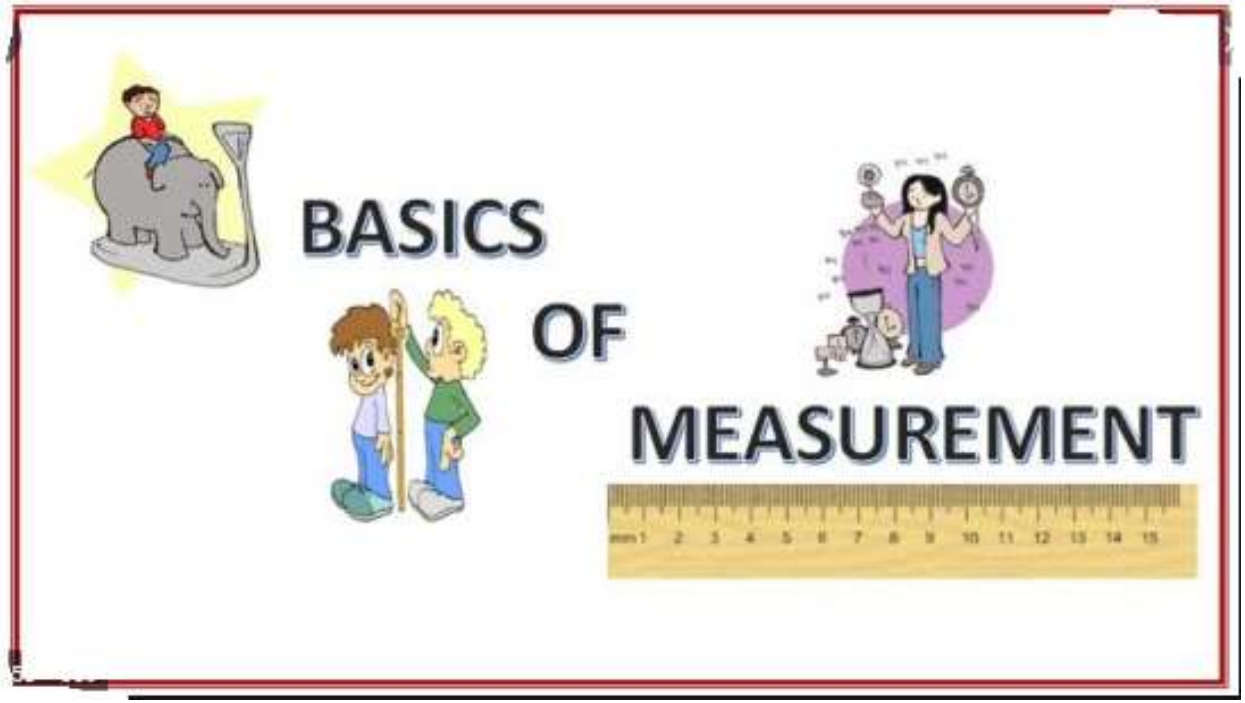

فیزیک پایه ۱
کتاب مرجع: فیزیک (جلد اول) دیوید هالیدی و رابرت رزنیک
تهیه کننده: سید یاسر ایازی

فصل ۱) اندازه گیری



کمیتهای فیزیکی، استانداردها و یکاها

دستگاه بین المللی یکاها

استاندارد طول

استاندارد جرم

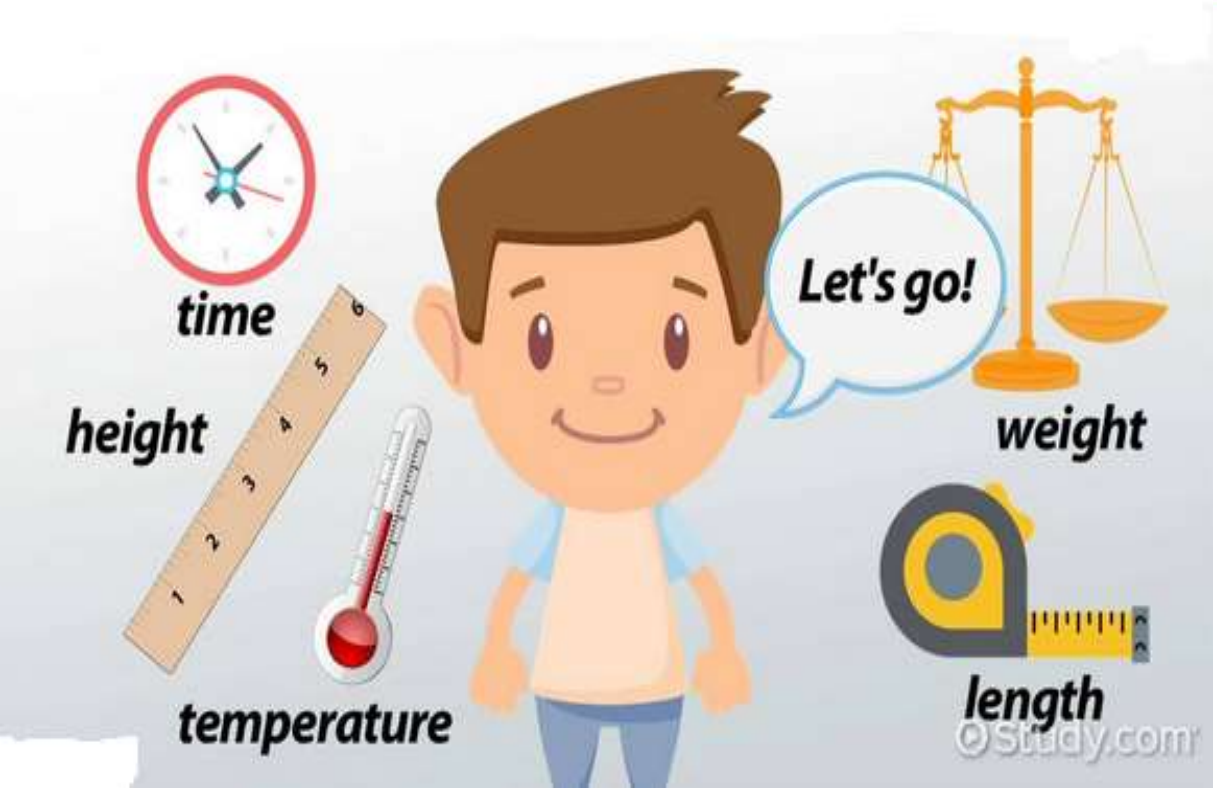
استاندارد زمان

فصل ۱) کمیتهای فیزیکی ، استانداردها ، و یکاها

سنگ بنای علم فیزیک کمیتهای فیزیکی است که ما برای بیان قوانین فیزیک از آنها استفاده می کنیم .

تعداد کمیتهای فیزیکی بسیار زیاد است. این کمیتها از هم مستقل نیستند. به عنوان مثال ، سرعت برابر نسبت طول به زمان است.

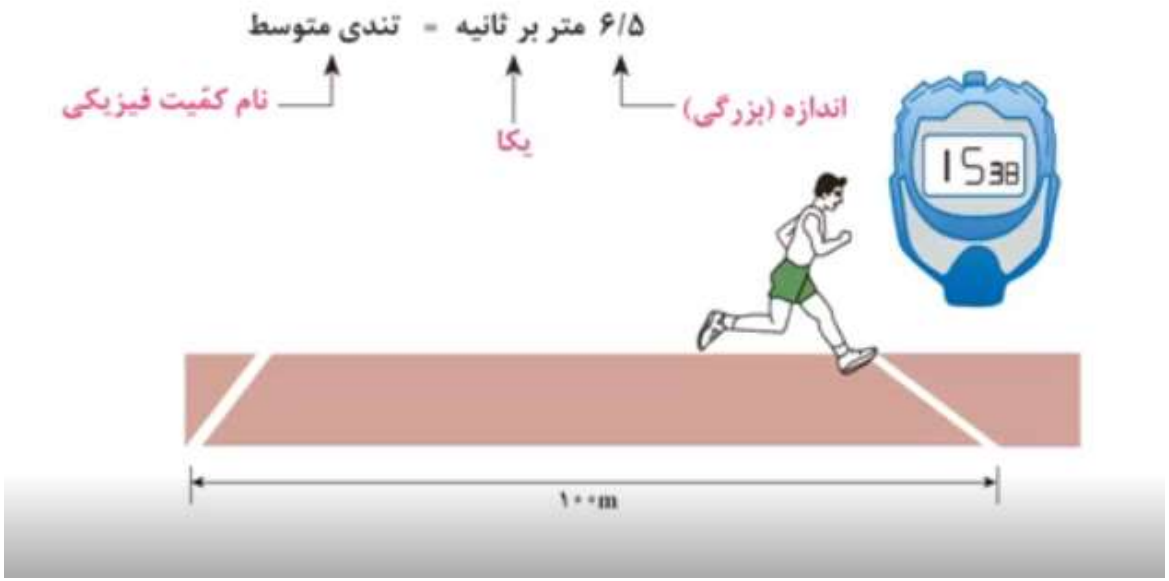
کاری که باید بکنیم این است که از میان تمام کمیتهای فیزیکی ممکن چند کمیت مشخص را انتخاب کنیم و آنها را کمیتهای اصلی بنامیم



بقیه کمیتها را از این کمیتها ی اصلی به دست می آوریم . که آن را کمیت فرعی می نامیم.

برای هر یک از این کمیتهای اصلی استانداردی د رنظر می گیریم . به عنوان مثال ، اگر طول را کمیت اصلی انتخاب کنیم ، متر را به عنوان استاندارد آن در نظر می گیریم.

کمیتهای فیزیکی ، استانداردها ، و یکاها



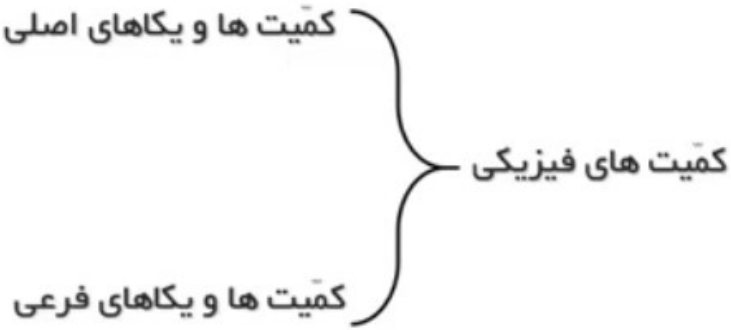
چند کمیت را باید به عنوان کمیت اصلی انتخاب کنیم ؟ ب) اینها چه کمیتهایی باید باشند ؟

پاسخ این دو پرسش این است که کمترین تعداد از کمیتهای فیزیکی را که بتوانندبه ساده ترین صورت توصیف کاملی از فیزیک به دست بدهند انتخاب می کنیم .

برای این کا رامکانات متعددی وجود دارد . مثلا نیرو در یک دستگاه کمیت اصلی و در دستگاهی که ما انتخاب خواهیم کرد کمیت فرعی است

فصل ۱) کمیتهای فیزیکی ، استانداردها ، و یکاها







در سیستم بین المللی، کمیتهای اصلی در مکانیک طول، زمان و جرم می باشد.

QUANTITY	UNIT NAME	UNIT SYMBOL
Length	meter	m
Time	second	s
Mass	kilogram	kg

یکاهای فرعی مانند سرعت، نیرو ، مقاومت الکتریکی ، و نظایر آنها است.

مثلا یکای نیرو در دستگاه بین المللی یکاها ، که نیوتون با نماد نامیده می شود بر حسب یکاهای اصلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$1N=1m.kg/s^2$$

International System of Units - SI



- kelvin *(temperature)*
- meter *(distance)*
- ampere *(electric current)*
- second *(time)*
- mole *(amount of substance)*
- kilogram *(mass)*
- candela *(intensity of light)*

فصل ۱) کمیتهای فیزیکی ، استانداردها ، و یکاها

مثال

در دستگاه بین‌المللی یکاها یکای نیرو را به‌دست آورید.

پاسخ: نیرو یک کمّیت فرعی است زیرا به کمّیت‌های دیگری وابسته است. در علوم تجربی سال نهم آموختید:

$$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

حال اگر بخواهیم یکای نیرو را به عنوان یک کمّیت فرعی در دستگاه بین‌المللی یکاها به‌دست آوریم می‌بایست با توجه به محل قرارگیری هر یک از کمّیت‌ها در رابطه بالا، یکای آنها را در محل خود قرار دهیم، یعنی:

$$\text{یکای نیرو } (F) = \text{kg} \times \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

فصل ۱) دستگاه بین المللی یکاها

برای بیان اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک معمولا از پیشوندهای جدول زیر استفاده می شود

FACTOR	PREFIX	SYMBOL	FACTOR	PREFIX	SYMBOL
10^{24}	yotta-	Y	10^{-24}	yocto-	y
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	**10^{-12}**	**pico-**	**p**
10^{9}	**giga-**	**G**	**10^{-9}**	**nano-**	**n**
10^{6}	**mega-**	**M**	**10^{-6}**	**micro-**	**μ**
10^{3}	**kilo-**	**k**	**10^{-3}**	**milli-**	**m**
10^{2}	hecto-	h	**10^{-2}**	**centi-**	**c**
10^{1}	deka-	da	10^{-1}	deci-	d

فصل ۱) استاندارد طول

اولین استاندارد بین المللی طول میله ای بود از آلیاژ پلاتین – ایریدیوم به نام متر استاندارد که اکنون در اداره بین المللی اوزان و مقیاسها نگه داری می شود.

مهترین ایراد میله متر دقت بسیار کم آن است.

استاندارد های دیگر طول، طول موج نور و استاندارد اتمی است.



استاندارد جرم استوانه ای از پلاتین – ایریدیوم است که در اداره بین المللی اوزان و مقیاسها نگه داری می شود و طبق توافق بین المللی جرم یک کیلوگرم به آن نسبت داده شده است.

در مقیاس اتمی، جرم اتم که بنا به تعریف ۱۲ برابر یکای اتمی جرم است، u

استاندارد جرم است:

$$1\,\mathrm{u} = 1.6605402 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg},$$



هر پدیده تکرار شونده را می توان به عنوان معیار زمان بکاربرد.مثلا چرخش زمین به دور خودش نخستین استاندارد زمان بود.

ارتعاشات بلور کوارتز استاندارد خوبی برای زمان است.

اکنون ساعتهای اتمی که بر اساس بسامد مشخصه ایزوتوپ سزیم ۱۳۳کار می کنند به عنوان استاندارد بین المللی زمان پذیرفته شده است.

۱. چگالی آب تقریباً $۱\ gr/cm^۳$ است. این چگالی بر حسب یکاهای اصلی SI چقدر است؟

حل:

$$۱Kg = ۱۰۰۰gr \quad , \quad ۱m^۳ = ۱۰^۶ cm^۳$$

$$۱\frac{gr}{cm^۳} = ۱\frac{gr}{cm^۳} \times \frac{۱Kg}{۱۰۰۰gr} \times \frac{۱۰^۶ cm^۳}{۱m^۳} = ۱۰^۳ \frac{Kg}{m^۳} = ۱۰۰۰\frac{Kg}{m^۳}$$

۲. یک سال خورشیدی چند ثانیه است؟ (هر سال را برابر با ۳۶۵/۲۵ روز بگیرید.)

حل: سال را با y و روز را با d مشخص می کنیم:

$$1y = ۳۶۵/۲۵\,d \quad , \quad 1d = ۲۴h \quad , \quad 1h = ۳۶۰۰s$$

$$1y = 1y \times \frac{۳۶۵/۲۵\,d}{1y} \times \frac{۲۴h}{1d} \times \frac{۳۶۰۰s}{1h} = ۳۱۵۵۷۶۰۰s$$

فصل ۱) اندازه گیری

فصل ۱) اندازه گیری

فصل ۱) اندازه گیری

بردارها و نرده ایها

جمع بردارها

ضرب بردارها

سوال ۲ : اگر از ما پرسیده شود این جسم چقدر از محل اولیه ی خود جابجا شده است آیا همه چیز در مورد آن معلوم است؟

پاسخ: خیر – چون معلوم نیست جسم در کدام جهت جابجا شده است.

نتیجه: کمیت های فیزیکی از یك لحاظ به دو دسته تقسیم می شوند:

کمیت های نرده ای : کمیت هایی هستند که فقط دارای اندازه (مقدار) باشند.

کمیت های برداری : کمیت هایی هستند که علاوه بر اندازه (مقدار) دارای جهت هم باشند.

مثال برای کمیت های نرده ای : جرم ، انرژی، فشار ، حجم ، چگالی ، کار

مثال برای کمیت های برداری : سرعت، شتاب ، نیرو ، تکانه ، جابجایی ، بردار مکان

سوال ۳ : چگونه کمیت های برداری و نرده ای را از هم تشخیص دهیم؟

پاسخ: کافی است بپرسیم " در کدام جهت؟ " اگر سوال معنی دار بود آن کمیت برداری است.
و اگر بی معنی بود نرده ای است.

arafatom/khalorgh.com

آشنایی با مفهوم بردار

الف . آشنایی با کمیت های نرده ای و برداری

. برای معلوم کردن بعضی کمیت ها علاوه بر اندازه ، جهت کمیت را هم باید بدانیم. **مثل سرعت**

یك مثال دیگر

انرژی پتانسیل گرانشی جسمی به جرم ۲ کیلوگرم که در ارتفاع ۱۰ متری از سطح زمین قرار دارد را حساب کنید.

پاسخ

$$U = mgh$$

کمیتهایی که با یک عدد و یک یکا به طور کامل مشخص می شوند و از این رو فقط دارای بزرگی هستند *کمیتهای نرده ای* می گویند. مانند طول، زمان، چگالی، جرم، انرژی و دما و ...

کمیتهایی که علاوه بر اندازه دارای جهت هستند *کمیتهای برداری* نام دارند مانند نیرو، سرعت، شتاب، جابجایی و ...

محاسبات مربوط به کمیتهای نرده ای قواعد معمولی جبر است در صورتی که محاسبات مربوط به کمیت های برداری به صورت دیگری تعریف می شود.

سوال۴: چرا نرده ای بودن یا برداری بودن کمیت های فیزیکی برای ما مهم است؟

پاسخ: چون عملیات جبری مربوط به این دو نوع کمیت با هم فرق دارد.

تعریف ریاضی بردار: بردارها پاره خط های جهت داری هستند که آن ها را با یک پیکان نشان می دهیم.



تعریف فیزیکی بردار: هر کمیت فیزیکی که علاوه بر اندازه ، دارای جهت هم باشد.

