان یکسان است.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

برای محاسبه سرعت در دستگاه ثابت داریم

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} \longrightarrow \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

فصل ۹ :سرعت در دستگاه ثابت

اگر کمیتهای زیر را تعریف کنیم

$\mathbf{v}_f \equiv \dot{\mathbf{r}}_f \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{ثابت}}$

$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}}_f \equiv \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}$

$\mathbf{v}_r \equiv \dot{\mathbf{r}}_r \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخان}}$

$\mathbf{v}_f = \mathbf{V} + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$\mathbf{v}_f$ = سرعت نسبت به محورهای ثابت

$\mathbf{V}$ = سرعت خطی مبدأ متحرک

$\mathbf{v}_r$ = سرعت نسبت به محورهای چرخان

$\boldsymbol{\omega}$ = سرعت زاویه‌ای محورهای چرخان

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ = سرعت ناشی از چرخش محورهای متحرک

فصل ۹ : نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس

دیدیم که معادلهٔ نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، فقط در چارچوب مرجع لخت صادق است. بنابراین، عبارت مربوط به نیروی وارد بر ذره را می‌توان از معادلهٔ زیر به‌دست آورد

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m\left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_{\text{ثابت}}$$

سرعت در دستگاه ثابت برابر بود با:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{V} + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

از طرفین معادلهٔ مشتق می‌گیریم

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_f}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} + \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_{\text{ثابت}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_f \equiv \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

فصل ۹ : نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس

از ترکیب معادلات خواهیم داشت

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m\ddot{\mathbf{R}}_f + m\mathbf{a}_r + m\dot{\omega} \times \mathbf{r} + m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + ۲m\omega \times \mathbf{v}_r$$

نهایتا رابطه نیرو در دستگاه مختصات دورانی را می‌توان بر حسب نیرو در دستگاه مختصات اینرسی به صورت زیر بیان کرد.

$$\mathbf{F}_{\text{موثر}} \equiv m\mathbf{a}_r$$

$$= \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}}_f - m\dot{\omega} \times \mathbf{r} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - ۲m\omega \times \mathbf{v}_r$$

جمع نیرو در دستگاه ثابت لخت — شتاب خطی — شتاب زاویه‌ای — نیروی مرکز گریز $= -m\omega^۲ r$ — نیروی کوریولیس

توجه داشته باشید که نیروی کوریولیس واقعاً از حرکت ذره سرچشمه می‌گیرد، چون نیرو متناسب با v_r است، و به این ترتیب وقتی حرکتی وجود نداشته باشد، نیرو صفر است.

فصل ۹ : نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس

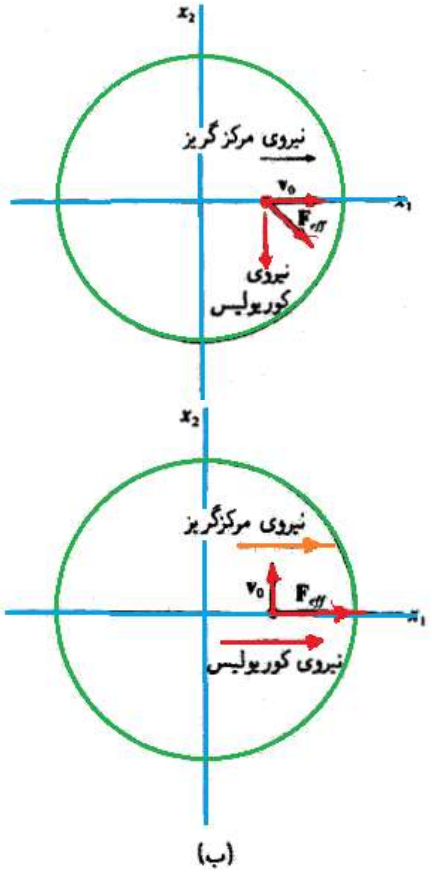
نیروی کوریولیس یک شبه نیرو است که باعث انحراف اجسام در حال حرکت به بیرون از راستای خط راست از دید یک ناظر درون یک دستگاه چرخشی است.
در واقع نیروی کوریولیس در اصطلاح جغرافیای نیرویی است که باعث می شود بادها در نیمکره شمالی کره زمین در جهت پاد ساعتگرد بچرخند و به سمت قطب شمال حرکت کنند و در نیمکره جنوبی این نیرو برعکس عمل می کند یعنی بادها در نیمکره جنوبی در جهت موافق ساعت بچرخند و به سمت قطب شمال حرکت کنند.

$$\mathbf{F}_{\text{نیرو}} = m\mathbf{a}_r + (\text{جمله‌های نالخت})$$

مرکز گریز و کوریولیس

این نیروها صرفاً از تلاش در راه تعمیم شکل معادلهٔ نیوتون به سیستمی نالخت سرچشمه می‌گیرد

فصل ۹ : نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس



(ب)

دانشجویی با یک توپ هاکی محکم روی یک چرخ فلک بزرگ با سطح افقی صاف اندازه‌گیریهایی را انجام می‌دهد. چرخ‌فلک با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. الف) نیروی مؤثر وارد بر توپ را پس از آنکه یک نیروی دافعهٔ شعاعی بر آن وارد می‌آید، پیدا کنید. ب) اگر توپ را در راستای عمود بر شعاع برانیم، نیروی مؤثر بر آن را پیدا کنید.

$$\mathbf{F} = 0$$

نیروی مؤثر عبارت است از

$$\mathbf{F}_{\text{مؤثر}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

فرض کنید:

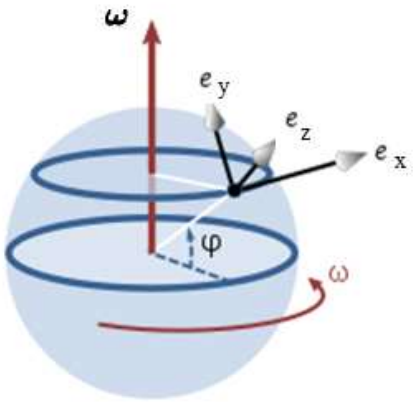
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_r &= v.\mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r} &= x.\mathbf{e}_1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathbf{F}_{\text{مؤثر}} = m\omega^2 x.\mathbf{e}_1 - 2m\omega v.\mathbf{e}_2$$

فصل ۹ : نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس

اگر سرعت اولیهٔ توپ هاکی، برابر با $\mathbf{v}_۲ = v_۰\mathbf{e}_۲$،

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{توپ}} &= m\omega^۲x_۰\mathbf{e}_۱ + ۲m\omega v_۰\mathbf{e}_۱ \\ &= (m\omega^۲x_۰ + ۲m\omega v_۰)\mathbf{e}_۱\end{aligned}$$

فصل ۹ :حرکت نسبت به زمین



حرکت زمین نسبت به چارچوب مرجع لخت تحت تأثیر چرخش زمین حول محورش قرار می‌گیرد، و در مقایسه، آثار سایر حرکتها (چرخش حول خورشید، حرکت منظومهٔ شمسی نسبت به کهکشان محلی و مانند آنها) اندک‌اند.

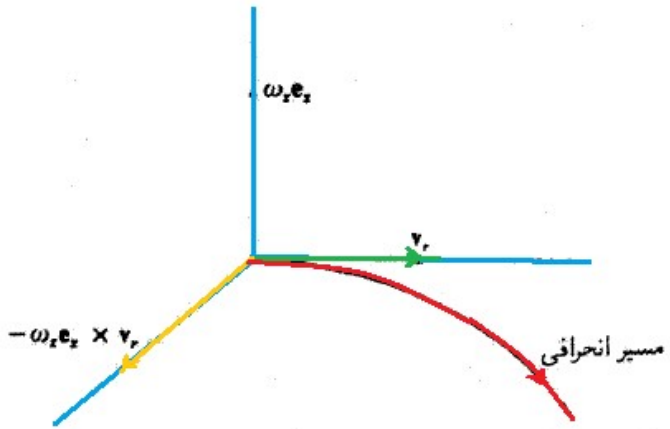
بردار سرعت زاویه‌ای ω که چرخش زمین حول محورش را نشان می‌دهد، در راستایی شمالی قرار گرفته است.

بنابراین، در نیمکره شمالی، ω دارای یک مؤلفهٔ ω_z در امتداد قائم محلی و بیرونسوست.