یک بردار از دو قسمت اصلی تشکیل می شود:

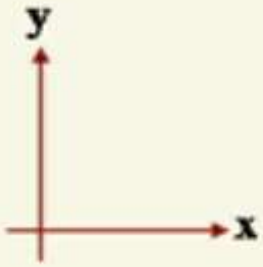
تعریف فیزیکی بردار: هر کمیت فیزیکی که علاوه بر اندازه ، دارای جهت هم باشد.

یك بردار از دو قسمت اصلی تشکیل می شود:

- **اندازه (بزرگی - مقدار) :** طول بردار را می گویند.
- **جهت :** از دوقسمت تشکیل می شود:
  - **راستا :** امتداد خطی است که بردار روی آن قرار دارد.
  - **سو :** یکی از دو طرف راستا است که آن را با پیکان نشان می دهیم.

نتیجه: برای شناخت یك بردار ، باید راستا و سوی آن بردار را بشناسیم.

مثال: اندازه و جهت بردار های زیر را به طور نسبی با هم مقایسه کنید.

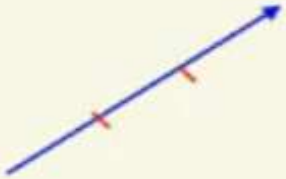




الف



ب



ج

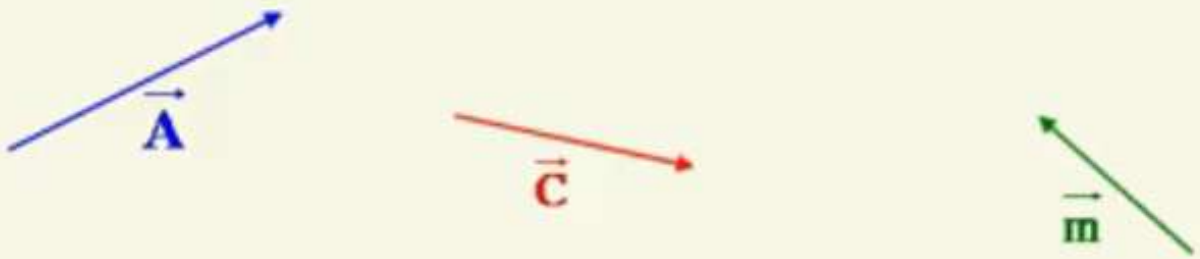
پاسخ: طول بردار الف یك واحد ، طول بردار ب دو واحد و طول بردار ج ، سه واحد می باشد.

راستای بردار الف ، محور x ها و سوی آن در جهت x− ها است.

راستای بردار ب ، محور y ها و سوی آن در جهت y+ ها است.

راستای بردار ج ، خط y=x و سوی آن در جهت شمال شرقی است.

قرارداد: بردارها را با حروف لاتین نشان می دهیم و برای تشخیص آن ها از کمیت های نرده ای ، بر روی آن ها یك علامت پیکان قرار می دهیم.



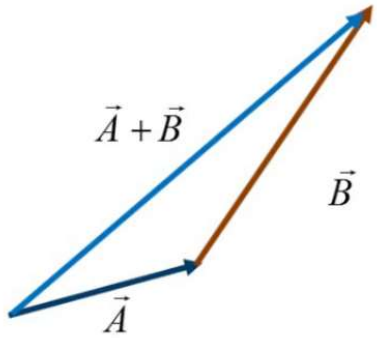
سوال: آیا هر کمیت فیزیکی که دارای اندازه و جهت باشد الزاما کمیتی برداری است؟

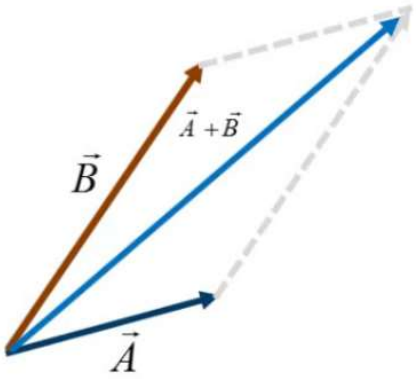
پاسخ: خیر – بعضی از کمیت ها هستند که دارای اندازه و جهت هستند اما کمیت برداری نیستند مانند جریان الکتریکی

برای این که یک کمیت برداری باشد باید بردار آن تحت تبدیلات دورانی ناوردا باشد.

قوانین ساده بردارها

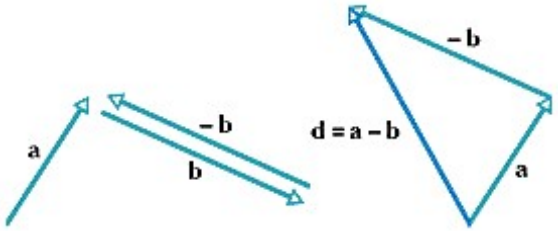
- جمع بردار ها :





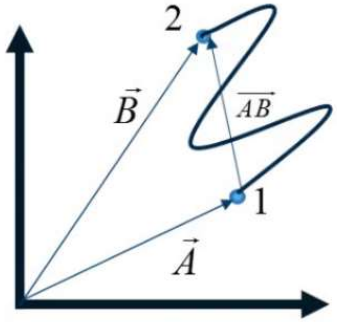
$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

تفریق بردارها- روش هندسی:



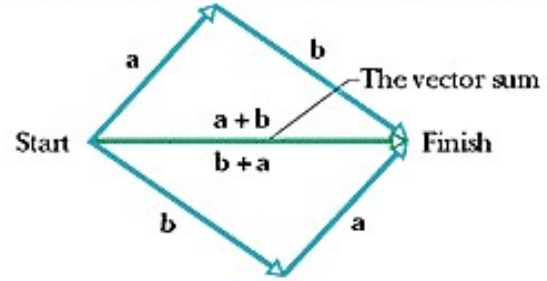
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

بردار جابجایی



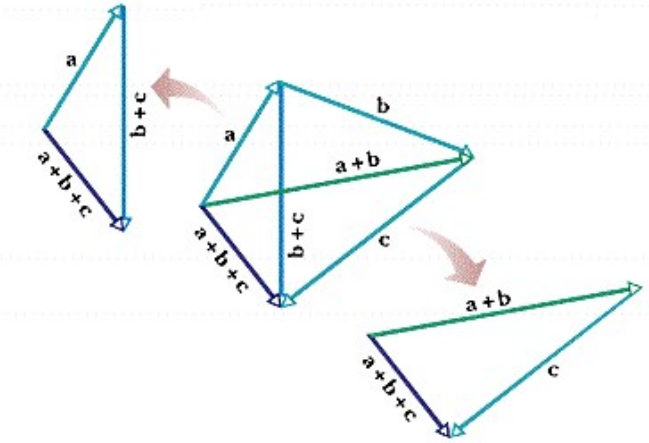
$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

بردار مکان نقطه ابتدایی- بردار مکان نقطه انتهایی = بردار جابجایی



خاصیت جابجایی:

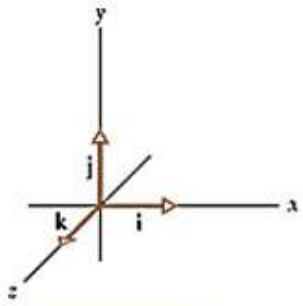
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$



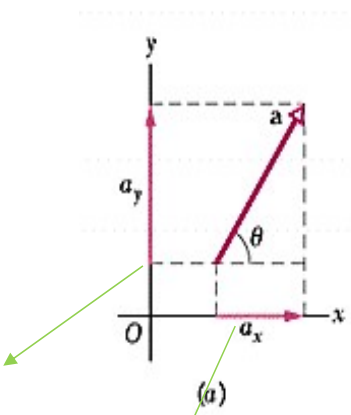
خاصیت شرکت پذیری:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

نوشتن یک بردار بر حسب مولفه ها و بردارهای یکه و محاسبه اندازه و جهت آن با استفاده از مولفه ها:



بردارهای یکه



$$a_y = a \sin\theta$$

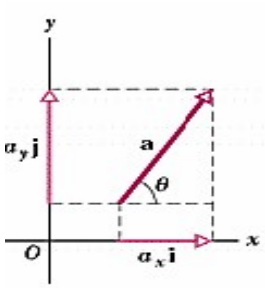
$$a_x = a \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

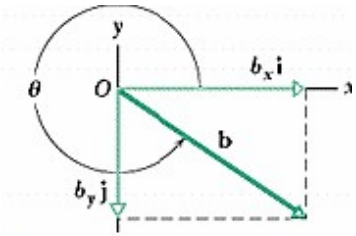
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

روش تحلیلی جمع دو بردار در صفحه :

هریک از بردارها را حسب مولفه ها و بردارهای یکه می نویسیم:



$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$



$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

مولفه های بردار برایند و اندازه وجهت آن را به دست می آوریم:

$$r_x = a_x + b_x,$$
$$r_y = a_y + b_y.$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{r_y}{r_x}$$

ضرب داخلی به چه معنا است؟

حاصل ضرب داخلیِ دو بردار که به صورت زیر نشان داده می‌شود، یک عدد اسکالر است.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

این عبارت به صورت «حاصل ضرب داخلی بردار **a** در بردار **b**» خوانده می‌شود. مقدار این حاصلضرب با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(\theta)$$

اجزاء این فرمول به ترتیب زیر هستند:

$|\mathbf{a}|$: اندازه (طول) بردار **a**

$|\mathbf{b}|$: اندازه (طول) بردار **b**

θ: زاویه بین بردار **a** و **b**

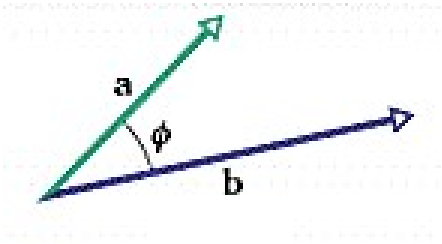
بنابراین به‌منظور محاسبه ضرب داخلی، ابتدا اندازه دو بردار **a** و **b**، در یکدیگر ضرب شده، سپس مقدار بدست آمده، در کسینوس زاویه بین دو بردار ضرب می‌شود.

اگر بردارهای مذکور در مختصات کارتزینی بیان شده باشند [$\mathbf{a}=(a_x,a_y)$ و $\mathbf{b}=(b_x,b_y)$]، ضرب داخلی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \times b_x) + (a_y \times b_y)$$

بنابراین مولفه‌های x دو بردار در یکدیگر و مولفه‌های y آن‌ها نیز در هم ضرب شده و نهایتا با یکدیگر جمع می‌شوند.

ضرب نقطه ای یا اسکالر:



$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi = \text{عدد}$$

ضرب نقطه ای بردارهای یکه:

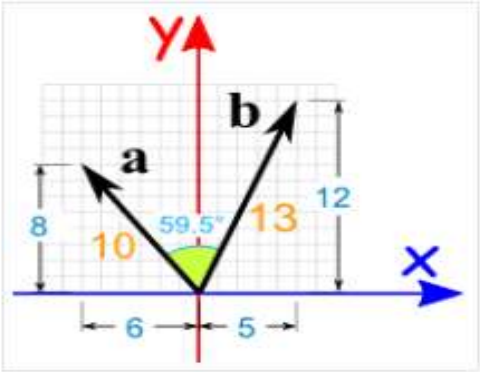
$$i.i = j.j = k.k = 1$$
$$i.j = i.k = j.k = ... = 0$$

محاسبه زاویه بین دو بردار :

$$Cos\phi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

مثال ۱

ضرب داخلی دو بردار **a** و **b** را که در شکل زیر آمده، محاسبه کنید.



روش اول: با استفاده از معادله $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(\theta)$ و جایگذاری کردن اندازه بردارهای مفروض در این معادله، داریم:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 \times 13 \times \cos(59.5°)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 \times 13 \times 0.5075...$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 65.98... = 66 \text{ (گرد شده)}$$

روش دوم: می‌توان مولفه‌های دو بردار مفروض را در معادله $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (ax \times bx) + (ay \times by)$ قرار داد. بنابراین داریم:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -6 \times 5 + 8 \times 12$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -30 + 96$$

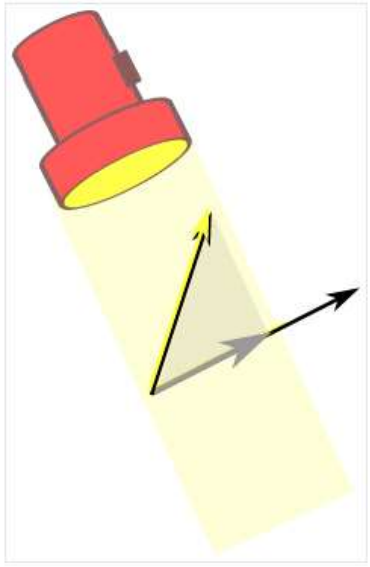
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 66$$

توجه داشته باشید که a_x منفی در نظر گرفته شده، چراکه جهت آن خلاف جهتِ مثبتِ محور x است. همان‌طور که می‌بینید مقدار بدست آمده در بالا یک عدد است. بنابراین بر خلاف **ضرب خارجی دو بردار**، حاصل ضرب داخلی عددی **اسکالر** (نرده‌ای) است.

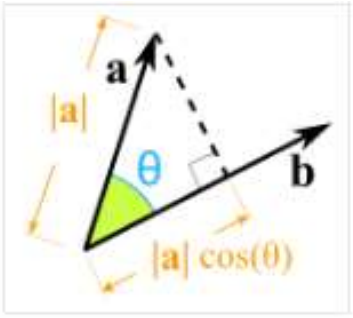
چرا Cos (θ) ؟

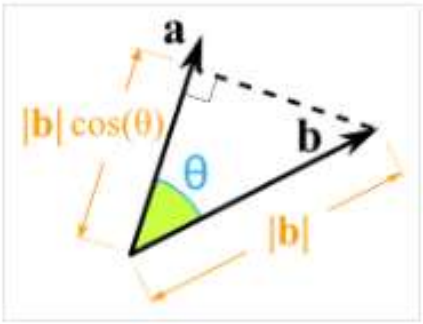
اگر دو بردار در یک راستا باشند، ضرب داخلی آن‌ها در واقع همان ضرب طولشان است؛ بنابراین ضرب دو بردار در چنین شرایطی قابل درک است. در نتیجه به‌منظور انجام ضرب داخلی تحت هر شرایطی، دو بردار را بایستی در یک جهت قرار داد.

در حقیقت ضرب داخلی، معادل با ضرب طول تصویر شده یکی از بردارها در طول دیگری است.



هم‌چنین برای تصویر کردن یک بردار روی برداری دیگر، بایستی بردار اول را در Cos زاویه بینشان ضرب کرد.

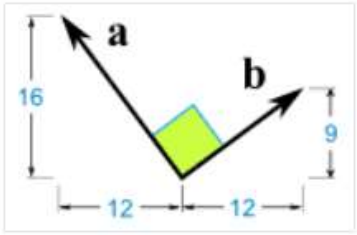




دو بردار عمود بر هم

مثال ۲

ضرب داخلی دو بردار شکل زیر را محاسبه کنید.



$$a \cdot b = |a| \times |b| \times \cos(90°)$$

$$a \cdot b = |a| \times |b| \times 0$$

$$a \cdot b = 0$$

و یا با استفاده از روش دوم می‌توان بیان کرد:

$$a \cdot b = -12 \times 12 + 16 \times 9$$

$$a \cdot b = -144 + 144$$

$$a \cdot b = 0$$

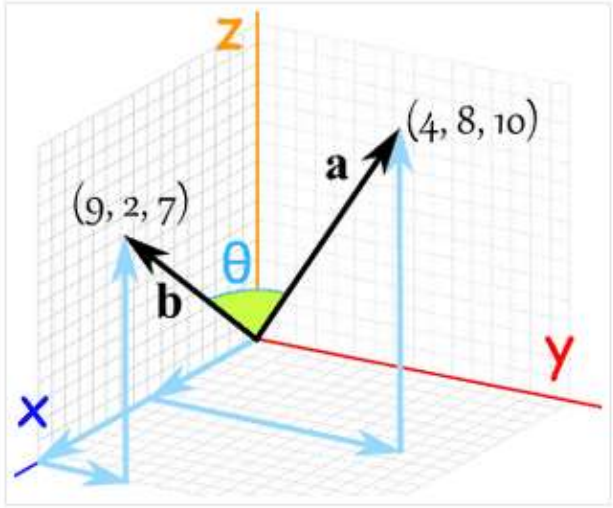
همان‌طور که می‌بینید ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم، صفر است.

ضرب داخلی بردارها در ابعاد بالاتر

به‌منظور محاسبه ضرب داخلی در سه یا چند بعد، مشابه با روش‌های بیان شده در بالا عمل می‌شود.

مثال ۳

زاویه میان دو بردار رسم شده در شکل زیر را بیابید.



ضرب داخلی بردارها در ابعاد بالاتر

در این مثال مولفه z نیز وجود دارد، بنابراین بایستی تاثیر آن را هم در نظر گرفت. در واقع در این حالت، فرمول ضرب داخلی به صورت $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y + a_z \times b_z$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با جایگذاری مولفه‌های بردارها در این فرمول خواهیم داشت:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 9 \times 4 + 2 \times 8 + 7 \times 10$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 36 + 16 + 70$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 122$$

از طرفی با استفاده از فرمول $\mathbf{a}.\mathbf{b}=|a| \times |b| \times \cos(\theta)$ نیز می توان ضرب داخلی را حساب کرد. ولی قبل از محاسبه، بایستی اندازه دو بردار مفروض، محاسبه شوند. بنابراین مطابق با قانون فیثاغورث نتیجه می‌شود:

$$|a| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 10^2}$$
$$\rightarrow |a| = \sqrt{16 + 64 + 100} = \sqrt{180}$$

ضرب داخلی بردارها در ابعاد بالاتر

بر همین مبنا اندازه بردار **b** برابر است با:

$$|b| = \sqrt{9^2 + 2^2 + 7^2}$$
$$|b| = \sqrt{81 + 4 + 49} = \sqrt{134}$$

از طرفی در بالا نیز مقدار **a.b** برابر با ۱۲۲ محاسبه شد. با جایگذاری این مقدار و اندازه‌های بردار a و b در فرمول **a.b**=|a| × |b| × cos(θ)، کسینوس زاویه بین دو بردار به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$122 = \sqrt{180} \times \sqrt{134} \times \cos(\theta)$$
$$\cos(\theta) = 122 / (\sqrt{180} \times \sqrt{134})$$
$$\cos(\theta) = 0.7855...$$
$$\theta = \cos^{-1}(0.7855) = 38.2°$$

در مطلب آینده در مورد نوع دیگری از ضرب بردارها، تحت عنوان ضرب خارجی را توضیح خواهیم داد.

ضرب داخلی بردارها در ابعاد بالاتر

مثال)زاویه بین دو بردار $a = 3i - 4j$ و $b = -2i + 3k$ را بدست آورید:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi = \sqrt{3.0^2 + 4.0^2}\sqrt{2.0^2 + 3.0^2}\cos\phi = 18.0\cos\phi.$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (3.0\mathbf{i} - 4.0\mathbf{j})\cdot(-2.0\mathbf{i} + 3.0\mathbf{k}).$$

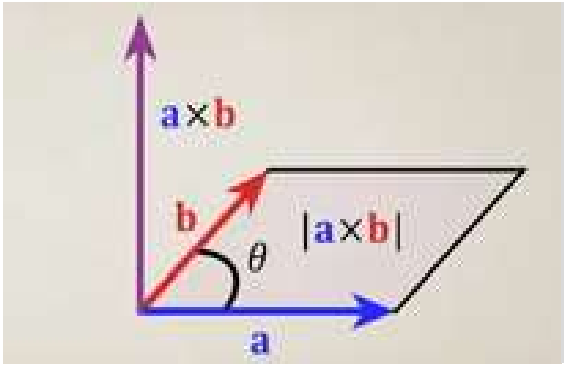
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (3.0\mathbf{i})\cdot(-2.0\mathbf{i}) + (3.0\mathbf{i})\cdot(3.0\mathbf{k}) + (-4.0\mathbf{j})\cdot(-2.0\mathbf{i}) + (-4.0\mathbf{j})\cdot(3.0\mathbf{k}).$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -(6.0)(1) + (9.0)(0) + (8.0)(0) - (12)(0) = -6.0.$$

$$\phi = \cos^{-1}\frac{-6.0}{18.0} = 109^\circ \approx 110^\circ.$$

تعریف ضرب خارجی

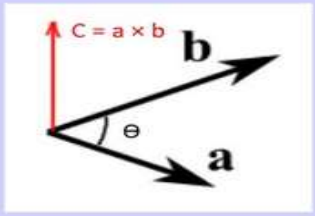
ضرب خارجی، به عملیاتی در ریاضیات گفته می‌شود که با استفاده از آن می‌توان دو بردار را در فضایی دو یا چند بعدی در هم ضرب کرد. بر خلاف ضرب داخلی، حاصل این نوع ضرب، کمیتی برداری خواهد بود.



محاسبه ضرب خارجی

محاسبه ضرب خارجی

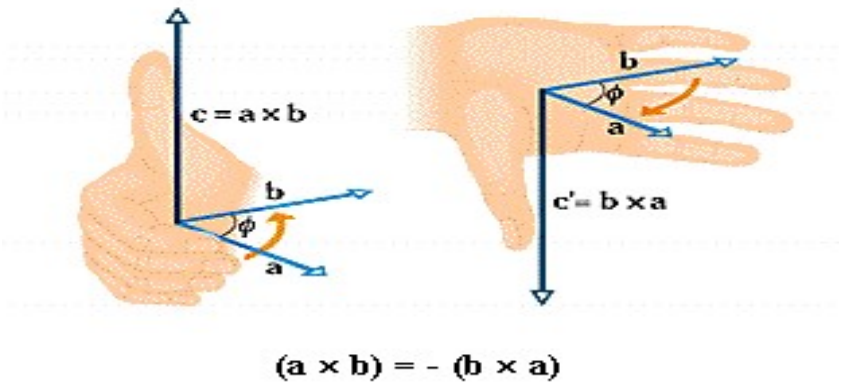
همانند شکل زیر دو بردار a و b را تصور کنید.



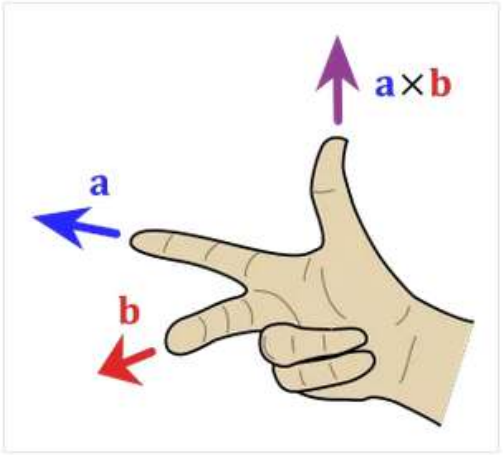
- که **اندازه c بردار دیگری** است مانند a و bحاصل ضرب **برداری** دو بردار آن برابر است با:

$$c = ab \sin \phi,$$

- است و از قاعده دست راست تعیین می **a و bجهت** آن **عمود بر صفحه** گردد:



$$(a \times b) = - (b \times a)$$



قانون دست راست

اگر بردارهای a و b در دستگاه مختصات کارتزینی و به صورت $a = (a_x, a_y, a_z)$ و $b = (b_x, b_y, b_z)$ بیان شوند، حاصل‌ضرب خارجی را می‌توان به شکل محاسبه کرد.

- $c_x = a_y b_z - a_z b_y$
- $c_y = a_z b_x - a_x b_z$
- $c_z = a_x b_y - a_y b_x$

معادلات بالا در حقیقت دترمینان یک ماتریس هستند. به منظور درک بهتر، دو بردار $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که در بالا نیز بیان شد حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، کمیتی برداری است؛ برای محاسبه حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار می‌توان از دترمینان ماتریس زیر استفاده کرد.

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\vec{\mathbf{i}} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\vec{\mathbf{j}} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\vec{\mathbf{k}}$$

حاصل ضرب برداری **بردارهای یکه** :

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$
$$\imath \times j = k, k \times i = j, j \times k = i, \ldots$$

ضرب نقطه ای دارای **خاصیت جابجایی** است ولی ضرب برداری دارای خاصیت جابجایی نیست:

$$a.b = b.a$$

$$a \times b = -b \times a$$

نمایش حاصلضرب برداری با استفاده بردار های یکه:

$$a \times b = i(a_y b_z - a_z b_y) + j(a_z b_x - a_x b_z) + k(a_x b_y - a_y b_x)$$

مثال

حاصلضرب خارجی دو بردار a=(۲,۳,۴) و b=(5,6,7) را بیابید. با توجه به فرمول بالا می‌توان گفت:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y = 3\times 7 - 4\times 6 = -3$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z = 4\times 5 - 2\times 7 = 6$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x = 2\times 6 - 3\times 5 = -3$$

بنابراین با محاسبه عبارات بالا، پاسخ مد نظر برابر با مقدار زیر است.

$$a \times b = (-3, 6, -3)$$

مثال: حاصل ضرب برداری $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ را به دست آورید

SOLUTION:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{c} = -(3\mathbf{i} \times 2\mathbf{i}) + (3\mathbf{i} \times 3\mathbf{k}) + (4\mathbf{j} \times 2\mathbf{i}) - (4\mathbf{j} \times 3\mathbf{k}).$$

$$\mathbf{c} = 0 - 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k} - 12\mathbf{i} = -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

فصل ۳ : حرکت یک بعدی
سقوط آزاد





فصل ۳ : حرکت یک بعدی

مکانیک

سرعت متوسط

سرعت لحظه ای

شتاب

شتاب ثابت

سقوط آزاد

فصل ۳ : مکانیک

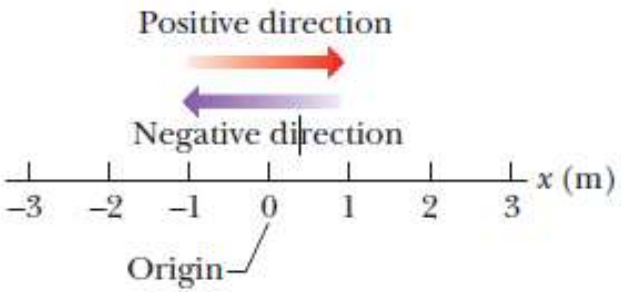
مکانیک شامل دو بخش است: سینماتیک و دینامیک.

هنگامی که حرکت را بدون مطالعه علل آن بررسی می کنیم با سینماتیک حرکت سرکار داریم.

هنگامی که حرکت را به نیروهای وابسته به آن ربط می دهیم با دینامیک سرکار داریم.

دراین فصل سینماتیک حرکت را بررسی می کنیم و اجسام ذرات یا نقاط مادی بدون بعد فرض می شوند.

موضع ذره در یک چارچوب مرجع خاص با بردار مکان مشخص می گردد که ابتدای آن در مبدأ مختصات و انتهای آن روی خود ذره است.



سرعت ذره ، آهنگ تغییر مکان ذره نسبت به زمان است.

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

سرعت متوسط عبارت است از میزان تغییرات بردار مکان نسبت به زمان.

$$v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

فصل ۳ – سرعت متوسط

آهنگ تغییر مکان یک متحرک نسبت به زمان را سرعت متوسط گویند.



سرعت متوسط یک بردار است که جهت آن در جهت Δr و بزرگی آن برابر $\left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right|$ است.

سرعت متوسط به ما می‌گوید که در مدت زمان معین یک متحرک چقدر می‌تواند حرکت کند یا چه مدت طول می‌کشد تا متحرک مقدار مشخصی حرکت کند.

سرعت متوسط صرفا" به جابجایی کل و زمان کل سپری شده بستگی دارد.

اگر ذره متحرکی پس از مدت زمانی دوباره به جای اولش برگردد سرعت متوسط آن در این فاصله زمانی صفر است

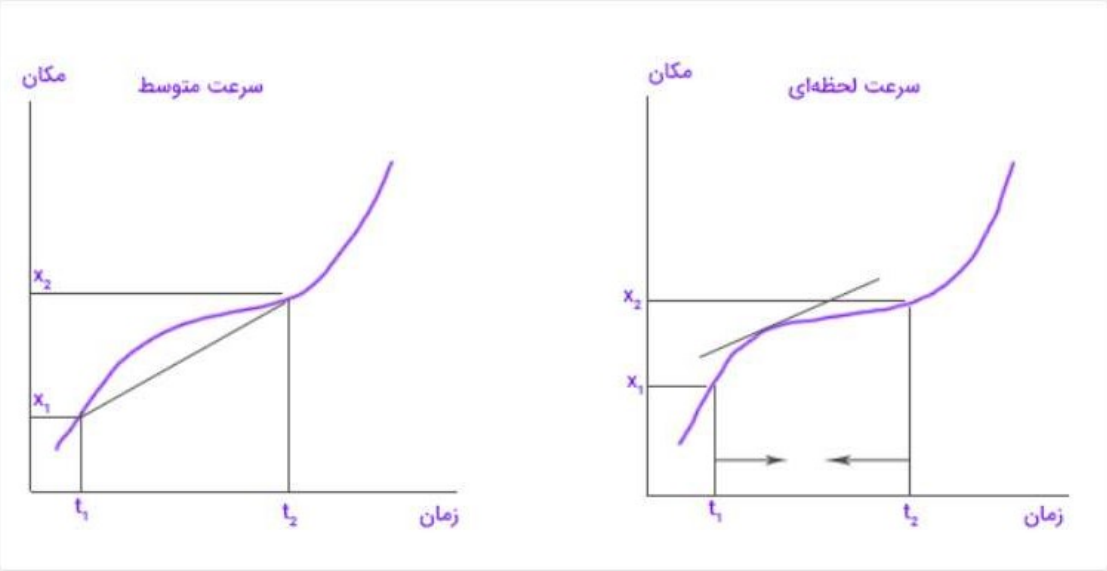
فصل ۳ : سرعت لحظه ای

نکته ۱: اگر شیب نمودار مکان-زمان در هر نقطه ثابت باشد، جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بنابراین، سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای آن با یکدیگر برابر هستند.

نکته ۲: اگر شیب نمودار مکان-زمان، منفی باشد، سرعت جسم با گذشت زمان، کاهش می‌یابد.

نکته ۳: اگر شیب نمودار مکان-زمان، مثبت باشد، سرعت جسم با گذشت زمان، افزایش می‌یابد.

نکته ۴: اگر سرعت‌های متوسط و لحظه‌ای با یکدیگر برابر باشند، حرکت جسم، حرکت با سرعت ثابت نام دارد.



سرعت متوسط و لحظه‌ای

فصل ۳ : سرعت متوسط

سرعت یک کمیت برداریست چون از تقسیم بردار جابجایی (کمیت برداری) به زمان (عدد یا کمیت اسکالر) بدست می‌آید.

مثال: متحرکی در مبدأ زمان در ۴ متری مبدأ مکان قرار دارد.اگر پس از ۷ ثانیه این متحرک در۲۵ متری مبدأ و در همان جهت اولیه خود باشد، (در سمت راست) سرعت متوسط متحرک در طول مسیر چقدر بوده است؟

$$x_1 = 4m \quad \Delta x_2 = 25m \Rightarrow \overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 - 4}{7} = \frac{21}{7} = 3\frac{m}{s}$$

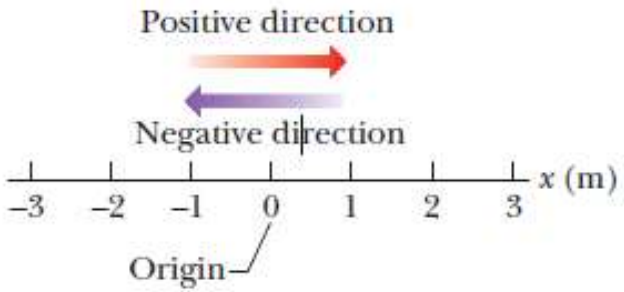
فصل ۳ : سرعت لحظه ای

سرعت لحظه ای – سرعت در هر لحظه از زمان یا در بازه زمانی بسیار کوچک Δt را سرعت لحظه ای نامند.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

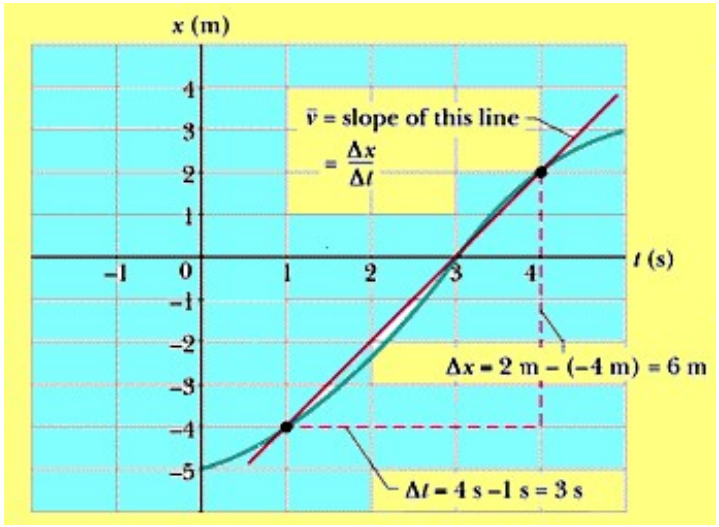
با مشتق گیری زمانی از بردار مکان سرعت لحظه ای بدست می آید.

در حرکت یک بعدی مثلا" در امتداد x ها، بردارهای مکان، سرعت دارای یک مولفه اند.



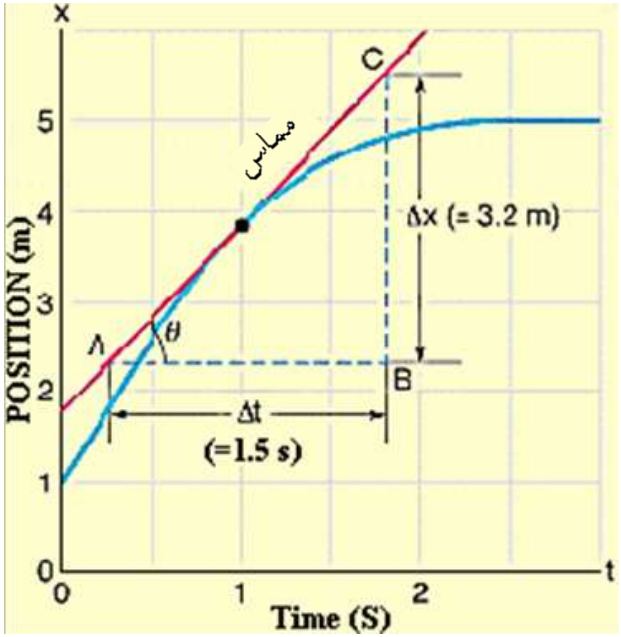
اگر $x>0$ ذره سمت راست محور است و اگر $x<0$ باشد ذره در سمت چپ محو است

اگر $v_x \prec 0$ ، حرکت در جهت منفی محور است و اگر $v_x \succ 0$ حرکت در جهت مثبت محور



سرعت متوسط در حرکت یک بعدی بین دو لحظه زمانی از شیب خطی که این دو نقطه را در روی منحنی مکان–زمان به یک دیگر وصل می کند به دست می آید.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = ۲$$



سرعت لحظه ای در حرکت یک بعدی در هر لحظه از زمان از شیب خط مماس بر منحنی مکان–زمان در آن نقطه به دست می آید.

$$\text{شیب} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5.5\ \text{m} - 2.3\ \text{m}}{1.8\ s - 0.3\ s} = \frac{3.2\ \text{m}}{1.5\ s} = +2.1\ \text{m/s}.$$

فصل ۳ : شتاب متوسط



اگر سرعت جسم متحرک در حین حرکت از **لحاظ بزرگی ، جهت یا هردو تغییر کند** ، گویی جسم **شتاب** دارد.

شتاب میزان تغییرات سرعت نسبت به زمان است.

شتاب متوسط: اگر در بازه زمانی Δt میزان تغییرات سرعت $\Delta \vec{v}$ باشد ، شتاب متوسط برابر است با :

$$a_{avg} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

شتاب متوسط کمیتی برداری است چون از تقسیم بردار $\Delta \vec{v}$ برکمیت نرده ای Δt بدست می آید.

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

جهت شتاب در جهت $\Delta \vec{v}$ است.

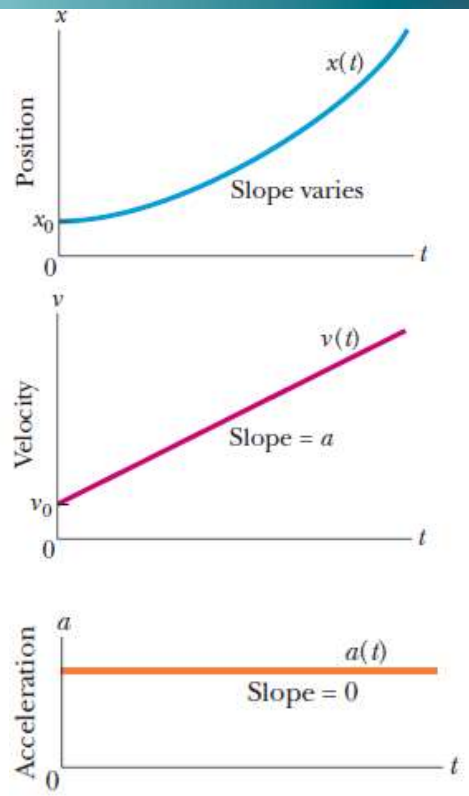
شتاب لحظه ای: شتاب در هر لحظه از زمان یا در بازه زمانی بی نهایت کوچک را شتاب لحظه ای نامند

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

مثال ۲) یوسین بولت، دونده جامائیکایی، در فینال مسابقات المپیک ۲۰۱۲ لندن، با شتاب ۶ شروع به استارت زدن کرد. با فرض این‌که او ۲ ثانیه با همین شتاب بدود، سرعت وی چقدر خواهد شد؟

شتاب ۶ متر بر مجذور ثانیه، یه این معنا است که در هر ثانیه سرعت او ۶ متر بر ثانیه زیاد می‌شود، بنابراین سرعت وی پس از ۲ ثانیه برابر با ۱۲=۶×۲ خواهد بود.