در نیمکره شمالی جهت حرکت حول منطقه کم فشار به صورت پاد ساعت‌گرد و در نیمکره جنوبی، جهت حرکت ساعت‌گرد می‌باشد زیرا دینامیک چرخشی یک تصویر وارونه می‌باشد. در ارتفاع بالا، پراکندگی هوا به سمت خارج و در جهت‌های مخالف چرخش می‌کند. سیکلون‌های به ندرت در طول استوا شکل می‌گیرند و منجر به نیروی کوریولیس ضعیفی در منطقه مورد نظر می‌شوند

فصل ۹ :حرکت نسبت به زمین



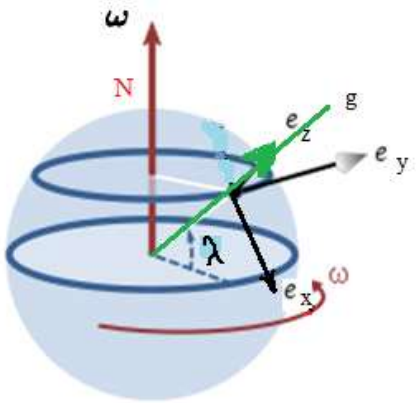
اگر ذره‌ای در یک صفحهٔ افقی (در دستگاه مختصات محلی روی سطح زمین) با سرعت $\mathbf{v}_r$ پرتاب شود، در آن صورت مؤلفهٔ نیروی کوریولیس، $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$، در صفحه عبارت است از $2m\omega_z v_r$، که به سمت راست حرکت ذره متمایل است و انحرافی از راستای اولیهٔ حرکت حاصل می‌شود.

چون اندازهٔ مؤلفهٔ افقی نیروی کوریولیس با مؤلفهٔ قائم $\boldsymbol{\omega}$ متناسب است، قسمتی از نیروی کوریولیس که انحراف را به‌وجود می‌آورد به عرض جغرافیایی بستگی دارد، در قطب شمال بیشینه

و در استوا صفر است. در نیمکرهٔ جنوبی، مؤلفهٔ ω_z در امتداد قائم محلی درونسوست، و به این ترتیب همهٔ انحرافها در خلاف جهت نیمکره شمالی است.

فصل ۹ :حرکت نسبت به زمین

مثال : انحراف افقی حاصل از نیروی کوریولیس ذره‌ای را بیابید که در میدان گرانشی زمین سقوط آزاد انجام می‌دهد.



سرعت زاویه‌ای چرخش زمین

$$\omega = \frac{۲\pi \text{rad/d}}{۸۶۴۰۰ \text{s/d}} \cong ۷٫۲۹ \times ۱۰^{-۵} \text{rad/s}$$

شتاب ذره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - ۲\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

داریم:

$$\begin{cases} \omega_x = -\omega \cos\lambda \\ \omega_y = ۰ \\ \omega_z = \omega \sin\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} \cong ۰ \\ \dot{y} \cong ۰ \\ \dot{z} \cong -gt \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \cong \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & ۰ & \omega\sin\lambda \\ ۰ & ۰ & -gt \end{vmatrix} \cong -(\omega g t \cos\lambda)\mathbf{e}_y$$

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} (\mathbf{a}_r)_x = \ddot{x} \cong 0 \\ (\mathbf{a}_r)_y = \ddot{y} \cong 2\omega g t \cos\lambda \\ (\mathbf{a}_r)_z = \ddot{z} \cong -g \end{cases} \longrightarrow \quad y(t) \cong \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda$$

با دو بار انتگرالگیری از $\ddot{y}$، داریم

انتگرالگیری از $\dot{z}$ همان نتیجه آشنای مسافت سقوط را به‌دست می‌دهد

$$z(t) \cong z(0) - \frac{1}{2} g t^2$$

و زمان سقوط از ارتفاع $h = z(0)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

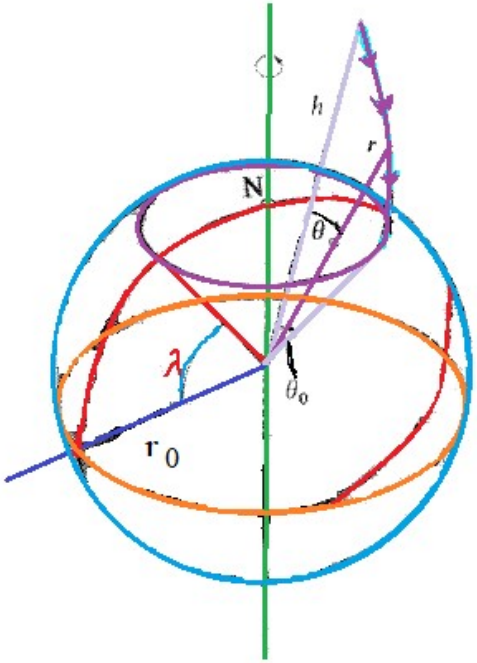
$$t \cong \sqrt{2h/g}$$

، انحراف به سمت شرق، d،

$$d \cong \frac{1}{3}\omega \cos\lambda \sqrt{8h^3/g}$$

فصل ۹ :حرکت نسبت به زمین

برای اینکه نشان دهید روش کوریولیس در دستیابی به معادلات حرکت در چارچوب مرجع نالخت تا چه حد تواناست، مثال قبلی را دوباره حل کنید اما فقط از فرمولبندیی که قبلاً تکامل یافته است ــنظریهٔ حرکت نیروی مرکزیــ بهره گیرید.



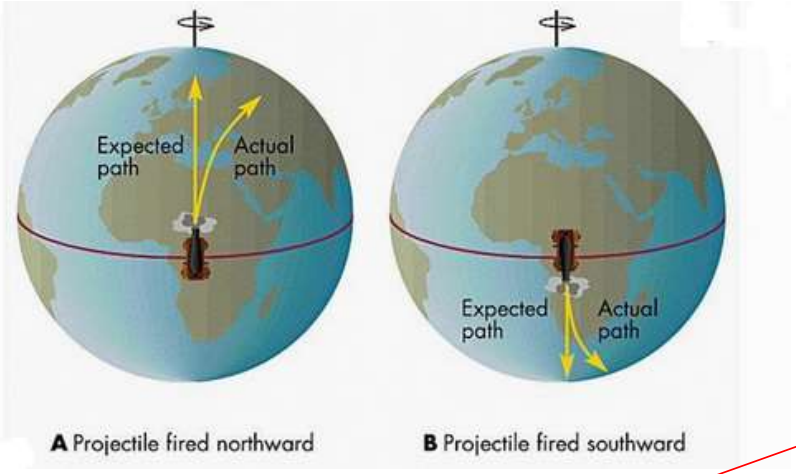
حل: اگر ذره‌ای با جرم اندک را از ارتفاع h بالاتر از سطح زمین رها کنیم، مسیری را که می‌پیماید یک مقطع مخروطی است ــیک بیضی با $\varepsilon \cong 1$ که یکی از کانونهایش به مرکز زمین خیلی نزدیک است.اگر r_0 شعاع زمین و λ عرض جغرافیایی (شمالی) محل باشد، در این صورت در لحظهٔ رها شدن، ذره سرعتی افقی به سوی شرق دارد

$$v_{\text{افقی}} = r\omega\cos\lambda = (r_0 + h)\omega\cos\lambda$$

$$l = mrv_{\text{افقی}} = m(r_0 + h)^2\omega\cos\lambda$$

تکانهٔ زاویه‌ای حول محور قطبی

فصل ۹ :حرکت نسبت به زمین



معادلهٔ مسیر

$$\frac{\alpha}{r} = ۱ - \varepsilon\cos\theta \xrightarrow{t=۰} \frac{\alpha}{r_۰ + h} = ۱ - \varepsilon \longrightarrow r = \frac{(۱-\varepsilon)(r_۰ + h)}{۱ - \varepsilon\cos\theta}$$

سرعت سطحی

$$\frac{۱}{۲} r^۲ \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{۲m}$$

$$t = \frac{m}{l}\int_۰^\theta r^۲ d\theta \longrightarrow t = \frac{۱}{\omega\cos\lambda}\int_۰^\theta \left(\frac{۱-\varepsilon}{۱-\varepsilon\cos\theta}\right)^۲ d\theta$$

زمان لازم، t، برای پیمودن زاویهٔ θ عبارت است از

فصل ۹ : نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس

حال اگر فرض کنیم که وقتی ذره به سطح زمین می‌رسد ($r = r_0$)؛ آنگاه $\theta = \theta_0$.

$$r = \frac{(1-\varepsilon)(r_0 + h)}{1 - \varepsilon\cos\theta} \longrightarrow \frac{r_0}{r_0 + h} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\theta_0} \longrightarrow$$

با وارونه کردن طرفین

$$1 + \frac{h}{r_0} = \frac{1-\varepsilon\cos\theta_0}{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon[1-2\sin^2(\theta_0/2)]}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\sin\frac{2\theta_0}{2}$$

$$\frac{h}{r_0} = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\sin^2\frac{\theta_0}{2} \longleftarrow \theta_0 \text{ کوچک است} \longleftarrow \frac{h}{r_0} \cong \frac{\varepsilon\theta_0^2}{2(1-\varepsilon)}$$