جالب است بدانید که اگر وی می‌توانست فقط ۱۰ ثانیه با این شتاب بدود، سرعت او به ۲۱۶ کیلومتر در ساعت می‌رسید!



حرکت در یک بعد و شتاب نیز ثابت است. در این حالت شتاب متوسط و لحظه ای با یکدیگر برابر است.

معادلات حرکت با شتاب ثابت

اگر سرعت در شروع حرکت باشد،سرعت در لحظه عبارت است از :

$$a = a_{avg} = \frac{v - v_0}{t - 0} \longrightarrow \boxed{v = v_0 + at.}$$

✓ دومین معادله حرکت با شتاب ثابت معادله مکان ذره به صورت تابعی از زمان است:

$$v_{avg} = \frac{x - x_0}{t - 0} \longrightarrow x = x_0 + v_{avg}t$$

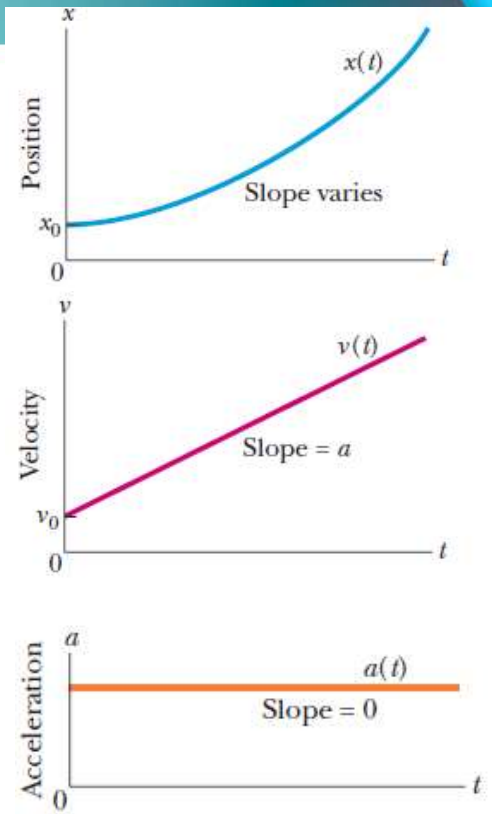
$$v_{avg} = \tfrac{1}{2}(v_0 + v), \quad v = v_0 + at. \longrightarrow v_{avg} = v_0 + \tfrac{1}{2}at \longrightarrow \boxed{x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2.}$$

✓ با جایگذاری **t** در معادله بالا ،سومین معادله یعنی معادله مستقل از زمان بدست می آید:

$$v = v_0 + at., \quad x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2. \longrightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Equations for Motion with Constant Acceleration

Equation	Missing Quantity
$v = v_0 + at$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0



منحنی های مکان،سرعت و شتاب بر حسب زمان :

- ✓ منحنی سرعت– زمان در حرکت با شتاب ثابت یک خط راست است

- ✓ منحنی شتاب – زمان در حرکت با شتاب ثابت یک خط راست است که شیب آن صفر است.

مثالی از حرکت یک بعدی با شتاب ثابت:

اتومبیلی با شتاب ثابت سرعت خود را از ۷۵ کیلومتر بر ساعت به ٤٥ کیلومتر بر ساعت در فاصله ۸۸ متر کاهش می دهد. شتاب حرکت و زمان لازم برای این کاهش سرعت را به دست آورید؟

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45\ \text{km/h})^2 - (75\ \text{km/h})^2}{(2)(0.088\ \text{km})}$$
$$= -2.05 \times 10^4\ \text{km/h}^2 \approx -1.6\ \text{m/s}^2.$$

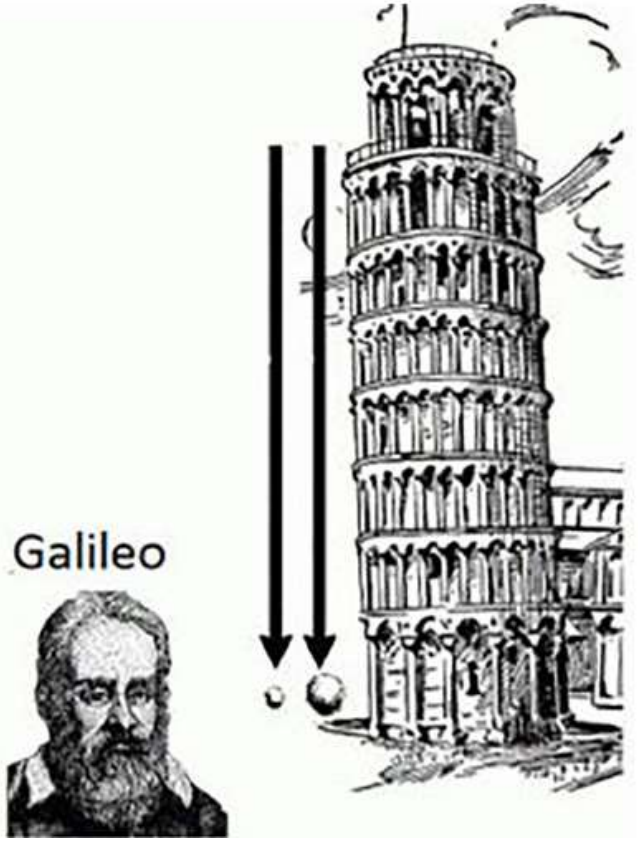
$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_0 + v} = \frac{(2)(0.088\ \text{km})}{(75 + 45)\ \text{km/h}}$$
$$= 1.5 \times 10^{-3}\ \text{h} = 5.4\ \text{s}.$$

فصل ۳ - حرکت یک بعدی- شتاب ثابت

- از جمله حرکات یک بعدی با شتاب ثابت ، سقوط آزاد اجسام است مجاور سطح زمین است.

- جهت شتاب در حرکت سقوط آزاد همواره به سمت پایین است.

- شتاب جسمی را که سقوط آزاد می کند ناشی از گرانی است و با نمایش g می دهند.



گالیله نشان داد که در حرکت **سقوط آزاد** تمام **اجسام در غیاب مقاومت هوا**، بدون توجه به اندازه ، وزن و یا شکل با **شتاب ثابت** $g=9.8\ m/s^2$ حرکت می کنند.



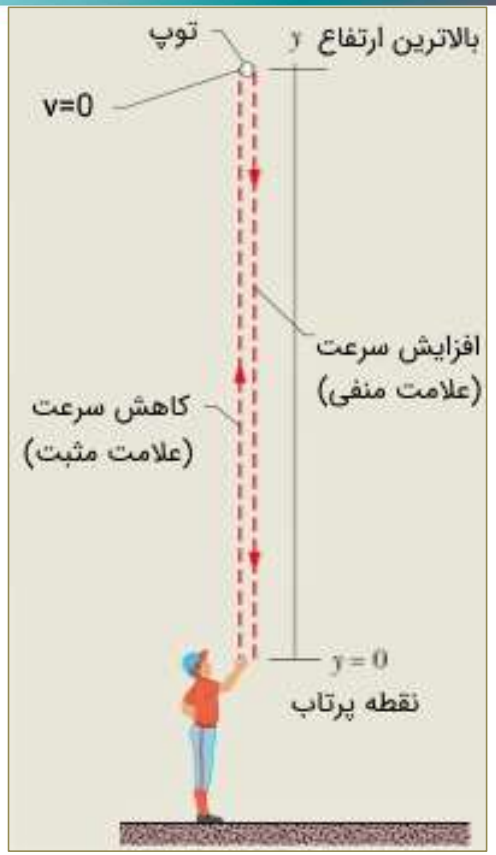


با استفاده از معادلات حرکت با شتاب ثابت و با فرض اینکه جهت مثبت محورy ها به سمت بالا فرض شود و با فرض اینکه در شروع حرکت ذره در مبداء مکان $y_0=0$ باشد معادلات حرکت:

$$\begin{cases} y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \\ v = -gt + v_0 \\ v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \end{cases}$$

مثالی از حرکت سقوط آراد در امتداد قائم.

شخصی توپی را با سرعت اولیه ۱۲ متر بر ثانیه به سمت بالا پرتاب می کند با صرف نظر از مقاومت هوا، زمان رسیدن توپ به بالاترین نقطه، ارتفاع اوج و زمان رسیدن توپ در نقطه ای به فاصله ۵ متری بالای نقطه پرتاب محاسبه کنید.



حل:

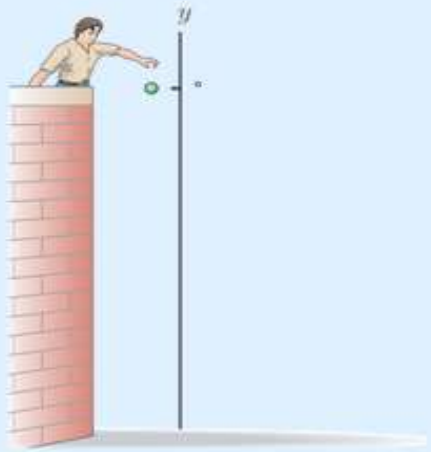
$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$
$$4.9t^2 - 12t + 5.0 = 0.$$
$$t = 0.53\ s \qquad t = 1.9\ s$$

$$y = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(12\ \text{m/s})^2 - (0)^2}{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)} = 7.3\ \text{m}$$

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{12\ \text{m/s} - 0}{9.8\ \text{m/s}^2} = 1.2\ \text{s}.$$

مثال ۱-۱۵

شکل مقابل شخصی را نشان می‌دهد که از بالای دیواری بلند، گلوله‌ای را رها می‌کند.



الف) پس از $۱/۰s$ گلوله چه مسافتی را طی می‌کند و سرعت آن به چقدر می‌رسد؟

ب) اگر ارتفاع دیوار $۱۰/۰m$ باشد سرعت برخورد گلوله به سطح زمین و مدت زمان کل حرکت آن را پیدا کنید.

پاسخ: الف) جهت بالا را مثبت و مبدأ مکان را محل رها شدن جسم فرض می‌کنیم. به این ترتیب از معادلهٔ ۱-۱۳ داریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}(۹/۸m/s^۲)(۱/۰s)^۲ + ۰ \Rightarrow y \simeq -۴/۹m$$

جابه جایی گلوله در این مدت $\Delta y = y - y_{\circ} = -۴/۹m$ و مسافت طی شده $۴/۹m$ است.

همچنین با استفاده از معادلهٔ ۱-۱۲ سرعت گلوله پس از $۱/۰s$ برابر است با:

$$v = -gt = -(۹/۸m/s^{۲})(۱/۰s) = -۹/۸m/s$$

حرکت سقوط آزاد، حرکتی با شتاب ثابت $g = ۹/۸m/s^{۲}$ حرکت سقوط آزاد، حرکتی با شتاب ثابت $۹/۸m/s$ افزایش می‌یابد. به طوری که تندی گلوله در پایان ثانیهٔ اول به $۹/۸m/s$ می‌رسد.

ب) برای پیدا کردن سرعت برخورد گلوله با زمین از معادلهٔ ۱-۱۴ داریم:

$$v^{۲} = -۲g(y - y_{\circ}) = -۲(۹/۸m/s^{۲})(-۱۰/۰m - ۰) = ۱۹۶m^{۲}/s^{۲} \Rightarrow v = \pm ۱۴m/s$$

چون جهت بالا را مثبت فرض کردیم، علامت منفی برای سرعت برخورد گلوله با سطح زمین قابل قبول است، یعنی $v = -۱۴m/s$.

به دو روش می‌توان زمان کل را به دست آورد. از معادله‌های ۱-۱۲ و ۱-۱۳ داریم:

$$= -gt \Rightarrow -۱۴/۰m/s = -(۹/۸m/s^{۲})t \Rightarrow t = ۱/۴s$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + y_{\circ} = -۱۰m = -\frac{۱}{۲}(۹/۸m/s^{۲})t^{۲} + ۰ \Rightarrow t^{۲} = ۲/۰ \Rightarrow t = ۱/۴s$$

سنگی از صخره‌ای به ارتفاع $۱۲۲/۵m$ نسبت به سطح زمین آزادانه سقوط می‌کند.

الف) زمان سقوط آزاد سنگ را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط سنگ را در حین سقوط آزاد پیدا کنید.

پ) جابه جایی سنگ را بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۳/۰s$ و $t_۲ = ۴/۰s$ به دست آورید.

ت) نمودارهای مکان زمان، سرعت - زمان و شتاب - زمان سنگ را رسم کنید.

پاسخ: الف) جهت بالا را مثبت و مبدأ مکان را محل رها شدن سنگ فرض می‌کنیم. به این ترتیب از معادلهٔ ۱-۱۳ داریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰ \Rightarrow -۱۲۲/۵m = -\frac{۱}{۲}(۹/۸m/s^۲)t^۲ + ۰ \Rightarrow t = ۵/۰s$$

ب) رابطهٔ ۱-۴ را برای امتداد قائم می‌توان به صورت $v_{av} = \Delta y/\Delta t$ در نظر گرفت. به این ترتیب داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-۱۲۲/۵m}{۵/۰s} = -۲۴m/s$$

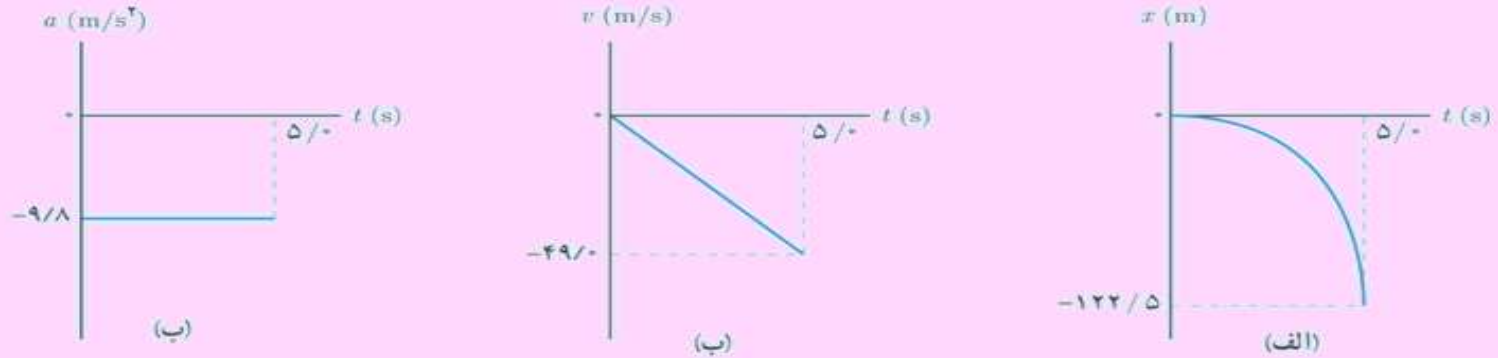
پ) ابتدا با استفاده از رابطهٔ ۱-۱۳ جابه جایی سنگ را تا هر یک از لحظه‌های $t_1 = ۳/۰s$ و $t_2 = ۴/۰s$ پیدا می‌کنیم. سپس با کم کردن این دو جابه جایی از یکدیگر، جابه جایی سنگ بین این دو لحظه به دست می‌آید.

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰ \Rightarrow y_۱ = -\frac{۱}{۲}(۹/۸m/s^۲)(۳/۰s)^۲ + ۰ \Rightarrow y_۱ = -۴۴m$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰ \Rightarrow y_۲ = -\frac{۱}{۲}(۹/۸m/s^۲)(۴/۰s)^۲ + ۰ \Rightarrow y_۴ = -۷۸m$$

$$\Delta y = y_۲ - y_۱ = -۷۸m - (-۴۴m) = -۳۴m$$

ت) برای رسم نمودار سرعت - زمان به سرعت جسم در لحظهٔ برخورد با زمین نیاز داریم. با استفاده از رابطهٔ ۱-۱۲ سرعت برخورد سنگ با زمین برابر $v = -gt = -(۹/۸m/s^۲)(۵/۰s) = -۴۹m/s$ است. نمودارهای مکان - زمان، سرعت - زمان و شتاب - زمان سنگ به ترتیب در شکل‌های الف، ب و پ رسم شده است.