فصل ۹ : نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس

$$t = \frac{1}{\omega \cos\lambda} \int_0^{\theta} \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\theta} \right)^2 d\theta$$

$$\frac{1-\varepsilon\cos\theta_0}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

$$t = \frac{1}{\omega \cos\lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\{1 + [2\varepsilon/(1-\varepsilon)] \sin^2(\theta/2)\}^2} \cong \frac{1}{\omega \cos\lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + \varepsilon\theta^2/2(1-\varepsilon)]^2}$$

چون θ کوچک است

نوشتن $t(\theta = \theta_0) = T$

$$T \cong \frac{1}{\omega \cos\lambda} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{[1 + (h\theta^2/2r_0\theta_0^2)]^2}$$

$$\cong \frac{1}{\omega \cos\lambda} \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{2h}{2r_0\theta_0^2}\theta^2 \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{\omega \cos\lambda} \left(1 - \frac{2h}{3r_0} \right) \theta_0$$

$$\theta_0 \cong \frac{\omega T \cos\lambda}{1 - 2h/3r_0} \cong \omega T \cos\lambda \left(1 + \frac{2h}{3r_0} \right)$$

فصل ۹ :حرکت در دستگاه غیر لخت

انحراف خالص ذره به سمت شرق، d، عبارت است از

$$d = r_{\cdot}\theta_{\cdot} - r_{\cdot}\omega T\cos\lambda$$
$$= \frac{۲}{۳}h\omega T\cos\lambda$$

و با استفاده از $T \cong \sqrt{۲h/g}$

$$d \cong \frac{۱}{۳}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{۸h^{۲}}{g}}$$

فصل ۱۰: دینامیک جسم صلب



فصل ۱۰: دینامیک جسم صلب

به سامانه‌ای گفته می‌شود که شامل تعداد زیادی ذره هست که فاصله ذرات از یکدیگر همواره ثابت می‌باشد.

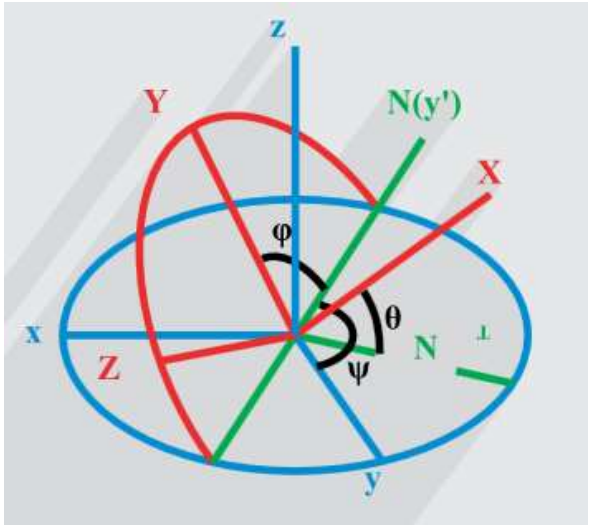
این فاصله حتی در صورتی که به جسم، نیرو وارد شود یا حرکت کند نیز ثابت می‌ماند.

تعریف بالا یک تعریف نظریه‌ای و ایده‌آل می‌باشد؛ زیرا در بهترین حالت نیز اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف دارای ارتعاشات هستند. با این وجود و با چشم‌پوشی از جزئیات اجسام ثابت و جامد معمولاً سفت و محکم گفته می‌شوند.

فرض صلب بودن جسم به این معنی است که اجسام بکار گرفته شده تحت تأثیر نیروهای بکار رفته تغییر شکل نمی‌دهند، و این برای ساده گردانیدن تحلیل؛ با کاهش دادن توصیف پارامترهایی که در مورد هر قطعه (جسم) در حالت‌های انتقال و دَوَران جسم آمده‌اند، است و آن توصیف‌ها را ساده می‌کند

همچنین باید این نکته را روشن کنیم که‌در برابرمفهوم جسم مطلقاً صلب محدودیتی نسبیتی وجود دارد.

فصل ۱۰: دینامیک جسم صلب



برای توصیف حرکت یک جسم صلب، از دو دستگاه مختصات ــ یک چارچوب لخت و یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به جسم ــ بهره می‌گیریم. برای تعیین موضع جسم، باید شش کمیت را مشخص کنیم. این کمیتها را می‌توان مختصات مرکز جرم (که غالباً برای سهولت آن را منطبق بر مبدأ دستگاه مختصات جسمی اختیار می‌کنیم)، و سه زاویهٔ مستقل که آرایش دستگاه مختصات جسمی را نسبت به دستگاه مختصات ثابت (یا لخت) تعیین می‌کند، اختیار کرد.

حرکت یک جسم صلب را می توان به صورت ترکیبی از حرکت انتقالی مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم در نظر گرفت

فصل ۱۰:تانسور لختی

اکنون جسم صلبی که از n ذره به جرمهای m_α و $\alpha = ۱, ۲, ۳, \ldots, n$ تشکیل یافته‌است. بررسی می‌کنیم

اگر این جسم با سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای ω حول نقطه‌ای بچرخد که در دستگاه مختصات جسمی ثابت‌است،

و اگر این نقطه در دستگاه مختصات ثابت باسرعت خطی لحظه‌ای $\mathbf{V}$ حرکت کند، آنگاه سرعت لحظه‌ای ذرهٔ αام در دستگاه ثابت

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{V} + \mathbf{v}_r + \omega \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}_r = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} \equiv ۰$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}_\alpha$$

اکنون می‌دانیم که تمام سرعتها در دستگاه ثابت اندازه‌گیری می‌شوند.

حالا تمام سرعتها نسبت به دستگاه چرخان یا دستگاه جسمی صفر می‌شوند زیرا که جسم صلب است.

فصل ۱۰:تانسور لختی

از آنجا که انرژی جنبشی ذرهٔ αام از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \longrightarrow T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha V^2 + \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V}.\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2$$

انرژی جنبشی کل

اگر ما مبدأ دستگاه مختصات جسمی را چنان اختیار کنیم که بر مرکز جرم جسم منطبق باشد

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V}.\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{V}.\boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha\right) = \mathbf{V}.\boldsymbol{\omega} \times M\mathbf{R}$$

نه $\mathbf{V}$ و نه $\boldsymbol{\omega}$ هیچکدام مشخصهٔ ذرهٔ αام نیستند

در این صورت می‌توان انرژی جنبشی را به‌صورت زیر نوشت

$$T = T_{\text{انتقالی}} + T_{\text{چرخشی}}$$

$$T_{\text{انتقالی}} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha V^2 = \frac{1}{2} M V^2$$

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2$$

فصل ۱۰:تانسور لختی

جملهٔ مربوط به انرژی جنبشی چرخشی را می‌توان با استفاده از حاصلضرب زیر محاسبه کرد

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2=(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$=A^2B^2-(\mathbf{A}.\mathbf{B})^2$$

$$T_{\text{چرخشی}}=\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha[\omega^2 r_\alpha^2-(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{r}_\alpha)^2]$$

$$\mathbf{r}_\alpha=(x_{\alpha,1},x_{\alpha,2},x_{\alpha,3}):\qquad r_{\alpha,i}=x_{\alpha,i}$$

$$T_{\text{چرخشی}}=\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left[\left(\sum_i\omega_i^2\right)\left(\sum_k x_{\alpha,k}^2\right)-\left(\sum_i\omega_i x_{\alpha,i}\right)\left(\sum_j\omega_j x_{\alpha,j}\right)\right]$$

$$\omega_i=\sum_j\omega_j\delta_{ij}$$

$$T_{\text{چرخشی}}=\frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_{i,j}m_\alpha\left[\omega_i\omega_j\delta_{ij}\left(\sum_k x_{\alpha,k}^2\right)-\omega_i\omega_j x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i\omega_j\sum_\alpha m_\alpha\left[\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2-x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\right]$$

فصل ۱۰:تانسور لختی

اگر جزء ijام جمع روی α را به‌صورتِ I_{ij} تعریف کنیم

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{k} x_{\alpha,k}^{2} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right]$$

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j$$

شکل بسیار محدود این معادله به‌صورت زیر در می‌آید

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2} I \omega^{2}$$

در اینجا I گشتاور لختی (اسکالر) حول محور چرخش است.

فصل ۱۰:تانسور لختی

کمیت I را تانسور گشتاور لختی تعریف می‌کنیم که مؤلفه‌هایش در شکل ماتریسی عبارت‌اند

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,3} x_{\alpha,2} & \sum_\alpha m_\alpha (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2) \end{Bmatrix}$$

با استفاده از مؤلفه‌های $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ به‌جای $(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$ و قرار دادن $r_\alpha^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2$،

$$\{\mathbf{I}\} = \begin{Bmatrix} \sum_\alpha m_\alpha (r_\alpha^2 - x_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha x_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (r_\alpha^2 - y_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (r_\alpha^2 - z_\alpha^2) \end{Bmatrix}$$

فصل ۱۰:تانسور لختی

عناصر قطری، I_{11}، I_{22}، و I_{33} را، به‌ترتیب، گشتاور لختی حول محورهای x_1، x_2، x_3 می‌نامیم، و به منفی عناصر غیر قطری I_{12}، I_{13}، و الی آخر، حاصلضربهای لختی می‌گوییم.