مثال)فرض کنید که در بالای یک بلندی ایستاده و سنگی را رها می‌کنید. پس از گذشت ۱ ثانیه، سنگ چه مسافتی را طی می‌کند؟ پس از گذشت این زمان، سرعت سنگ چقدر است؟

برای حل این مسئله، جهت رو به بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. در نتیجه شتاب ثابت گرانشی را با علامت منفی در معادلات جایگذاری می‌کنیم. همچنین مکانی که سنگ رها شده را ۰ در نظر می‌گیریم؛

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times 1^2 = -4.9m$$

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -gt = -9.8 \times 1 = -9.8\frac{m}{s}$$

مثال۳) یک موشک کوچک به همراه «لانچر» آن را در نظر بگیرید. قسمت لانچر در ارتفاع ۵ کیلومتری از سطح زمین و در سرعت ۲۰۰ از موشک جدا می‌شود. بیشترین ارتفاعی که لانچر می‌تواند به آن برسد، چقدر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)



$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \Rightarrow 200^2 = -2 \times 9.8(y) \rightarrow y = 2040.8m \cong 2km$$

نمونه سوال

۲- سنگی را در شرایط خلأ و با سرعت اولیه v_0 به بالا پرتاب می‌کنیم. t ثانیه بعد سنگ دیگری را با همان سرعت به بالا پرتاب می‌کنیم. سرعت سنگ‌ها هنگامی که به هم می‌رسند چقدر است؟

$$y_1 = \frac{-1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 \qquad y_2 = \frac{-1}{2}g(t_1 - t)^2 + v_0(t_1 - t)$$

$$\frac{-1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 = \frac{-1}{2}g(t_1 - t)^2 + v_0(t_1 - t)$$

$$\frac{-1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 = \frac{-1}{2}gt_1^2 + gt_1 t - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t_1 - v_0 t$$

$$t_1 = \frac{1}{2}t + \frac{v_0}{g}$$

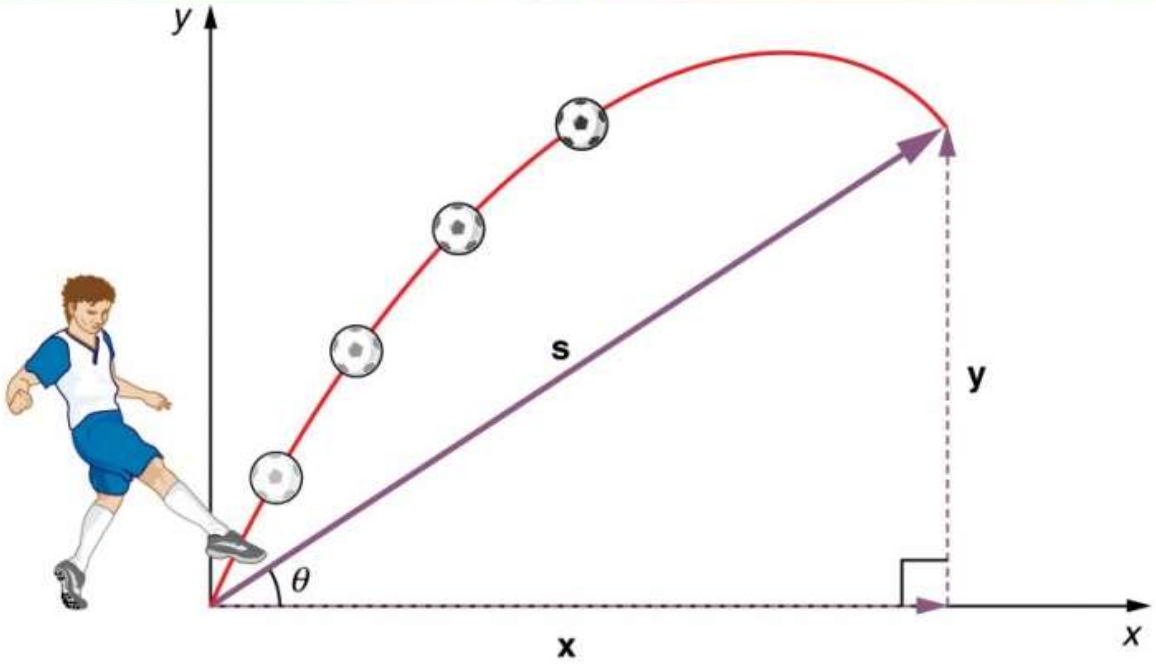
$$v_1 = -gt_1 + v_0 = -g\left(\frac{1}{2}t + \frac{v_0}{g}\right) + v_0 = \frac{-1}{2}gt$$

$$v_2 = -g(t_1 - t) + v_0 = -g\left(\frac{1}{2}t + \frac{v_0}{g} - t\right) + v_0 = \frac{1}{2}gt$$

فصل ۴: حرکت در صفحه



فصل۴: حرکت در صفحه



جابجایی، سرعت و شتاب

حرکت با شتاب ثابت در صفحه

حرکت پرتابی

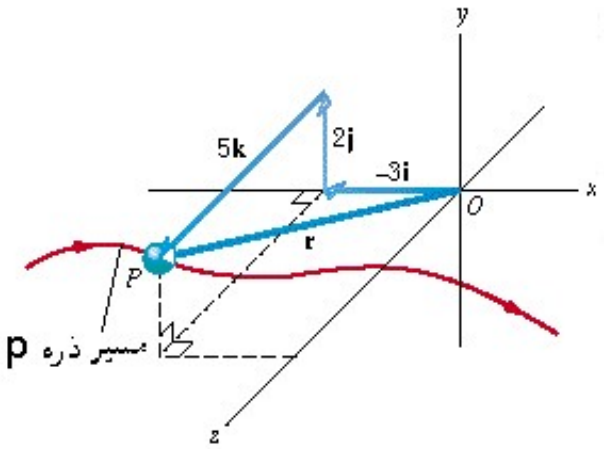
حرکت دایره ای یکنواخت

سرعت نسبی و شتاب

فصل۴: حرکت در صفحه

در حرکت دو بعدی ، مسیر حرکت درصفحه است و بردارهای مکان- سرعت و شتاب دارای دو مولفه می باشند

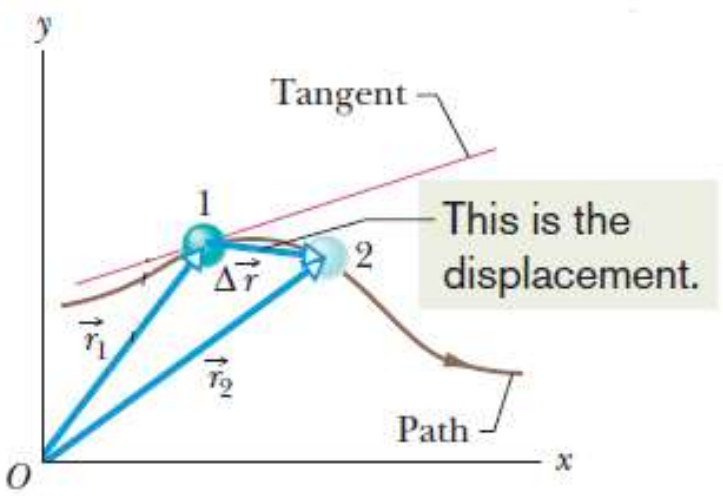
نمایش بردار مکان:



$$\mathbf{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\vec{r} = (-3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (2\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}} + (5\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{k}}$$

نمایش سرعت متوسط ✓

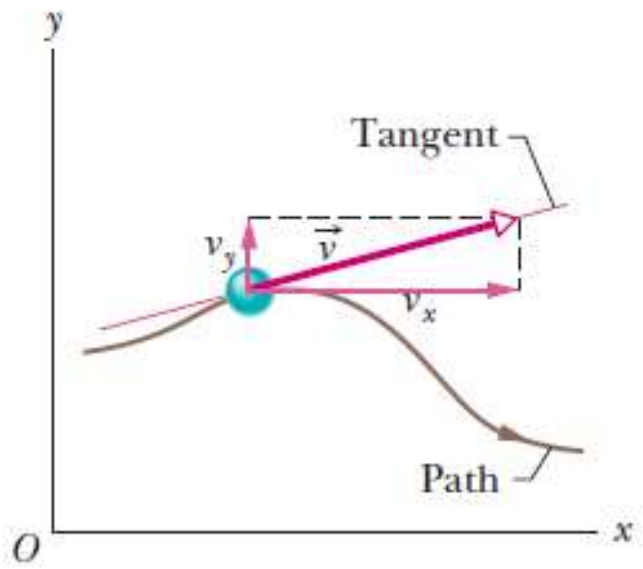


$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}.$$

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

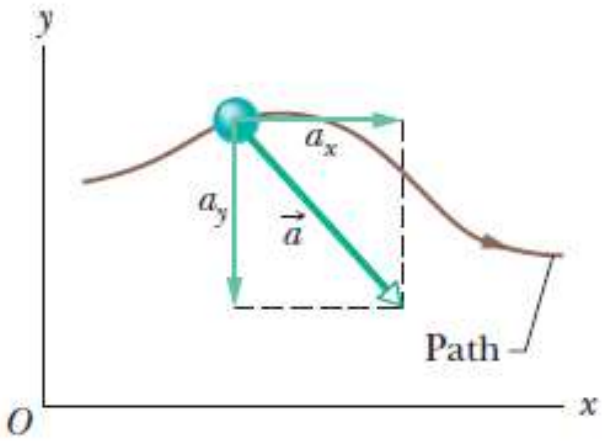


سرعت لحظه ای در هر نقطه از مسیر حرکت در **امتداد خط مماس بر مسیر** در آن نقطه است.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k},$$



$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

شتاب لحظه ای در حرکت دو بعدی دارای دو مولفه است:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}})$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathrm{k}}.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{and} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

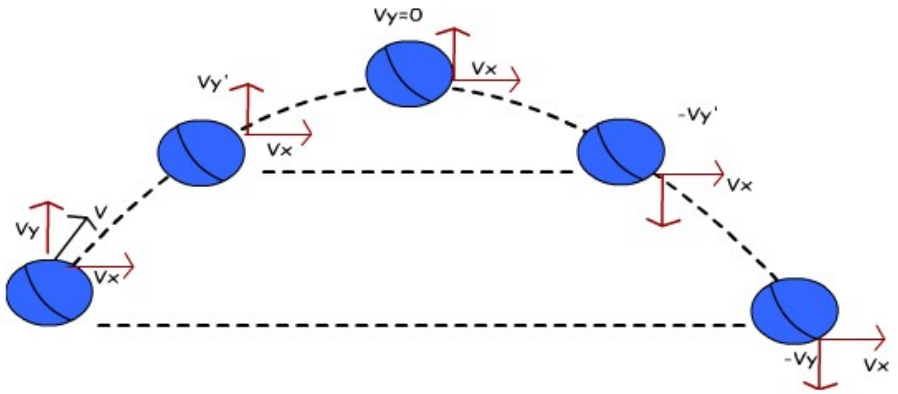
در این حرکت درحین حرکت ذره، بزرگی و جهت شتاب تغیر نمی کند یعنی و مقادیر ثابتی هستند.

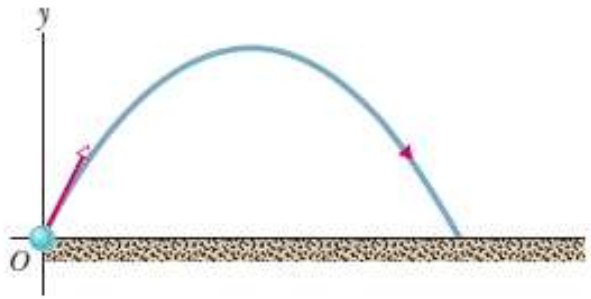
این حرکت را می توان مجموع دو حرکت ، که بطور همزمان با شتاب ثابت در دو راستای عمود بر هم انجام می شود ، در نظر گرفت.

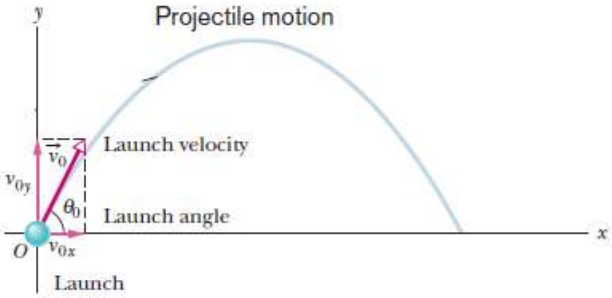


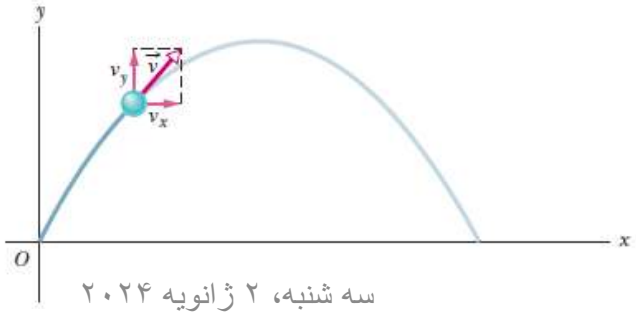
یکی از نمونه های حرکت با شتاب ثابت در مسیر خمیده، حرکت پرتابی است .

همانطور که در شکل نیز می‌بینید، در موقعیت‌های مختلف، بردارهای سرعت در جهت محورهای مختصات دارای اندازه‌های متغیری هستند. در حالت اولیه سرعت جسم برابر با V و در جهت شمال شرقی است. از آنجایی که تنها نیروی وارد شده به جسم، نیروی گرانش در نظر گفته شده، بنابراین سرعت جسم فقط در راستای y تغییر می‌کند و اندازه سرعت در جهت x ثابت است.









در یک حرکت پرتابی تنها نیروی فرض شده، گرانش است.

برای بررسی این حرکت، در ابتدا بایستی دو محور مختصات عمود به هم در نظر گرفت. برای راحتی حل مسئله بهتر است که یکی از این محورها در راستای شتاب گرانشی باشد. دلیل این کار حذف کردن شتاب از معادلات مربوط به حرکت در راستای افقی است.

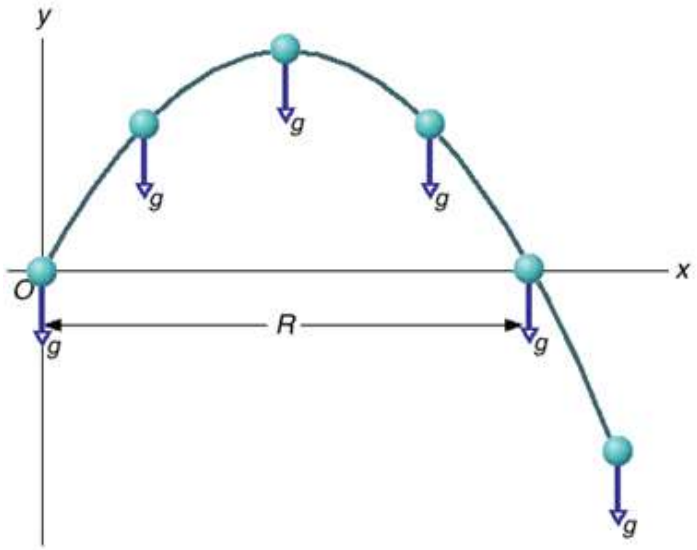
بنابراین سرعت اولیه در راستای محور ها برابر است با:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}.$$

از آنجایی که شتابی در راستای محور x به توپ وارد نمی‌شود، بنابراین سرعت آن نیز در این راستا ثابت است.

$$\left.\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos\theta_0 \\ x - x_0 &= v_{0x}t \\ a &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t.}$$

در حرکت پرتابی یک ذره، شتاب درراستای y ؛ g است و جهت آن همواره به سمت پایین است

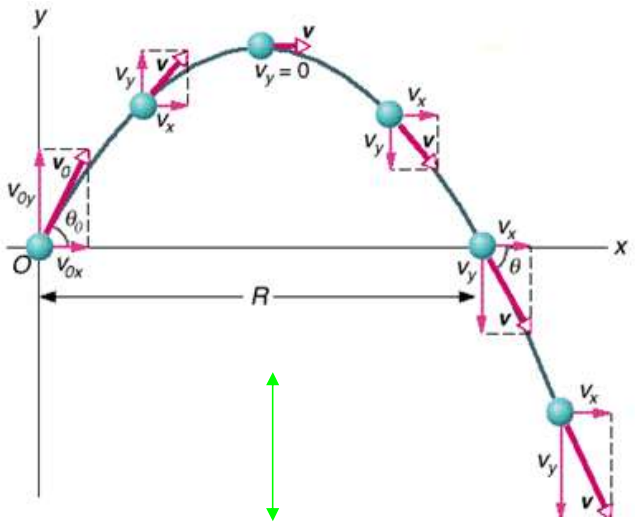


$$
\begin{aligned}
v_{0y} &= v_0 \sin\theta_0 \\
y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\
&= (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\
v_y &= v_0 \sin\theta_0 - gt \\
v_y^2 &= (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0).
\end{aligned}
$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

با استفاده از از این معادلات می‌توان مسیر حرکت جسم را در زمان پیش‌بینی کرد.

مسیر حرکت پرتابه سهمی شکل است و بردار سرعت مماس بر مسیر.



$$x - x_0 = v_{0x}t \longrightarrow t = \frac{x(t)}{V_0 cos\theta}$$

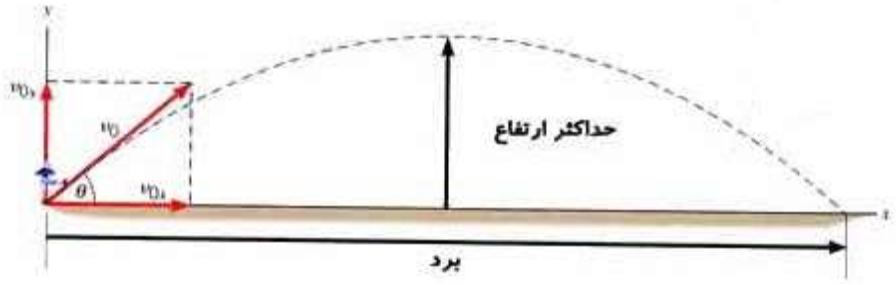
$$y = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t sin\theta = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right)^2 + V_0\left(\frac{x}{V_0 cos\theta}\right)sin\theta$$

$$y = \frac{-gx^2}{2V_0^2 cos^2(\theta)} + xtan(\theta)$$

محاسبه برد افقی پرتابه:

برد عبارت است از بیشترین مسافت افقی که یک پرتابه طی می‌کند.