روشن است که تانسور لختی متقارن است؛ یعنی

$$I_{ij} = I_{ji}$$

بنابراین، فقط شش عنصر مستقل در $\{\mathbf{I}\}$ وجود دارد.

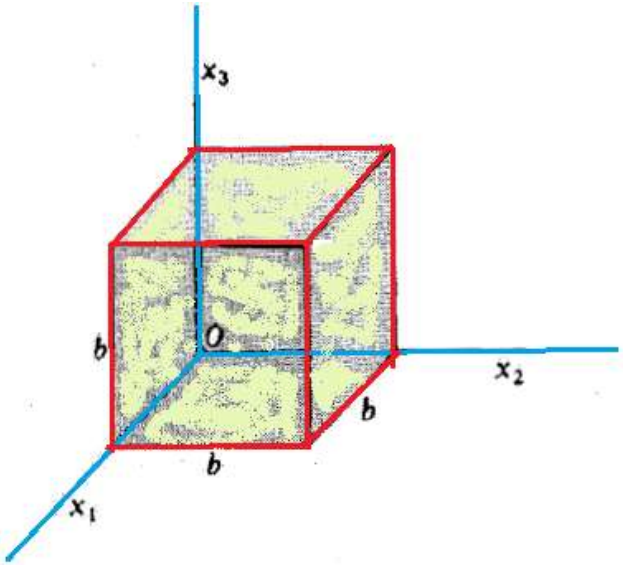
اگر ما جسمی را به‌صورت توزیع پیوسته‌ای از ماده با چگالی جرمی $\rho = \rho(\mathbf{r})$ درنظر بگیریم، آنگاه

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] dv$$

$dv \equiv dx_1 dx_2 dx_3$

V حجم جسم

فصل ۱۰:تانسور لختی



مثال تانسور لختی یک مکعب همگن به چگالی ρ، جرم M، و ضلع b را محاسبه کنید.

داریم:

$$I_{11} = \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \int_0^b dx_1$$

$$= \frac{2}{3}\rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2$$

$$I_{12} = -\rho \int_0^b x_1 dx_1 \int_0^b x_2 dx_2 \int_0^b dx_3$$

$$= -\frac{1}{4}\rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2$$

تمام عناصر قطری و غیر قطری نیز با یکدیگر مساوی‌اند.

اگر کمیتی مثل β را به‌صورت $\beta = Mb^2$ تعریف کنیم، داریم

$$\begin{cases} I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3}\beta \\ I_{12} = I_{13} = I_{23} = -\frac{1}{4}\beta \end{cases} \longrightarrow \{I\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix}$$

تکانه زاویه‌ای یک جسم صلب حول یک نقطه ثابت را می‌توان با جمع بستن تکانه زاویه‌ای تک تک ذرات تشکیل دهنده جسم حول *همان نقطه* به دست آورد.

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha$$

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

انتخاب برای مکان نقطهٔ ثابت به‌مسئلهٔ خاص تحت بررسی بستگی دارد.

فقط دونوع گزینش مهم است:

الف) اگر (در دستگاه مختصات ثابت) یک یا چند نقطه ثابت باشند، O چنان اختیار می‌شود که بر یکی از این نوع نقاط منطبق شود

ب) اگر هیچ نقطه‌ای از جسم ثابت نباشد، O را به‌عنوان مرکز جرم انتخاب می‌کنیم.

تکانهٔ خطی، $\mathbf{p}_\alpha$، نسبت به دستگاه مختصات جسمی عبارت‌است از

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \omega \times \mathbf{r}_\alpha$$

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

تکانهٔ زاویه‌ای جسم برابر است با

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = A^2\mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{A}.\mathbf{B})$$

باستفاده‌از اتحاد برداری

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha.\boldsymbol{\omega})\right]$$

تکانهٔ زاویه‌ای کمیتی برداری است، بنابراین مؤلفهٔ iام آن را به این صورت می‌نویسیم

$$L_i = \sum_\alpha m_\alpha \left[\omega_i \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j}\omega_j\right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \sum_j \left[\omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}\right]$$

$$= \sum_j \omega_j \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}\right]$$

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

جمع روی α را می‌توانیم به‌صورت عنصر ijام تانسور لختی تلقی کنیم

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

یا، به‌صورت نماد تانسوری

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{I}\}.\boldsymbol{\omega}$$

به‌طور کلی بردار تکانهٔ زاویه‌ای همراستای بردار سرعت زاویه‌ای نیست.

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

مثال: دمبل چرخان

فرض می‌کنیم میله‌ای که m_1 و m_2 را به‌هم متصل می‌کند، بدون وزن و غیرقابل انبساط باشد.

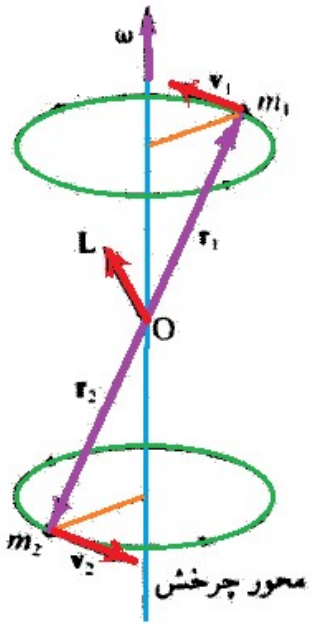
رابطهٔ زیر کمیتهای $\mathbf{r}_\alpha$، $\mathbf{v}_\alpha$ و $\boldsymbol{\omega}$ را به‌هم مربوط می‌کند

$$\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha$$

تکانهٔ زاویه‌ای جسم برابر است با

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha$$

روشن است که $\boldsymbol{\omega}$ در امتداد محور چرخش قرار گرفته و $\mathbf{L}$ بر خطی که m_1 را به m_2 وصل می‌کند، عمود است.



فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

بردار تکانهٔ زاویه‌ای، $\mathbf{L}$، نسبت به زمان ثابت باقی نمی‌ماند بلکه باسرعت زاویه‌ای ω به‌گونه‌ای می‌چرخد که یک مخروط را ترسیم می‌کند؛ محور این مخروط همان محور چرخش است.

بنابراین $\mathbf{L} \neq 0$.

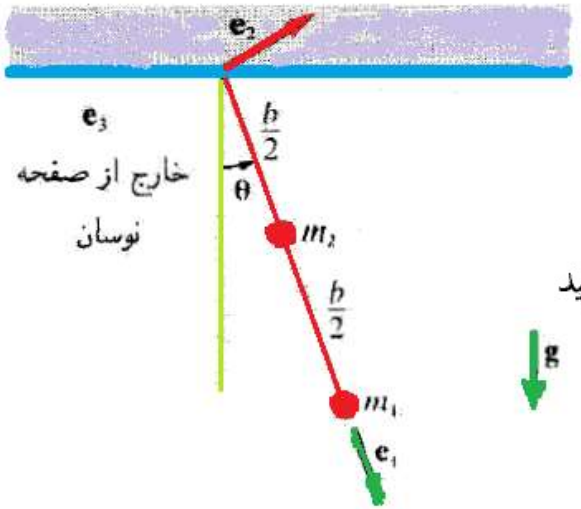
$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$$

که در اینجا $\mathbf{N}$ گشتاور نیروی خارجی وارد بر جسم است. بدینسان، برای اینکه دمبل به چرخش خود ادامه دهد، همواره باید گشتاور نیرویی بر آن وارد آید.

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\sum_i \omega_i L_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_{ij}\omega_i\omega_j \quad \rightarrow \quad T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}.\mathbf{L}$$

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

مثال: آونگ نمایشیافته در شکل را درنظر بگیرید که از یک‌میلهٔ صلب به طول b و یک جرم m_1 در انتهای آن تشکیل شده است. جرم دیگری (m_2) را در وسط میله قرار می‌دهیم. اگر آونگ در صفحه تاب بخورد، بسامد نوسانهای کوچک آن را پیدا کنید.



فرض کنید مبدأ دستگاه مختصات ثابت و دستگاه مختصات جسمی در نقطه آویز آونگ واقع باشد. فرض کنید که $\mathbf{e}_1$ در امتداد میله، $\mathbf{e}_2$ در صفحه، و $\mathbf{e}_3$ خارج از صفحه قرار دارد

سرعت زاویه‌ای عبارت است از

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{e}_3 = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

همهٔ جرمها در امتداد $\mathbf{e}_1$، و با مختصات $x_{1,1} = b$ و $x_{2,1} = b/2$ قرار دارند. سایر مؤلفه‌های $x_{\alpha,k}$ جملگی صفرند.