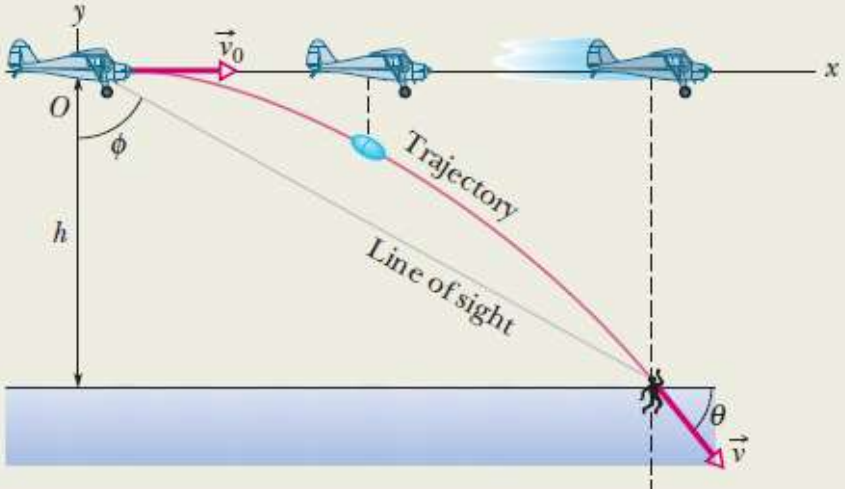
$$y - y_0 = 0 \longrightarrow 0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$R = (v_0 \cos\theta_0)t$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

$$\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$$



مثال ۱) *هواپیمایی با سرعت افقی ۴۳۰ کیلومتر بر ساعت در ارتفاع ۱/۲ کیلومتری بسته غذایی را رها می کند . بسته غذا تحت چه زاویه دیدی رها شود تا به هدف برخورد کند؟*

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

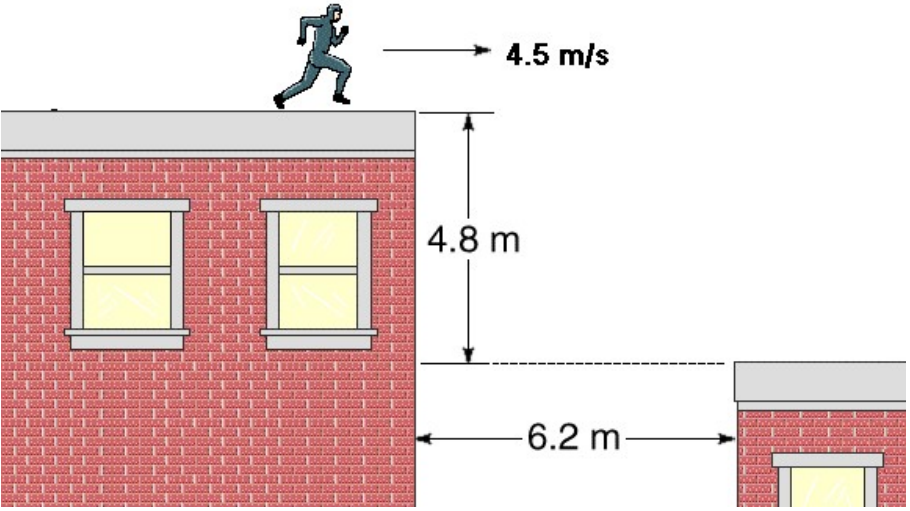
$$-1200\ \text{m} = 0 - \frac{1}{2}(9.8\ \text{m/s}^2)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{(2)(1200\ \text{m})}{9.8\ \text{m/s}^2}} = 15.65\ \text{s}.$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (v_0 \cos \theta_0)\, t \\ &= (430\ \text{km/h})(\cos 0°)(15.65\ \text{s})(1\ \text{h}/3600\ \text{s}) \\ &= 1.869\ \text{km} = 1869\ \text{m}. \end{aligned}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h} = \tan^{-1}\frac{1869\ \text{m}}{1200\ \text{m}} = 57°$$

مثال ۲- *شخصی که حداکثر سرعت او ۴/۵ متر بر ثانیه است می خواهد از بالای بامی به پشت بام دیگر بپرد آیا این پرش موفقیت آمیز است؟*



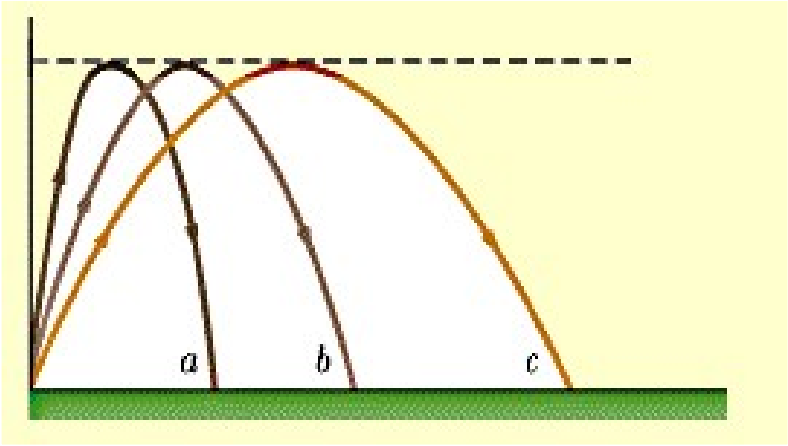
حل: با قرار دادن $y=-4.8\ m$ و خواهیم داشت:

$$t = \sqrt{-\frac{2(y-y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-4.8\ m)}{9.8\ m/s^2}} = 0.990\ s.$$

$$\theta_0 = 0 \longrightarrow x - x_0 = (v\ \cos\ \theta_0)t = (4.5\ m/s)(\cos\ 0°)(0.990\ s) = 4.5\ m.$$

پرش موفقیت آمیز نیست

مثال۳- شکل زیر ۳ مسیر حرکت پرتابی یک توپ فوتبال را نشان می دهد با صرف نظر کردن از مقاومت هوا مسیرها را از بزرگ به کوچک بر اساس موارد زیر مرتب کنید



الف) زمان پرواز

ب) مولفه عمودی سرعت اولیه

ج) مولفه افقی سرعت اولیه

د) اندازه سرعت اولیه

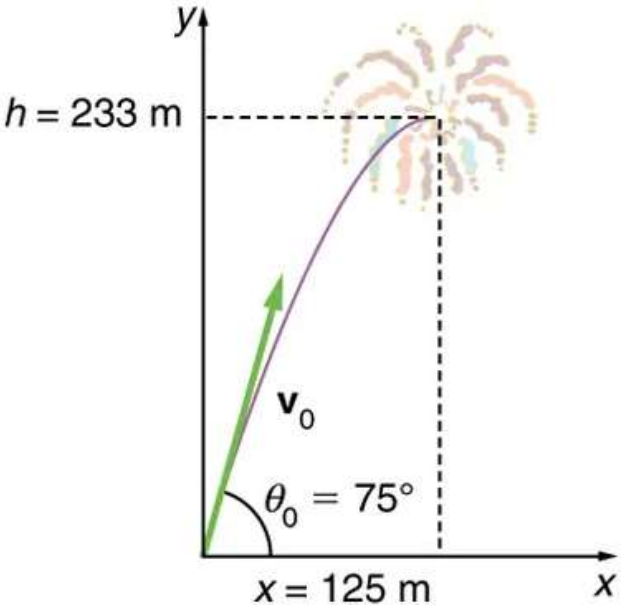
(a) all tie

(b) all tie

(c) c, b, a

(c) c, b, a

نمونه سوال



مطابق با شکل زیر، در یک مراسم آتش‌بازی، فشفشه‌ای با سرعت اولیه ۷۰ متر بر ثانیه و با زاویه ۷۵ درجه نسبت به محور x پرتاب می‌شود.

تصور کنید که این فشفشه هنگام رسیدن به بیشترین ارتفاعش منفجر می‌شود. با صرف نظر کردن از مقاومت هوا موارد زیر مطلوب است.

۱. ارتفاعی که فشفشه در آن منفجر می‌شود چقدر است؟

۲. این فشفشه چند ثانیه پس از پرتاب منفجر می‌شود؟

۳. مسافت افقی پیموده شده در زمان انفجار چقدر است؟

نمونه سوال

حل:

$a_x = 0$

$a_y = -g$

همچنین می‌توان مبدا دستگاه مختصات را نقطه پرتاب در نظر گرفت، در نتیجه مقادیر $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ صفر در نظر گرفته می‌شوند.

برای پاسخ به قسمت ا، بایستی سرعت اولیه در راستای y را بدست آوریم. این سرعت برابر است با:

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 = (70.0\ \text{m/s})(\sin 75^\circ) = 67.6\ \text{m/s}$$

از طرفی فشفشه در بیشترین ارتفاعش منفجر می‌شود. همان‌طور که در بالا نیز بیان کردیم، در بیشترین ارتفاع، سرعت در راستای y برابر با صفر است. از این رو با جایگذاری سرعت بالا در رابطه $V_y^2 - V_0^2 = -2g(y - y_0)$ می‌توان ارتفاع انفجار را به صورت زیر بدست آورد.

$$V_y^2 - V_0^2 = -2g(y - y_0) \rightarrow \ 0^2 - 67.6^2 = -2 \times 9.8(y - 0)$$

با حل معادله بالا مقدار y برابر با ۲۳۳ متر بدست می‌آید.

نمونه سوال

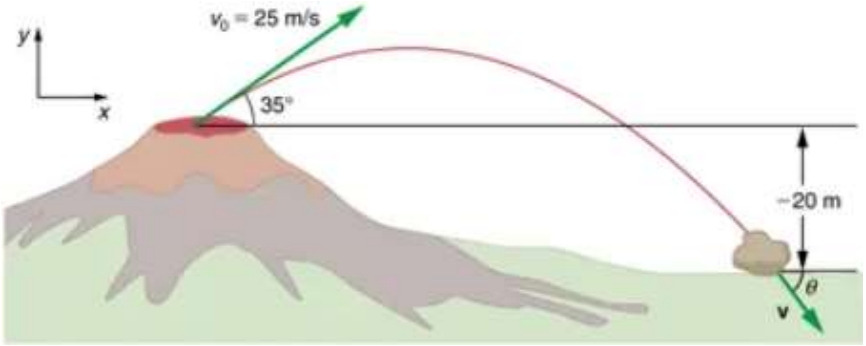
$$V_y(t) = V_0 - 9.8t \xrightarrow{v=0} 9.8t = V_0 \rightarrow \quad t = \frac{67.6}{9.8} = 6.90s$$

اگر زمان انفجار بدست آمده را در معادله مربوط به جابجایی افقی قرار دهیم، می‌توانیم مسافت پیموده شده را در لحظه انفجار نیز محاسبه کنیم. اما قبل از آن بایستی سرعت اولیه را در راستای x بدست آوریم. از آنجایی که جسم در راستای افقی شتابی ندارد، در نتیجه سرعت افقی جسم در تمامی لحظات برابر با همان سرعت اولیه است. برای محاسبه مسافت پیموده شده در لحظه انفجار می‌توان به ترتیب زیر عمل کرد.

$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (70.0 \text{ m/s})(\cos 75^\circ) = 18.1 \text{ m/s}$ → $x = (18.1 \text{ m/s})(6.90 \text{ s}) = 125 \text{ m}.$

نمونه سوال

کوه «Kilauea» در هاوایی یکی از فعال‌ترین آتش‌فشان‌های دنیا است. در این کوه‌ها معمولا همواره مواد مذاب و سنگ به بیرون پرتاب می‌شود. مطابق شکل زیر فرض کنید که تکه سنگی بزرگ با سرعت ۲۵ متر بر ثانیه و در زاویه ۳۵ درجه نسبت به افق از دهانه کوه به بیرون پرتاب شود.



با فرض این‌که ارتفاع کوه برابر با ۲۰ متر باشد، موارد زیر را محاسبه کنید.

۱. مدت زمانی که طول می‌کشد تا سنگ به دامنه کوه برسد.

۲. زاویه و سرعتِ برخورد سنگ به زمین چقدر است؟

نمونه سوال

در قسمت اول مسئله، مجهول ما زمان است، بنابراین می‌توان با استفاده از معادله حرکت در راستای y، زمان خواسته شده را به شکل زیر محاسبه کرد. البته توجه داشته باشید که با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده، نقطه y_2 برابر با ۲۰- متر در نظر گرفته می‌شود.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 = (25.0\ \text{m/s})(\sin 35.0^\circ) = 14.3\ \text{m/s}$$

$$-20.0\ \text{m} = (14.3\ \text{m/s})t - (4.90\ \text{m/s}^2)t^2.$$

این معادله یک رابطه درجه ۲ با مجهول t است که با حل آن، زمان t برابر با ۳.۹۶ بدست می‌آید.

نمونه سوال

برای محاسبه زاویه برخورد بایستی مولفه‌های سرعت در راستای x و y را داشته باشیم. از این رو در ابتدا دو سرعت مذکور را می‌یابیم. همچنین به‌منظور محاسبه سرعت افقی در لحظه برخورد، سرعت اولیه در راستای x را بایستی محاسبه کنیم. نهایتا مولفه‌های سرعت افقی و قائم، در لحظه برخورد را می‌توان به‌ترتیب مراحل زیر محاسبه کرد.

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (25.0\ \text{m/s})(\cos 35°) = 20.5\ \text{m/s}$$

$$v_y = 14\ .\ 3\ \text{m/s} - (9.80\ \text{m/s}^2)\ (3.96\ \text{s})$$

$$v_y = -24.5\ \text{m/s}.$$

با بدست آمدن دو سرعت x و y در لحظه برخورد، زاویه برخورد را به شکل بدست می‌آوریم.

$$\theta_v = \tan^{-1}(v_y / v_x)$$

$$\theta_v = \tan^{-1}(-24.5/20.5) = \tan^{-1}(-1.19).$$

نمونه سوال

از بالای صخره ای به ارتفاع ۱۰۰m سنگی در جهت ۵۳° بالای افق با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ به هوا پرتاب می شود. کمیتهای زیر را پیدا کنید: الف) زمان پرواز، ب) ارتفاع اوج (از زمین) ج) برد افقی و د) سرعت سنگ هنگام برخورد به زمین.

حل: الف)

$$v_0 = ۲۵\frac{m}{s} \quad , \quad y_0 = ۱۰۰m \quad , \quad \theta = ۵۳^\circ$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_0 Sin\theta t + y_0$$

$$o = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times t^۲ + ۲۵ \times Sin(۵۳)t + ۱۰۰$$

$$-۴/۹t^۲ + ۲۰t + ۱۰۰ = o$$

$$t = \frac{-۲۰ \pm \sqrt{(۲۰)^۲ - (۴ \times (-۴/۹) \times ۱۵)}}{۲ \times (-۴/۹)} = \begin{cases} t_۱ = -۳s \\ t_۲ = ۷s \end{cases}$$

نمونه سوال

ب)

$$H = \frac{v_0^2 Sin^2\theta}{2g} = \frac{(25)^2 \times (Sin(53))^2}{2 \times 9/8} = 20/3\,m$$

H ارتفاع از لبه صخره است و ارتفاع اوج از زمین

$$y = H + 100 = 20/3 + 100 = 120/3\,m$$

ج)

$$x = v_{0x} t = v_0 Cos\theta t = 25 \times Cos(53) \times 7 = 105\,m$$

د)

فصل ۴- حرکت دایره ای یکنواخت

درحرکت دایره ای یکنواخت اندازه سرعت ثابت است ولی جهت آن همواره تغییر می کند.

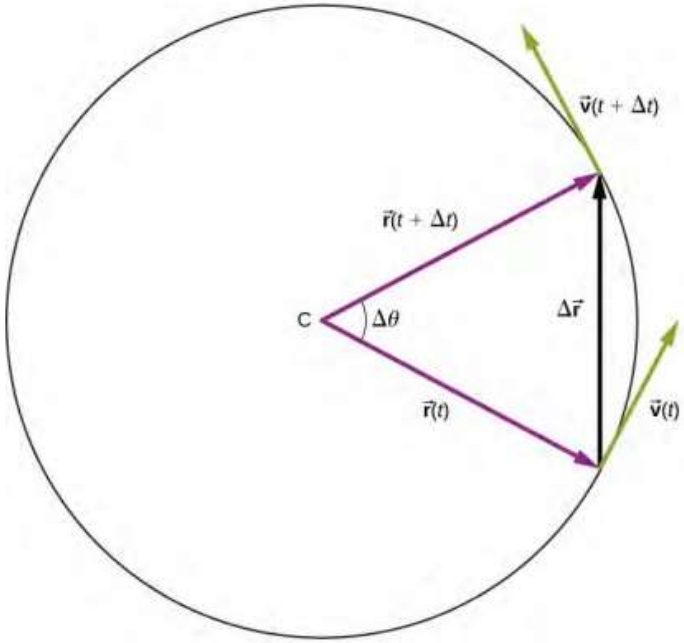


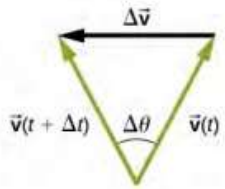
حرکت دایره‌ای یکنواخت به حرکتی گفته می‌شود که در آن یک جسم روی مسیری دایره‌ای با سرعتی ثابت در حرکت باشد.

شتاب زمانی وجود دارد که اندازه سرعت جسمی با گذشت زمان تغییر کند. بنابراین در این جا این سوال مطرح است که آیا در حرکت روی مسیر دایره‌ای، شتابی وجود دارد؟
پاسخ سوال فوق مثبت است. دلیل وجود داشتن شتاب، تغییر جهت سرعت با گذشت زمان است.

محاسبه اندازه شتاب:

همان‌طور که در شکل نیز می‌بینید، جهت بردار سرعت با گذشت زمان تغییر می‌کند. همین امر کافی است تا جسم، شتابی را روی خودش حس کند.

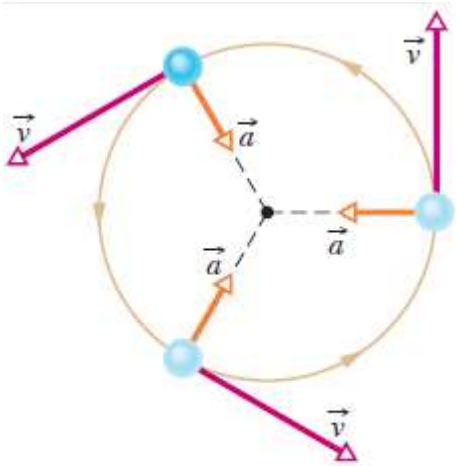




$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

فرض کنید اندازه سرعت با V و اندازه شعاع با r نمایش داده شود. در این صورت می‌توان تناسب زیر را بین سرعت و شعاع نوشت.

$$\frac{\Delta \vec{v}}{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{r}$$



با استفاده از تناسب فوق، شتاب مرکزگرا به صورت زیر بدست می‌آید.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{V}{r} \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{V^2}{r}$$

جهت بردار شتاب نیز در جهت $\Delta \vec{r}$ است. از طرفی این بردار به خود V عمود است. بنابراین بردار شتاب به سمت مرکز دایره است. به همین دلیل به این شتاب مرکزگرا و نیروی ناشی از این شتاب، نیروی مرکزگرا گفته می‌شود. نهایتا شتاب مرکزگرا برابر است با:

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

مثال ۱

هواپیمای جتی را در نظر بگیرید که با سرعت $134.1\ m/s$ در حال حرکت است. به منظور ایجاد شتاب g یا همان $9.8\ m/s^2$ این جت دایره‌ای با کدام شعاع را باید طی کند؟

با برابر قرار دادن شتاب g با رابطه ۲ داریم:

$$a_C = g = 9.8 = \frac{V^2}{r} \Rightarrow \quad r = \frac{V^2}{g}$$

با جایگذاری مقادیر در عبارت بدست آمده در بالا داریم:

$$r = \frac{(134.1\ m/s)^2}{9.8\ m/s^2} = 1835\ m = 1.835 km$$

بدیهی است که به منظور افزایش شتاب، یا شعاع منحنی باید کاهش یافته و یا سرعت جت باید افزایش یابد.