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

تانسور لختی

$$I_{ij} = m_1(\delta_{ij}x_{1,1}^2 - x_{1,i}x_{1,j}) + m_2(\delta_{ij}x_{2,1}^2 - x_{2,i}x_{2,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1b^2 + m_2\frac{b^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m_1b^2 + m_2\frac{b^2}{4} \end{pmatrix}$$

تکانهٔ زاویه‌ای جسم برابر است با

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 0$$

$$L_3 = I_{33}\omega_3 = \left(m_1b^2 + m_2\frac{b^2}{4}\right)\dot{\theta}$$

تنها نیروی خارجی عبارت است از نیروی گرانش، که سبب می‌شود گشتاور نیروی $\mathbf{N}$ بر سیستم اعمال شود. چون $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$، داریم

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

$$\left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right) \ddot{\theta} \mathbf{e}_3 = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha$$

از آنجا که راستای نیروی گرانش به پایین است

$$\mathbf{g} = g \cos\theta \mathbf{e}_1 - g \sin\theta \mathbf{e}_2$$

بنابراین

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = b\mathbf{e}_1 \times (\cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2) m_1 g = -m_1 g b \sin\theta \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \frac{b}{2}\mathbf{e}_1 \times (\cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2) m_2 g = -m_2 g \frac{b}{2} \sin\theta \mathbf{e}_3$$

$$b^2 \left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right) \ddot{\theta} = -bg \sin\theta \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{m_1 + \frac{m_2}{2}}{m_1 + \frac{m_2}{4}} \frac{g}{b}$$

فصل ۱۰: تکانه زاویه ای

این مثال را می‌شد به‌همین آسانی، و به‌کارگیری معادلات حرکت لاگرانژ، حل کرد.

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\omega_2 L_2 = \frac{1}{2}\omega_2^2 I_{22}$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 \qquad U = -m_1 g b\cos\theta - m_2 g \frac{b}{2}\cos\theta$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 + m_1 g b\cos\theta + m_2 g\frac{b}{2}\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow b^2\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right)\ddot{\theta} = -bg\sin\theta\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)$$

فصل ۱۰: محورهای اصلی لختی

اگر تانسور لختی فقط از عناصر قطری تشکیل یافته بود، عبارتهای مربوط به T و L به‌نحو چشمگیری ساده می‌شدند. اگر بتوان نوشت:

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad \longleftrightarrow \quad \{\mathbf{I}\} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

در این صورت خواهیم داشت

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2$$

$$L_i = \sum_j I_i \delta_{ij} \omega_j = I_i \omega_i$$

فصل ۱۰: محورهای اصلی لختی

حال شرایطی را تعیین می‌کنیم که این معادلهٔ شرایط تانسور لختی را توصیف می‌کند.

این‌کار مستلزم یافتن یک مجموعه از محورهای مختصات جسمی است که حاصلضربهای لختی (یعنی، عناصر غیرقطری

$\{I\}$)، برای آنها صفر است. چنین‌محورهایی را محورهای اصلی لختی می‌نامیم.

در این صورت، اگر I گشتاور لختی حول این محور باشد، می‌توان نوشت

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

$$\begin{cases} L_1 = I\omega_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ L_2 = I\omega_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ L_3 = I\omega_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 = 0 \\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 = 0 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 = 0 \end{cases}$$

فصل ۱۰: محورهای اصلی لختی

شرط اینکه این دستگاه معادلات جواب غیر بدیهی داشته باشند، آن است که دترمینان ضرایبشان صفر شود

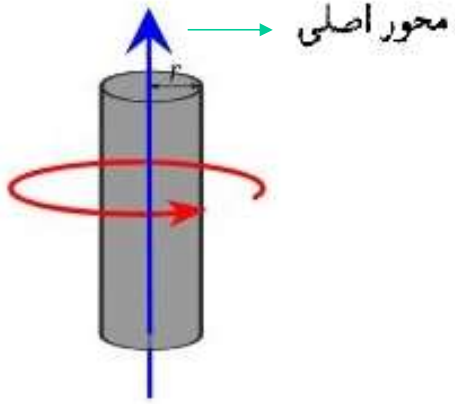
$$\begin{vmatrix} (I_{11}-I) & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & (I_{22}-I) & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & (I_{33}-I) \end{vmatrix} = 0$$

بسط این دترمینان به معادلهٔ مشخصه[1] برحسب $\mathbf{I}$ می‌انجامد، که معادله‌ای است درجهٔ سوم.

مقادیر I_1، I_2، و I_3 را گشتاورهای لختی اصلی می‌نامند.

هر کدام از سه ریشه متناظر باگشتاور لختی حول یکی از محورهای اصلی است.

در اغلب مسائلی که در دینامیک جسم صلب باآنها برمی‌خوریم، اجسام دارای نوعی شکل منظم هستند، به‌طوری که ما فقط با بررسی تقارن جسم می‌توانیم محورهای اصلی را تعیین کنیم.



هر جسم دوار (مثل میلهٔ استوانه‌ای) یک محور اصلی دارد که در امتداد محور تقارن قرار می‌گیرد

مانند خط مرکزی میلهٔ استوانه‌ای و دو محور دیگر در صفحهٔ عمود بر محور تقارن قرار می‌گیرند.

فصل ۱۰: محورهای اصلی لختی

مثال: گشتاورهای لختی اصلی و محورهای اصلی مربوط به مکعب مثال را پیدا کنید.

برای پیدا کردن گشتاورهای لختی اصلی، باید معادلهٔ مشخصهٔ زیر را حل کنیم

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0$$

از بسط دترمینان، داریم

$$(\frac{11}{12}\beta - I)[(\frac{2}{3}\beta - I)^2 - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta(\frac{2}{3}\beta - I)] = 0$$

که می‌توان آن را به‌صورت حاصلضرب عوامل نوشت

$$(\tfrac{۱}{۶}\beta - I)(\tfrac{۱۱}{۱۲}\beta - I)(\tfrac{۱۱}{۱۲}\beta - I) = ۰ \longrightarrow I_۱ = \tfrac{۱}{۶}\beta,\ I_۲ = \tfrac{۱۱}{۱۲}\beta,\ I_۳ = \tfrac{۱۱}{۱۲}\beta$$

$$\{\mathbf{I}\} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۶}\beta & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۱۲}\beta & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۱}{۱۲}\beta \end{pmatrix}$$

چون دو تا از ریشه‌ها باهم یکسان‌اند، $I_۲ = I_۳$، محور اصلی وابسته به $I_۱$ باید یکی‌از محورهای تقارن جسم باشد.

برای یافتن جهت‌محوراصلی وابسته به $I_۱$ به جای I مقدار $I = I_۱ = \frac{۱}{۶}\beta$ را قرار می‌دهیم:

فصل ۱۰: محورهای اصلی لختی

$$\begin{aligned}
(\tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{1}{6}\beta)\omega_{11} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{21} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{31} &= 0 \\
-\tfrac{1}{4}\beta\omega_{11} + (\tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{1}{6}\beta)\omega_{21} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{31} &= 0 \\
-\tfrac{1}{4}\beta\omega_{11} - \tfrac{1}{4}\beta\omega_{21} + (\tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{1}{6}\beta)\omega_{31} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\omega_{11} - \omega_{21} - \omega_{31} &= 0 \\
-\omega_{11} + 2\omega_{21} - \omega_{31} &= 0
\end{aligned}$$

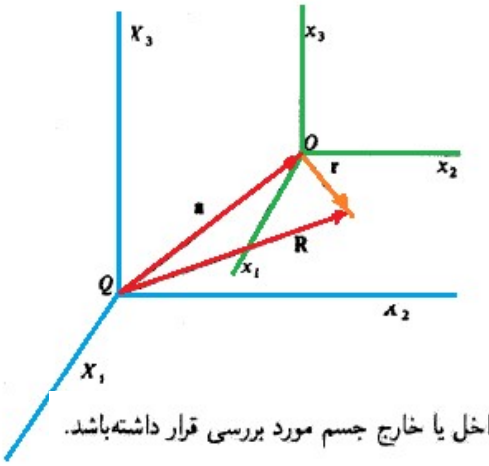
با کم کردن معادلهٔ دوم از معادلهٔ اول، می‌یابیم: $\omega_{11} = \omega_{21}$.

$$\omega_{11} = \omega_{21} = \omega_{31}$$

نسبتهای موردنظر، عبارت‌انداز $\omega_{11} : \omega_{21} : \omega_{31} = 1 : 1 : 1$

بنابراین، وقتی مکعب حول محوری می‌چرخد که گشتاور لختی $I_1 = \frac{1}{6}\beta = \frac{1}{6}Mb^2$ به آن وابسته‌است، تصویرهای ω روی هر یک از سه محور مختصات باهم برابرند. از این‌رو، این محور اصلی با قطر مکعب متناظر است.