مثال: سرعت یک ماهواره زمینی را که در ارتفاع ۲۰۰ کیلومتری از سطح زمین قرار دارد و در آنجا ***g=9.2*** متر بر مجذور ثانیه است، را حساب کنید

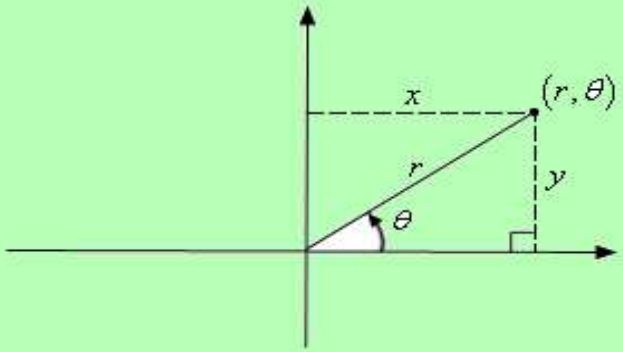
$$g = \frac{v^2}{R_E + h}$$

$$v = \sqrt{g(R_E + h)} = \sqrt{(9.20\ \text{m/s}^2)(6.37\text{x}10^6\text{m} + 200\text{x}10^3\text{m})}$$

$$= 7770\ \text{m/s} = 7.77\ \text{km/s}.$$

تبدیل مختصات قطبی و کارتزینی به یکدیگر

در شکل زیر یک نقطه در دو مختصات قطبی و کارتزینی نشان داده شده است.

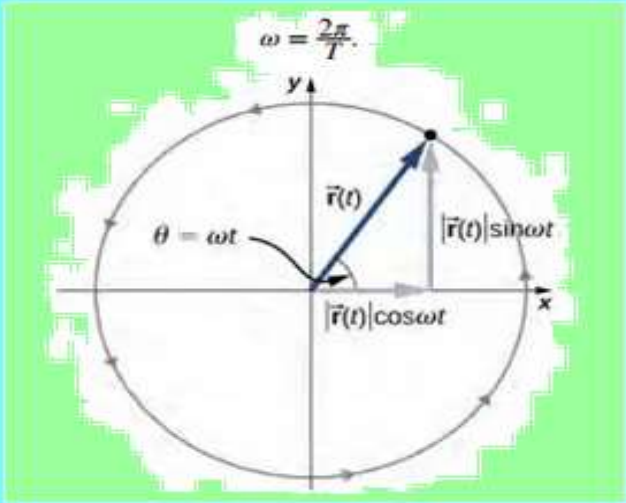


با توجه به این شکل و مفاهیم مثلثات، مختصات x و y را می‌توان بر حسب r و θ، به شکل زیر بیان کرد.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

معادله حرکت دایره‌ای یکنواخت

حرکت دایره‌ای یک ذره را می‌توان با استفاده از تابعی برداری تعیین کرد. به منظور توضیح تابع توصیف کننده حرکت ذره، در ابتدا فرض کنید که ذره روی مسیری به شکل زیر در حرکت است.



با توجه به شکل فوق، تابع توصیف کننده موقعیت ذره را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$\vec{r}(t) = A\cos\omega t\hat{i} + A\sin\omega t\hat{j}$$

معادله حرکت دایره‌ای یکنواخت

ω برابر با سرعت زاویه‌ای یا همان فرکانس زاویه‌ای است. واحد این کمیت نیز ثانیه/رادیان ($\frac{rad}{s}$) در نظر گرفته می‌شود. زاویه‌ای که ذره در هر لحظه با محور xها دارد، θ است که معادل با $\theta = \omega t$ محاسبه می‌شود.

با توجه به رابطه $\theta = \omega t$، می‌توان زمانِ یک دور زدنِ ذره را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\theta = \omega t \Rightarrow 2\pi = \omega t \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

زمان T یا زمانی که طول می‌کشد تا ذره یک دور کامل بزند را دوره می‌گویند. البته می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری از تابع $\overrightarrow{r}(t)$ نیز سرعت و شتاب ذره را بدست آورد. برای نمونه رابطه برداری سرعت برابر است با:

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = -A\omega \sin \omega t \hat{i} + A\omega \cos \omega t \hat{j}$$

هم‌چنین با مشتق‌گیری از رابطه بالا، مقدار شتاب در هر لحظه نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود.

معادله حرکت دایره‌ای یکنواخت

هم‌چنین با مشتق‌گیری از رابطه بالا، مقدار شتاب در هر لحظه نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t \hat{i} - A\omega^2 \sin \omega t \hat{j}$$

با توجه به سرعت و شتاب بدست آمده در بالا، می‌توان دید که سرعت به مسیر دایره‌ایی مماس و شتاب نیز به مسیر عمود است.

معادله حرکت دایره‌ای یکنواخت

مثال ۲

یک پروتون با سرعت $5 \times 10^6\ m/s$ مسیری دایره‌ای به شعاع $r = 0.175\ m$ را طی می‌کند. در زمان t=0 موقعیت بردار پروتون برابر با $r = 0.175\ m\ \hat{i}$ است. با این فرض موقعیت پروتون را در لحظه $t = 2.0 \times 10^{-7} s = 200\ ns$ بدست آورید. همچنین موقعیت ذره را در لحظه مذکور ترسیم کنید.

با توجه به اطلاعات بیان شده، دوره تناوب و فرکانس زاویه‌ای حرکت ذره برابرند با:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(0.175\ m)}{5.0 \times 10^6\ m/s} = 2.20 \times 10^{-7}\ s$$

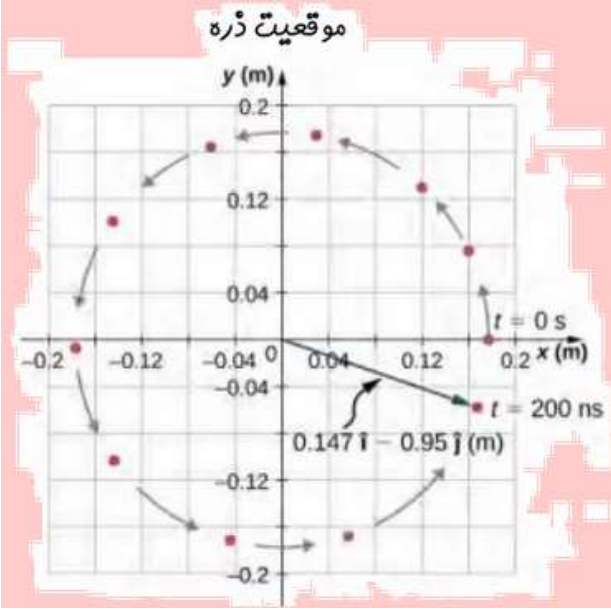
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.857 \times 10^7$$

معادله حرکت دایره‌ای یکنواخت

در نتیجه موقعیت ذره در زمان $t = 2.0 \times 10^{-7} s = 200\ ns$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}(2.0 \times 10^{-7}\ s) &= A\cos\omega(2.0 \times 10^{-7}\ s)\hat{i} + A\sin\omega(2.0 \times 10^{-7}\ s)\hat{j}\ m \\ &= 0.175\cos(5.712\ rad)\hat{i} + 0.175\sin(5.172\ rad)\hat{j}\ m \\ &= 0.147\hat{i} - 0.095\hat{j}\ m.\end{aligned}$$

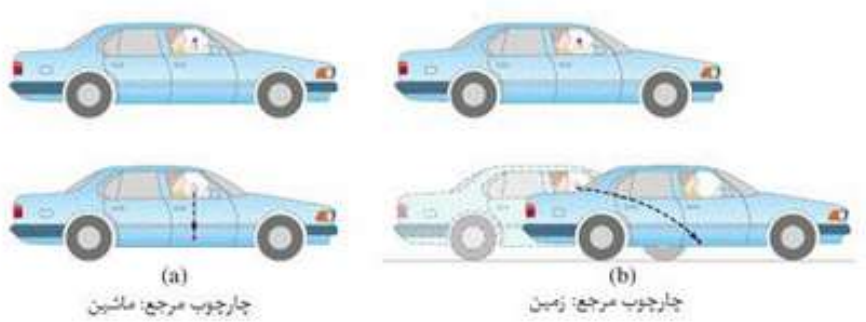
هم‌چنین با توجه به بردار بدست آمده در بالا، موقعیت ذره در این لحظه به صورت زیر است.



فصل ۴–حرکت نسبی

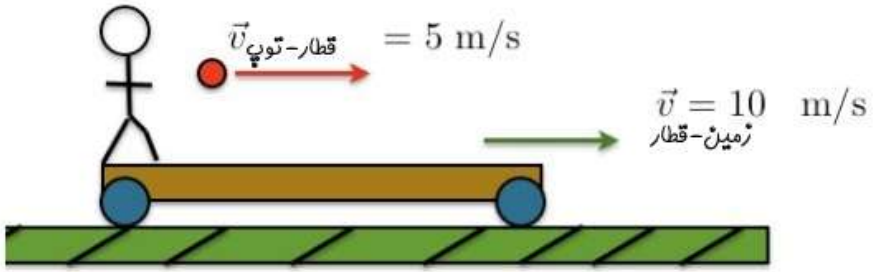
مقدمه

تصور کنید در حال رانندگی هستید و از ماشینی که در کنار شما در حال حرکت است، سبقت می‌گیرید. همان‌طور که می‌دانید شما ماشین کناری خود را می‌بینید که به سمت عقب در حرکت است. بدیهی است که ناظر قرار گرفته روی زمین هر دو خودرو را در حال حرکت به سمت جلو می‌بیند. در نتیجه شما حرکت خودرو را نسبت به ناظر روی زمین متفاوت می‌بینید. دلیل این امر نسبی بودن سرعت است. در ادامه این مفهوم را به صورت کمی توضیح خواهیم داد.



فرض کنید در قطاری هستید که با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه در حال حرکت است. در همین حال توپی را با سرعت ۵ متر بر ثانیه را در جهت حرکت قطار پرتاب می‌کنیم.

بدست آوردن سرعت نسبی



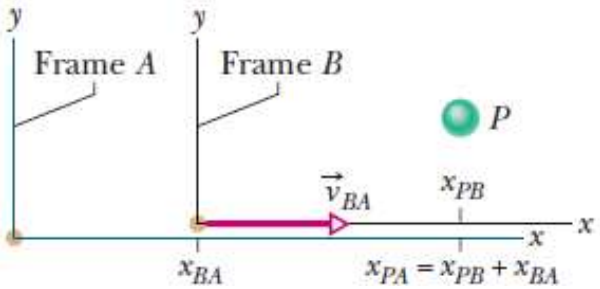
در مثال فوق می‌توان سرعت‌های نسبی را به صورت زیر تعریف کرد.

سرعت توپ نسبت به قطار

سرعت قطار نسبت به زمین

سرعت توپ نسبت به زمین

موقعیت در دو دستگاه مختصات:



$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}.$$

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA})$$

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}.$$

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA})$$



چون چار چوبهای مرجع لخت می باشند یعنی نسبت به یکدیگر با سرعت ثابت حرکت می کنند مشتق زمانی معادله سرعتها معادله شتاب زیر را می دهد.

$$a_{pA} = a_{pB}.$$

پس مشاهده ناظرین ذر چهار چوبهای مرجعی که نسبت به یکدیگر باسرعت ثابت حرکت می کنند (چار چوب اینرسی) شتاب یکسانی را برای ذرات متحرک اندازه گیری می کنند.

- مسئله نمونه: حرکت نسبی یک بُعدی امیر و بهروز

در شکل بالا فرض کنید سرعت بهروز نسبت به امیر ثابت و برابر با $v_{BA} = 52km/h$ است و خودرو P در جهت منفی محور x می کند.

الف) اگر سرعت خودرو P نسبت به امیر مقدار ثابت $v_{PA} = -78km/h$ باشد، سرعت خودرو P نسبت به بهروز v_{PB} چیست؟

حل : داریم

$$-78km/h = v_{PB} + 52km/h \Rightarrow$$

$$v_{PB} = -130km/h$$

اگر خودرو P به وسیله یک طناب پیچیده شده به دور قرقره به خودرو بهروز وصل می شد، هنگام دور شدن دو خودرو از هم طناب با تندی $130km/h$ از قرقره باز می شد.

ب) اگر خودرو P با شتاب ثابت ترمز کند و پس از زمان $t = 10s$ نسبت به امیر (و در نتیجه نسبت به زمین) متوقف شود، شتاب a_{PA} نسبت به امیر چقدر است؟

حل: سرعت آغازی P نسبت به امیر $v_{PA} = -78km/h$ و سرعت پایانی صفر است. بنابراین شتاب نسبت به امیر برابر است با

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78km/h)}{10s} \times \frac{1m/s}{3.6km/h} \Rightarrow$$

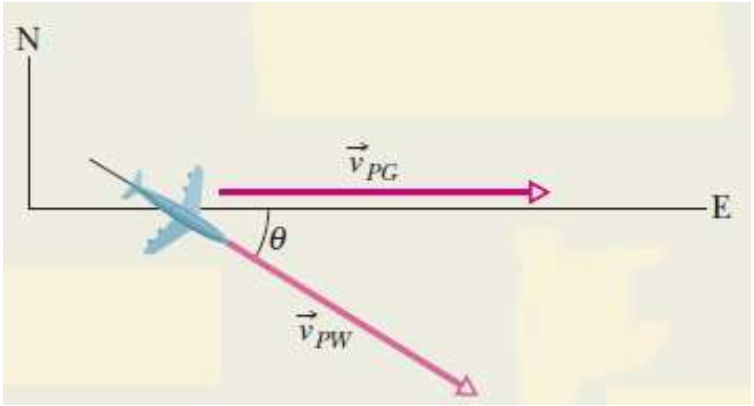
$$a_{PA} = 2.2m/s^2$$

پ) a_{PB} شتاب خودرو P نسبت به بهروز درحین ترمز کرد چیست؟

حل: سرعت آغازی P نسبت به بهروز با توجه به قسمت (الف) در دست است($v_{PB} = -130km/h$) ، سرعت پایانی P نسبت به بهروز $-52km/h$ است (این مقدار سرعت خودرو متوقف شده نسبت به بهروز در حال حرکت است). بنابراین داریم

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52km/h - (-130km/h)}{10s} \times \frac{1m/s}{3.6km/h} \Rightarrow$$

$$a_{PB} = 2.2m/s^2$$

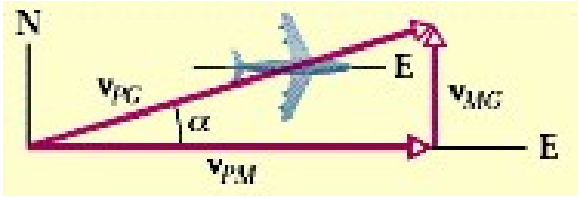


مثالی برای سرعت نسبی:

قطب نما ی یک هواپیما نشان می دهد که هواپیما به سمت شرق حرکت می کند . سرعت سنج هوا نشان می دهد که سرعت هواپیما نسبت به هوا ۲۱۵ کیلومتر بر ساعت است سرعت باد نسبت به زمین ٦٥ کیلومتر بر ساعت و به سمت جنوب است

الف) سرعت هواپیما نسبت به زمین را بدست آورید

ب) اگر خلبان بخواهد به سمت شرق حرکت کند . خلبان در چه جهتی باید هواپیما را هدایت کند



$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PM} + \vec{v}_{MG}$$

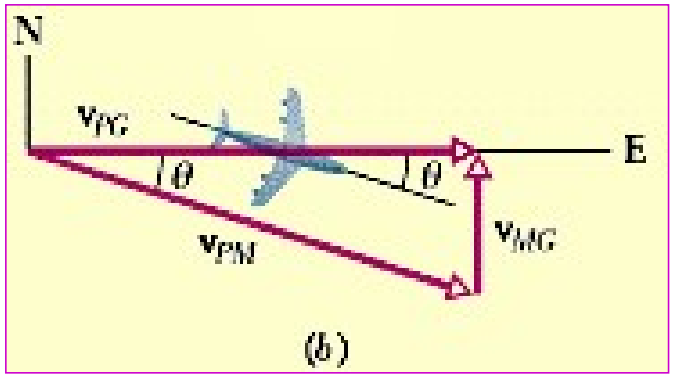
$$v_{PA} = \sqrt{v_{PM}^2 + v_{MG}^2}$$

$$= \sqrt{(215\ \text{km/h})^2 + (65.0\ \text{km/h})^2}$$

$$= 225\ \text{km/h}.$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{v_{PM}}{v_{MG}} = \tan^{-1}\frac{65.0\ \text{km/h}}{215\ \text{km/h}} = 16.8°$$

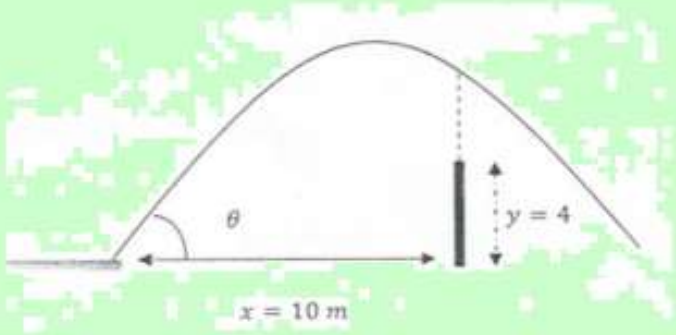
حل(ب):

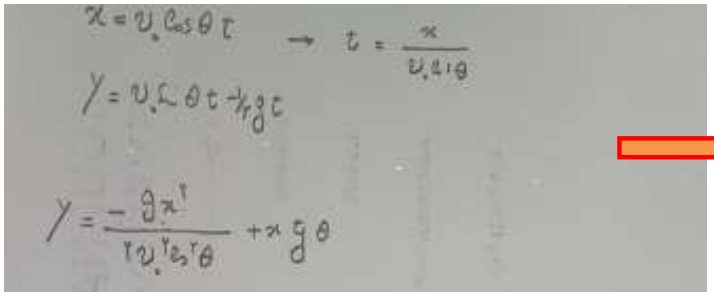


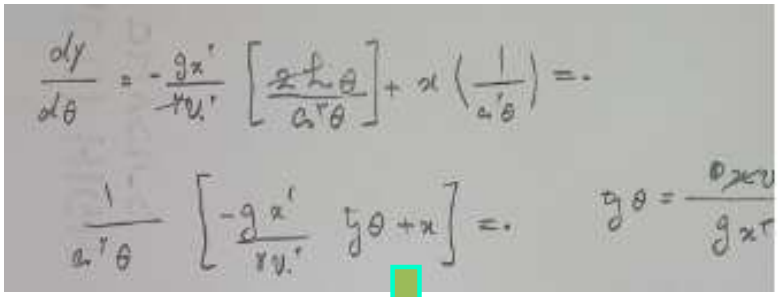
$$v_{PG} = \sqrt{v_{PM}^2 - v_{MG}^2} = \sqrt{(215\ \text{km/h})^2 - (65.0\ \text{km/h})^2} = 205\ \text{km/h}.$$