برای اینکه انرژی جنبشی به قسمتهای انتقالی و چرخشی قابل تفکیک باشد لازم‌است دستگاه مختصاتی انتخاب شود که مبدأ آن در مرکز جرم جسم واقع باشد. در مورد برخی اشکال هندسی، ممکن است محاسبهٔ عناصر تانسور لختی در چنین دستگاهی همیشه آسان نباشد. بنابراین، یک دسته محور مختصات دیگر، مانند X_i، را درنظر می‌گیریم، که آنها هم‌نسبت به جسم ثابت‌اند و سمتگیریشان همان سمتگیری محورهای x_i است، ولی مبدأ آنها در Q قرار دارد که بر مبدأ O (واقع در مرکز جرم دستگاه مختصات جسمی) منطبق نیست.



مبدا Q ممکن است در داخل یا خارج جسم مورد بررسی قرار داشته‌باشد.

عناصر تانسور لختی نسبت به محورهای X_i عبارت خواهند بود از

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k} X_{\alpha,k}^{2} - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j} \right)$$

بردار کلی $\mathbf{R}$ را کل می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{r} \longrightarrow X_i = a_i + x_i$$

عنصر تانسور، J_{ij}، چنین می‌شود

$$J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha,k} + a_k)^2 - (x_{\alpha,i} + a_i)(x_{\alpha,j} + a_j) \right)$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right) + \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k (2 x_{\alpha,k} a_k + a_k^2) - (a_i x_{\alpha,j} + a_j x_{\alpha,i} + a_i a_j) \right)$$

پس از برابر نهادن مجموع‌یابی اول با I_{ij}، و دسته‌بندی مجدد، داریم

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right) + \sum_\alpha m_\alpha \left(2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k} a_k - a_i x_{\alpha,j} - a_j x_{\alpha,i} \right)$$

$$\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,k} \longrightarrow \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0$$

بنابراین، داریم

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{k} a_k^2 - a_i a_j \right]$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} = M \quad , \quad \sum_{k} a_k^2 \equiv a^2$$

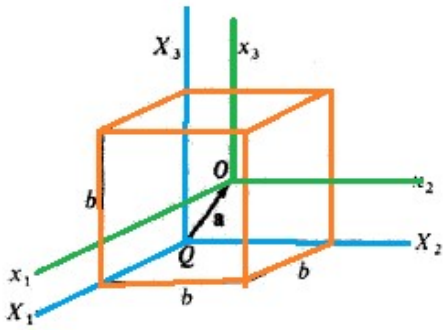
$$I_{ij} = J_{ij} - M \left[a^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right]$$

قضیه محورهای موازی اشتاینر

همین‌که عناصر I_{ij} متعلق به تانسور لختی مطلوب (که مبدأ آن در مرکز جرم واقع است) نسبت به محورهای X_i معلوم شوند، معادلهٔ بالا محاسبهٔ این عناصر را مجاز می‌دارد.

فصل ۱۰: گشتاورهای لختی در دستگاه های مختصات جسمی متفاوت

مثال: تانسور لختی مکعب را در دستگاه مختصاتی بیابید که مبدأ آن در مرکز جرم واقع است.



حل: وقتی مبدأ در رأس مکعب قرار گرفته باشد، تانسور لختی به‌صورت زیر خواهد بود

$$\{\mathbf{J}\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 \end{pmatrix}$$

برای حفظ نمادگذاری این بخش، محورهای جدید با مبدأ O را x_i و محورهای سابق با مبدأ Q واقع در یکی از رأسهای مکعب را X_i می‌نامیم.

مرکز جرم مکعب در دستگاه مختصات X_i در نقطهٔ $(b/2, b/2, b/2)$ واقع است، و بنابراین مؤلفه‌های بردار $\mathbf{a}$ عبارت‌اند از

$$a_1 = a_2 = a_3 = b/2$$

داریم

$$J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3}Mb^2$$
$$J_{12} = J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2$$

با استفاده از قضیه محورهای موازی داریم:

$$I_{11} = J_{11} - M[a_2^2 - a_1^2]$$
$$= J_{11} - M[a_2^2 + a_3^2]$$
$$= \frac{2}{3}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{6}Mb^2$$

$$I_{12} = J_{12} - M[-a_1 a_2] = -\frac{1}{4}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 = 0$$

رویهمرفته، داریم

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{1}{6}Mb^2$$
$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$$

$$\{I\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Mb^2 \end{pmatrix}$$

فصل ۱۰: گشتاورهای لختی در دستگاه های مختصات جسمی متفاوت

بدینسان پی می‌بریم که، اگر مرکز جرم مکعب را مبدأ اختیار کنیم، محورهای اصلی بر وجوه مکعب عمودند.

$$\{I\} = \frac{1}{6} M b^2 \{1\}$$

$$\{1\} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

رابطه‌ای بنیادی تانسور لختی و بردارهای تکانهٔ زاویه‌ای

$$L_k = \sum_l I_{kl}\omega_l$$

این رابطه یک معادلهٔ برداری است، در یک دستگاه مختصات چرخیده باید رابطه کلاً مشابهی‌داشته باشیم

$$L'_i = \sum_j I'_{ij}\omega'_j$$

در اینجا کمیتهای پریم‌دار جملگی به دستگاه مختصات چرخیده برمی‌گردند.

$$x_i = \sum_j \lambda^t_{ij} x'_j = \sum_j \lambda_{ji} x'_j$$

هم L و هم ω از معادلهٔ تبدیل متعارف بردارها پیروی می‌کنند

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk} L'_m$$

$$\omega_l = \sum_j \lambda_{jl}\omega'_j$$

بنابراین می‌توان نوشت

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

بنابراین خواهیم داشت

$$\sum_m \lambda_{mk} L'_m = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl} \omega'_j$$

سپس دوطرف این معادله را در λ_{ik} ضرب و روی k جمع می‌کنیم

$$\sum_m \left(\sum_k \lambda_{ik} \lambda_{mk} \right) L'_m = \sum_j \left(\sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j$$

$$L'_i = \sum_j \left(\sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j$$

$$\delta_{im}$$

$$I'_{ij}$$

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda^t_{lj}$$

این رابطه قاعده‌ای است که تانسور لختی، تحت تبدیل مختصات باید از آن پیروی کند.

در واقع، این معادلهٔ قاعدهٔ کلی است که رفتار هر تانسور مرتبهٔ دوم را تحت تبدیل مشخص می‌کند.

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

درمورد تانسوری چون $\mathbf{T}$ بامرتبه دلخواه، قاعده چنین است

$$T'_{abcd\ldots} = \sum_{i,j,k,l,\ldots} \lambda_{ai}\lambda_{bj}\lambda_{ck}\lambda_{dl}\ldots T_{ijkl\ldots}$$

این معادلهٔ را می‌توان به‌صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت

$$\mathbf{I}' = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\boldsymbol{\lambda}^{t}$$

چون فقط ماتریسهای تبدیل متعامد موردنظر ماست، ترانهادهٔ $\boldsymbol{\lambda}$ برابر معکوس آن است،

$$\mathbf{I}' = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\boldsymbol{\lambda}^{-1}$$

هر تبدیلی از این نوع تبدیل کلی را تبدیل تشابه می‌نامیم

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

مثال: ثابت کنید: تانسور لختی برای یک‌مکعب (که‌مبدأ مختصات در مرکز جرم آن قرار دارد)، مستقل از سمتگیری محورهاست.

حل: تغییر ناشی از چرخش دستگاه مختصات در تانسور لختی را می‌توان با انجام یک تبدیل تشابه محاسبه کرد.

به‌این ترتیب، اگر چرخش به‌کمک ماتریس λ تعریف شده‌باشد، داریم

$$\mathbf{I}' = \lambda \mathbf{I} \lambda^{-1}$$

اما ماتریس $\mathbf{I}$، که از عناصر تانسور $\{\mathbf{I}\}$ استخراج شده است دقیقاً عبارت است از حاصلضرب ماتریس همانی ۱ ضرب در یک کمیت ثابت

$$\mathbf{I} = \frac{1}{6} Mb^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} Mb^2 \mathbf{1}$$

بنابراین

$$\mathbf{I}' = \frac{۱}{۶} Mb^{۲} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{۱} \boldsymbol{\lambda}^{-۱} = \frac{۱}{۶} Mb^{۲} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^{-۱} = \frac{۱}{۶} Mb^{۲} \mathbf{۱} = \mathbf{I}$$

از این‌رو تانسور لختی تبدیل یافته، مستقل از جزئیات چرخش، با تانسور اصلی همسان است.

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

می‌خواهیم تعیین کنیم چه شرایطی باید برقرار باشد که اگر یک تانسور لختی دلخواه را انتخاب کردیم و یک چرخش دستگاه مختصات روی آن انجام دادیم، تانسور لختی تبدیل یافته قطری باشد.

$$I'_{ij} = I_i \delta_{ij}$$

بدینسان

$$I_i \delta_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl}$$

اگر طرفین این معادله را در λ_{im} ضرب و روی i جمع کنیم، خواهیم داشت

$$\sum_i I_i \lambda_{im} \delta_{ij} = \sum_{k,l} \left(\sum_i \lambda_{im} \lambda_{ik} \right) \lambda_{jl} I_{kl}$$

$$\delta_{mk}$$

$$I_j \lambda_{jm} = \sum_l \lambda_{jl} I_{ml}$$

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

می‌توان سمت چپ این معادله‌را به این صورت نوشت

$$I_j \lambda_{jm} = \sum_l I_j \lambda_{jl} \delta_{ml}$$

$$\sum_l (I_{ml} - I_j \delta_{ml}) \lambda_{jl} = 0$$

این عبارت یک دستگاه معادلات جبری خطی چندمجهولی است؛ به‌ازای هر مقدار j یک دستگاه سه‌معادله‌ای داریم، یک معادله به‌ازای هر یک از سه مقدار ممکن برای m.

برای اینکه جواب غیربدیهی، وجود داشته باشد، باید دترمینان ضرایب صفر شود، به‌طوری که گشتاورهای لختی اصلی I_1، I_2، و I_3 به‌صورت ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ دترمینان مربوط به I به‌دست می‌آیند

$$\left| I_{ml} - I\delta_{ml} \right| = 0$$

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

به‌این ترتیب، برای هر تانسور لختی، که عناصر آن برای مبدأ مختصات معینی محاسبه شده‌اند، می‌توان محورهای مختصات را چنان حول مبدأ چرخاند که تانسور لختی قطری شود. در این صورت، این محورهای مختصات جدید همان محورهای اصلی‌جسم هستند، و گشتاورهای جدید هم همان گشتاورهای لختی اصلی به‌شمار می‌آیند. به این ترتیب، برای هر جسمی و برای هر مبدأ، همواره یک مجموعه محور اصلی وجود دارد.

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

چند نکته:

عناصر تانسور لختی، مقدار گشتاورهای لختی اصلی، و سمتگیری محورهای اصلی یک جسم صلب، به انتخاب مبدأ دستگاه مختصات بستگی دارد.

برای اینکه انرژی جنبشی به دو قسمت انتقالی و چرخشی قابل تفکیک باشد، مبدأ دستگاه مختصات جسمی، به‌طور کلی، باید منطبق بر مرکز جرم جسم اختیار شود.

برای هر مبدأ و برای هر جسمی همواره یک سمتگیری از محورها وجود دارد که تانسور لختی را قطری می‌کند.

محورهای اصلی یک مجموعهٔ متعامد را تشکیل می‌دهند.

اثبات: برای محور اصلی داریم

$$L_{im} = I_m \omega_{im}$$

$$L_{im} = \sum_k I_{ik} \omega_{km}$$

برحسب عناصر تانسور گشتاور لختی نیز داریم

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

از ترکیب این دو رابطه، خواهیم داشت

$$\sum_k I_{ik}\omega_{km} = I_m\omega_{im}$$

در ω_{in} ضرب و روی i جمع کنیم

$$\sum_i I_{ki}\omega_{in} = I_n\omega_{kn}$$

در ω_{km} ضرب و روی k جمع می‌کنیم

به‌همین ترتیب، درمورد گشتاور اصلی Inام می‌توان نوشت

$$\sum_{i,k} I_{ik}\omega_{km}\omega_{in} = \sum_i I_m\omega_{im}\omega_{in}$$

$$\sum_{i,k} I_{ki}\omega_{in}\omega_{km} = \sum_k I_n\omega_{kn}\omega_{km}$$

$$I_{ik} = I_{ki}$$

سمت چپ این معادلات یکسان است،

پس از کم کردن معادلهٔ دوم از معادلهٔ اول، داریم

$$I_m \sum_i \omega_{im}\omega_{in} - I_n \sum_k \omega_{km}\omega_{kn} = 0$$

چون i و k هر دو شاخصهای زیرین بی‌نقش‌اند، می‌توانیم آنها را، مثلاً، با l جایگزین کنیم و برسیم به

$$(I_m - I_n)\sum_l \omega_{lm}\omega_{ln} = 0$$

گشتاورهای اصلی متمایزند، به‌طوری که $I_m \neq I_n$.

$$\sum_l \omega_{lm}\omega_{ln} = 0$$

چون گشتاورهای اصلی I_m و I_n از مجموعهٔ سه گشتاوری به‌دلخواه انتخاب شده بودند

$$\omega_m . \omega_n = 0$$

بنابراین سه محور اصلی یک مجموعهٔ متعامد تشکیل می‌دهند.

فصل ۱۰: خواص تانسور لختی

خواص تانسور لختی

تانسور لختی متقارن است و عناصر آن حقیقی‌اند.

قطری کردن را می‌توان با چرخش مناسب محورها، یعنی، یک تبدیل تشابه، انجام داد

ویژه‌مقدارها به صورت ریشه‌های دترمینان مشخصه به‌دست می‌آیند، و حقیقی‌اند.

ویژه بردارها حقیقی و متعامدند.

فصل ۱۰: زوایای اویلر

تبدیل از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر را می‌توان به‌کمک یک‌معادلهٔ ماتریسی به‌شکل زیر نمایش داد

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}'$$

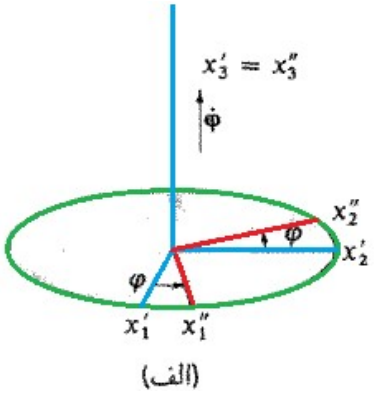
اگر دستگاه ثابت را با $\mathbf{x}'$ و دستگاه جسمی را با $\mathbf{x}$ مشخص کنیم، در آن صورت ماتریس چرخش $\boldsymbol{\lambda}$ سمتگیری دو دستگاه را نسبت به هم به‌طورکامل توصیف می‌کند.

ماتریس چرخش $\boldsymbol{\lambda}$ شامل سه زاویهٔ مستقل است.

زاویه‌های اویلر سه زاویه‌ای هستند که توسط لئونارد اویلر برای توصیف جهت‌گیری یک جسم صلب نسبت به یک سیستم مختصات ثابت معرفی شده‌اند.

فصل ۱۰: زوایای اویلر

زاویه های اویلر معمولاً با φ، θ و ψ نشان داده می‌شوند.



(الف)

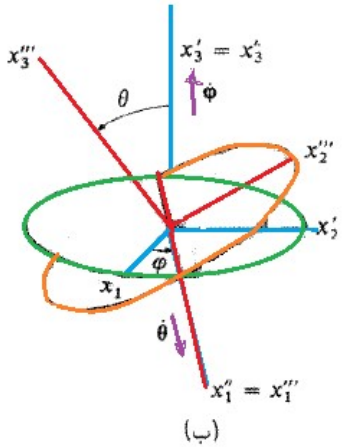
زاویه‌های اویلر در سلسله چرخشهای زیر، که دستگاه x_i' را به دستگاه x_i می‌برد، به‌وجود می‌آیند:

۱. چرخش اول یک چرخش پادساعتگرد به اندازهٔ زاویهٔ φ حول محور x_3' است که x_i' را به x_i'' تبدیل می‌کند.

ماتریس تبدیل چنین است

$$\lambda_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{x''} = \lambda_\varphi \mathbf{x'}$$

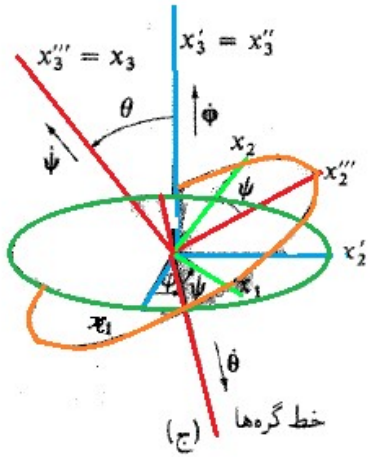
فصل ۱۰: زوایای اویلر



(ب)

۲. چرخش دوم یک چرخش پادساعتگرد به اندازهٔ زاویهٔ θ حول محور x_1'' است که x_i'' را به x_i''' تبدیل می‌کند.

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{x}''' = \lambda_\theta \mathbf{x}''$$



(ج)

۳. چرخش سوم به اندازهٔ زاویه ψ حول محور x_3''' پادساعتگرد است x_i''' را به x_i تبدیل می‌کند.

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = \lambda_\psi \mathbf{x}'''$$

فصل ۱۰: زوایای اویلر

فصل مشترک صفحاتی را که شامل محورهای x_1 و x_2 و محورهای x'_1 و x'_2اند، خط گره‌ها می‌نامیم.

تبدیل کامل از سیستم x'_i به سیستم x_i با رابطهٔ زیر بیان‌می‌شود

$$\mathbf{x} = \lambda_\psi \mathbf{x}''' = \lambda_\psi \lambda_\theta \mathbf{x}'' = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\varphi \mathbf{x}'$$

و ماتریس چرخش λ به این قرار است

$$\lambda = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\varphi$$

مؤلفه‌های این ماتریس عبارت‌اند از

$$
\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi \\
\lambda_{21} &= -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi \\
\lambda_{31} &= \sin\theta\sin\varphi \\
\lambda_{12} &= \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi \\
\lambda_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi \\
\lambda_{32} &= -\sin\theta\cos\varphi \\
\lambda_{13} &= \sin\psi\sin\theta \\
\lambda_{23} &= \cos\psi\sin\theta \\
\lambda_{33} &= \cos\theta
\end{aligned}
$$

فصل ۱۰: زوایای اویلر

می‌توانیم مشتق زمانی این زاویه‌های چرخش را به مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای ω مربوط کنیم.

$$\begin{cases} \omega_\varphi = \dot{\varphi} \\ \omega_\theta = \dot{\theta} \\ \omega_\psi = \dot{\psi} \end{cases}$$

بیان معادلات حرکت جسم صلب در دستگاه مختصات جسمی (یعنی، در دستگاه x_i) بسیار مناسب است، و بنابراین باید مؤلفه‌های ω را در این دستگاه بیان‌کنیم.

توجه داریم سرعتهای زاویه‌ای $\dot{\varphi}$، $\dot{\theta}$، $\dot{\psi}$ در امتداد محورهای زیر قرار می‌گیرند

$\dot{\varphi}$	در امتداد محور x'_3 (ثابت)
$\dot{\theta}$	در امتداد خط گره‌ها
$\dot{\psi}$	در امتداد محور x_3 (جسم)

مؤلفه‌های این سرعتهای زاویه‌ای در امتداد محورهای مختصات جسمی عبارت‌اند از

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\ \sin\psi \\ \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\ \cos\psi \\ \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\theta}_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = 0 \\ \dot{\psi}_3 = \dot{\psi} \end{cases}$$

سرانجام، با جمع‌آوری تک‌تک مؤلفه‌های ω، به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب

ابتدا حرکت جسم صلب را در حالتی بررسی می‌کنیم که نیرویی بر آن وارد نیاید. در این مورد انرژی پتانسیل U صفر می‌شود و لاگرانژی L با انرژی جنبشی چرخشی T یکسان می‌شود.

محورهای x_i را چنان اختیار کنیم که بامحورهای اصلی جسم متناظر باشند، در آن صورت داریم

$$T = \frac{1}{2}\sum_i I_i \omega_i^2$$

اگر زاویه‌های اویلر را به‌عنوان مختصات تعمیم‌یافته اختیار کنیم، در آن‌صورت معادلهٔ لاگرانژ برای مختصهٔ ψ عبارت خواهد بود از

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر بیان کرد

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب

اگر از مؤلفه‌های بردار ω نسبت به ψ و $\dot{\psi}$ مشتق بگیریم، داریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial \psi} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = \omega_2 \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = -\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\cos\psi = -\omega_1 \\ \dfrac{\partial \omega_3}{\partial \psi} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = \dfrac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\ \dfrac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 1 \end{cases}$$

همچنین داریم

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i$$

بنابراین معادلات اویلر-لاگرانژ چنین می شود:

$$I_1\omega_1\omega_2 + I_2\omega_2(-\omega_1) - \frac{d}{dt}(I_3\omega_3) = 0 \longrightarrow (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب

با جایگشت شاخصهای زیرین می‌توان روابط مربوط به ω_1 و ω_2 را به‌دست آورد

$$\begin{cases} (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 = 0 \\ (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - I_2\dot{\omega}_2 = 0 \\ (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - I_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

این معادلات را معادلات اویلر برای حرکت بدون نیرو می‌نامند.

معادلات لاگرانژ برای θ و φ به‌شمار نمی‌آیند.

برای به‌دست آوردن معادلات اویلر مربوط به حرکت در یک میدان نیرو، می‌توانیم بررسی خود را از معادلهٔ اساسی مربوط به گشتاور نیروی $\mathbf{N}$ شروع کنیم

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \mathbf{N}$$

در یک چارچوب مرجع لخت برقرار است.

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{جسم}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{جسم}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}$$

مؤلفهٔ این معادله در امتداد محور x_3 (توجه داشته‌باشید که این یک محور مربوط به جسم است) عبارت خواهد بود از

$$\dot{L}_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = N_3$$

اما چون محورهای x_i را منطبق بر محورهای اصلی جسم اختیار کرده‌ایم، داریم:

$$L_i = I_i \omega_i$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1 \omega_2 = N_3$$

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب

با جایگشت شاخصهای زیرین، می‌توانیم همهٔ مؤلفه‌های $\mathbf{N}$ را بنویسیم

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

به‌طور کلی می‌توانیم بنویسیم

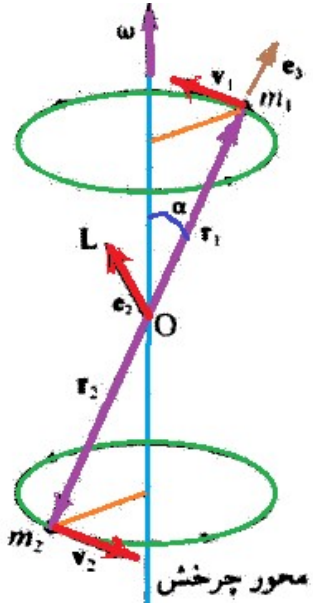
$$(I_i - I_j)\omega_i\omega_j - \sum_k (I_k\dot{\omega}_k - N_k)\epsilon_{ijk} = 0$$

معادلات اویلر برای حرکت یک‌جسم صلب در یک میدان نیرو.

حرکت هر جسم صلب فقط از طریق سه‌عدد I_1، I_2، و I_3، یعنی گشتاورهای لختی اصلی، به ساختار جسم بستگی دارد.

به‌این ترتیب، هر دو جسمی که گشتاورهای اصلی یکسانی دارند بدون توجه به این واقعیت که ممکن است دارای شکلهای کاملاً متفاوتی باشند، دقیقاً به‌طور یکسان حرکت می‌کنند.

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب



ساده‌ترین شکل هندسی که هر جسم ممکن است با سه گشتاور اصلی معلوم داشته باشد، یک بیضیوار همگن است.

مثال: تکانهٔ زاویه‌ای سیستم و گشتاور نیروی لازم برقراری حرکت را برای دمبلی که در **مثال** بخش ۳.۱۰ مطرح شد، پیداکنید.

حل: فرض کنید $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = b$. نیز فرض کنید مبدأ دستگاه مختصات ثابت جسمی در O قرار داشته‌باشد، و محور تقارن x_3 در امتداد میلهٔ بی‌وزن دمبل به‌سوی m_1 باشد.

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha$$

چون $\mathbf{L}$ عمود بر میله است و با چرخش میلهٔ $\mathbf{L}$ حول $\boldsymbol{\omega}$ می‌چرخد، فرض کنید که $\mathbf{e}_2$ در امتداد $\mathbf{L}$ واقع باشد

$$\mathbf{L} = L_2 \mathbf{e}_2$$

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب

اگر زاویهٔ بین ω و میله α باشد، مؤلفه‌های ω عبارت‌اند از

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \omega \sin\alpha \\ \omega_3 = \omega \cos\alpha \end{cases}$$

محورهای اصلی عبارت‌اند از x_1، x_2، و x_3، وگشتاورهای لختی اصلی، عبارت‌اند از

$$\begin{cases} I_1 = (m_1 + m_2)b^2 \\ I_2 = (m_1 + m_2)b^2 \\ I_3 = 0 \end{cases}$$

از ترکیب معادلات داریم

$$\begin{cases} L_1 = I_1\omega_1 = 0 \\ L_2 = I_2\omega_2 = (m_1 + m_2)b^2\omega\sin\alpha \\ L_3 = I_3\omega_3 = 0 \end{cases}$$

فصل ۱۰: معادلات اویلر برای جسم صلب

با استفاده از معادلات اویلر و $\omega = 0$، مؤلفه‌های گشتاور نیرو عبارت‌اند از

$$\begin{cases} N_1 = -(m_1 + m_2)b^2\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha \\ N_2 = 0 \\ N_3 = 0 \end{cases}$$