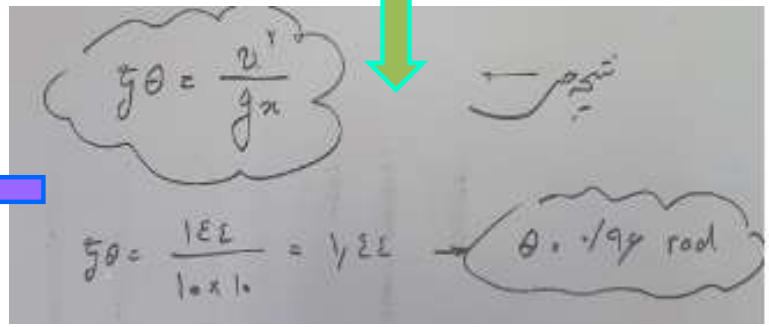
$$\theta = \sin^{-1}\frac{v_{MG}}{v_{PM}} = \sin^{-1}\frac{65.0\ \text{km/h}}{215\ \text{km/h}} = 17.6°.$$

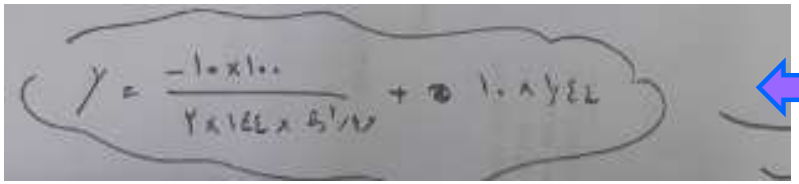
شکل زیر قفس یک ببر را نشان می‌دهد که خندقی به پهنای ۱۰ متر و و نرده محافظی به ارتفاع ۴ متر دارد. بر اساس اطلاعات جانورشناسی، این گونه ببر قادر است با دورخیز بسیار کوتاهی به سرعت حدود $14\ m/s$ برسد. فرض کنید ببر با همین سرعت و زاویه پرتابی θ از زمین جدا شود. بیشینه ارتفاع نرده‌ای که ببر می‌تواند ضمن پریدن از خندق از روی آن بگذرد (y_{max}) چقدر است؟







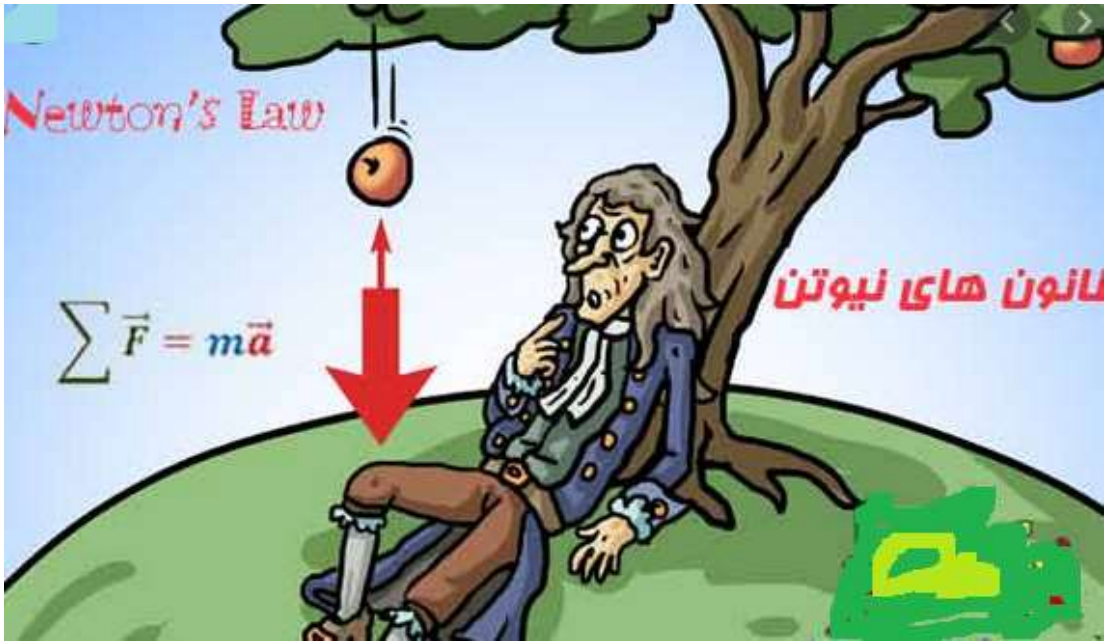




فصل ۵ : دینامیک ذره – ۱



فصل ۵ : دینامیک ذره – ۱



مکانیک کلاسیک

معرفی چند نیرو

قانون اول نیوتن

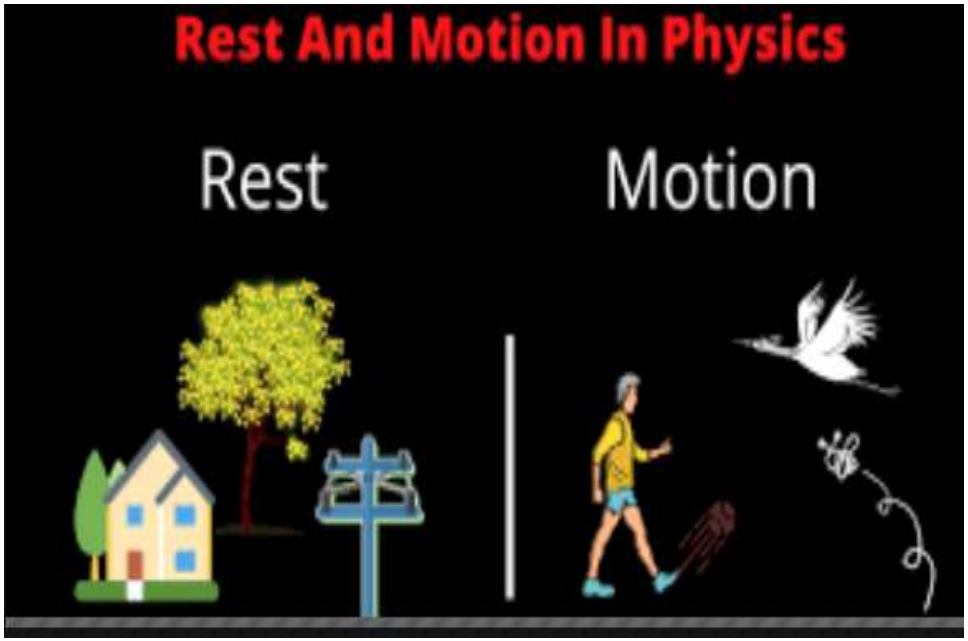
قانون دوم نیوتن

قانون سوم نیوتن

دستگاه یکاهای مکانیکی

بعضی کاربردهای قوانین نیوتن

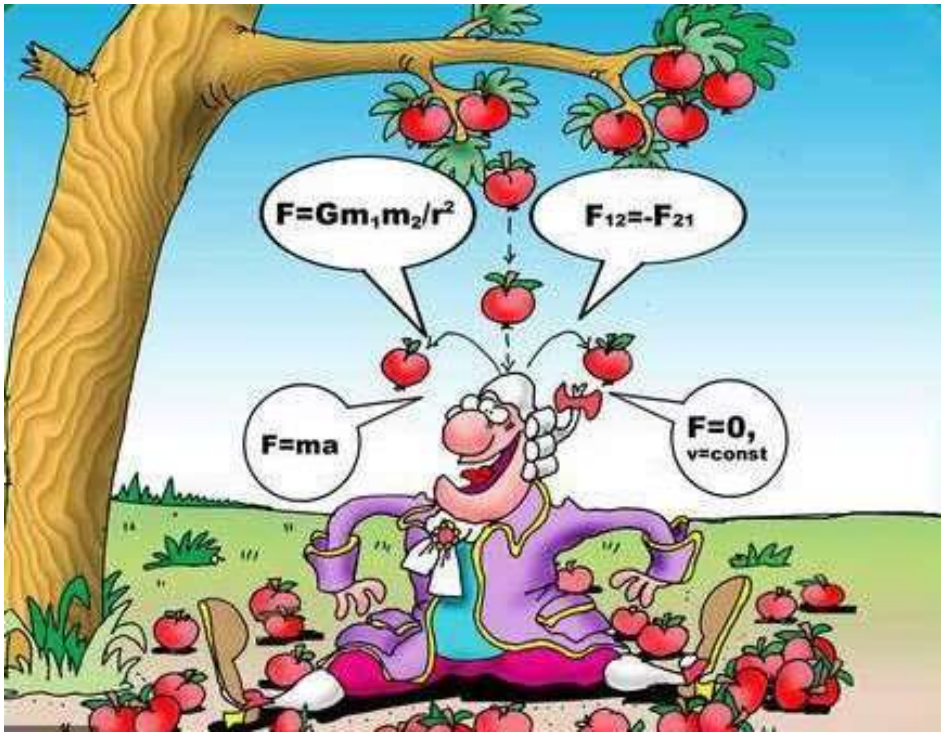
فصل ۵ : دینامیک ذره – ۱



مکانیک شامل دو قسمت است: سینماتیک و دینامیک

سینماتیک توصف ریاضی حرکت است

در این فصل علل حرکت یعنی دینامیک حرکت مورد بحث قرار می گیرد.



مکانیک نیوتنی

اولین بار ایزاک نیوتن به رابطه بین حرکت و شتاب یک جسم پی‌برد. نیوتن این کشف را در غالب سه قانون که به قوانین حرکت نیوتن معروف هستند، عنوان کرد. فیزیک و مکانیکی که بعدها بر اساس رابطه مشهور بنا گردید، به مکانیک نیوتنی یا فیزیک کلاسیک معروف است. با اینکه مکانیک نیوتنی به خوبی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را تشریح می‌کند، اما نقص‌هایی نیز دارد. به طور مثال در تحلیل و بررسی حرکت جسمی با مکانیک نیوتنی که با سرعت‌های خیلی بالا (نزدیک به سرعت نور) حرکت می‌کند، به نتایج اشتباهی می‌رسیم.

بررسی حرکت ذرات کوچک در قلمرو مکانیک کوانتمی است.

بررسی حرکت ذرات در سرعتهای بالا در مکانیک نسبیتی بررسی می گردد که در اینجا به آن نمی پردازیم.

توصیف حرکت ذرات بسیار کوچک و در سرعتهای نزدیک به سرعت نور در قلمرو مکانیک کوانتمی نسبیتی است.

نیرو چیست ؟

به فشار دادن یا کشیدن جسمی دلخواه، نیرو می‌گوییم. کشش یا فشار از برهم‌کنش اجسام با یکدیگر به وجود می‌آیند. در فیزیک، نیرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

به کشش یا فشار وارد شده بر جسمی به جرم دلخواه که سبب تغییر سرعت **آن می‌شود، نیرو گفته می‌شود.**

نیرو عامل خارجی است که سبب تغییر حالت سکون یا حرکت جسم می‌شود. نیرو اندازه و بزرگی دارد، بنابراین یک بردار است. جهتی که نیرو اعمال می‌شود، به عنوان جهت نیرو شناخته می‌شود.

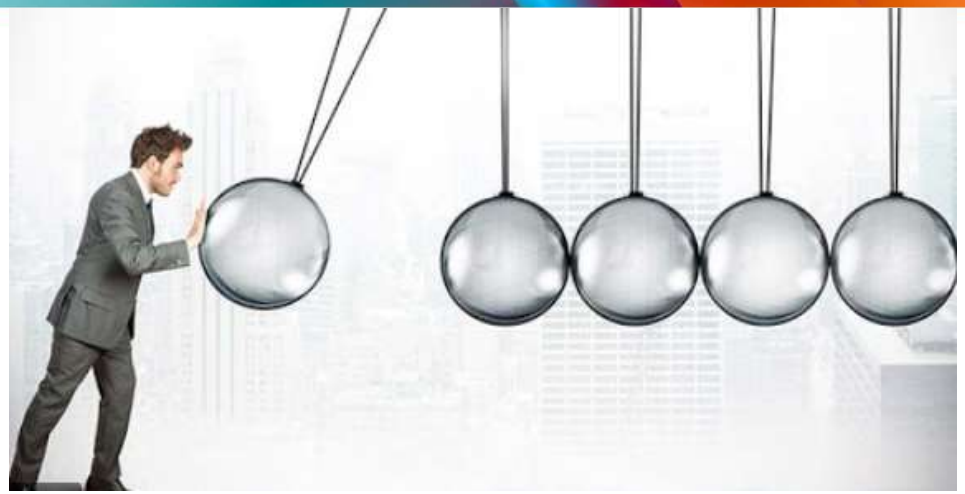
اثر نیرو چیست ؟

حرکت در فیزیک را به صورت تغییر موقعیت نسبت به زمان، تعریف می‌کنیم. در حالت کلی، حرکت به دو صورت توصیف می‌شود:

تغییر سرعت

تغییر جهت

فصل ۵ : دینامیک ذره – ۱



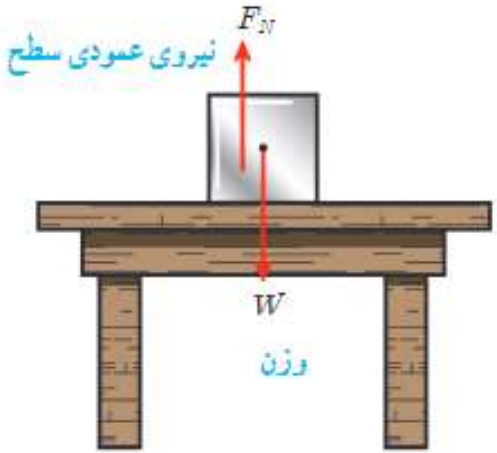
مسئله عمده در مکانیک کلاسیک به شرح زیر است:

ذره ای با مشخصات معلوم (جرم ، بار ، و....) را با سرعت اولیه معین در محیط کاملا معلومی قرار می دهیم. می خواهیم حرکت بعدی ذره یا سرعت و مکان آن را به صورت تابعی از زمان بیابیم .

نیرو عاملی است که باعث تغییر حرکت جسم می شود.

جرم یک جسم معیاری از میزان مقاومت جسم در مقابل تغییر حرکت است.

هرگاه چند نیرو بر جسمی اثر کند ، هر کدام مستقلا شتابی به جسم می دهند . شتاب بر آیند ، حاصل جمع برداری این شتابها است .

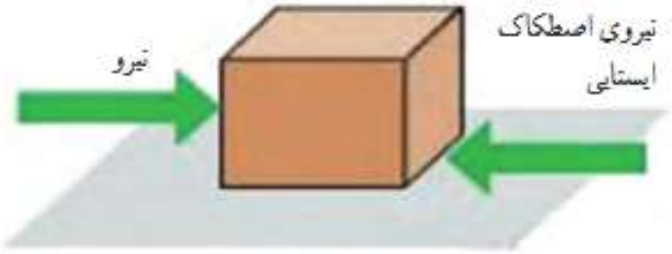


نیروی وزن

نیرویی که از طرف زمین بر جسم به سمت پایین وارد می گردد.

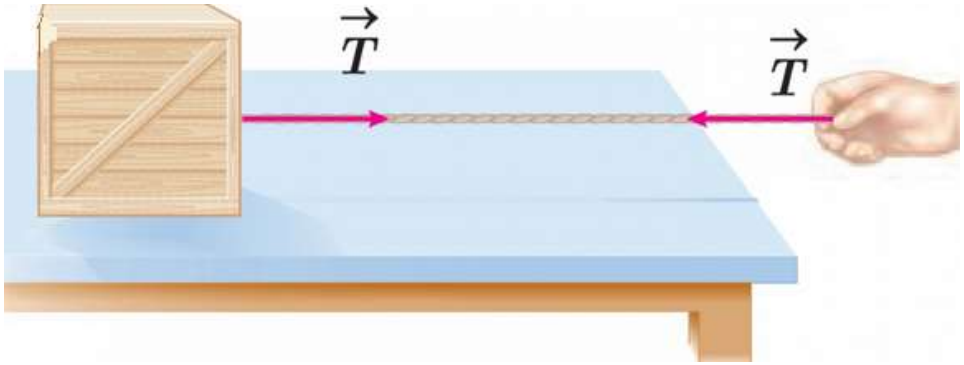
نیروی عمود بر سطح

وقتی جسمی بر روی یک سطح قرار دارد به دلیل نیروی وزن به طرف زمین کشیده می شود و برای آن که نیروها متوازن باشند باید نیرویی آن را خنثی کند . به این نیرو که از طرف تکیه گاه به سمت بالا بر جسم وارد می شود نیروی عمودی بر سطح یا تکیه گاه می گویند و آن را با F_N نشان می دهند



نیرو ی اصطکاک

وقتی جسمی روی یک سطح می لغزد نیروی از طرف (موازی سطح) در خلاف جهت حرکت احتمال جسم برجسم وارد می شود که آن را نیروی اصطکاک گوئیم.

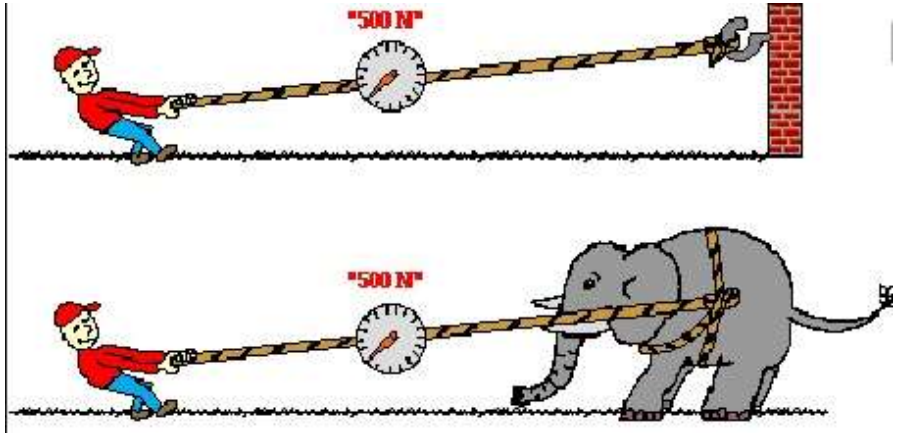


نیروی کشش ریسمان

نیروی است که از طرف طنابی که جسم را می کشد در نقطه اتصال طناب به جسم، بر جسم وارد می شود و در امتداد طناب است.

فصل ۵ : قانون اول نیوتن

در قوانین نیوتن اجسام ذره یعنی یک نقطه مادی بدون بعد فرض می شود.
حرکت یک ذره توسط محیط ذره مشخص می شود.
از طریق محیط اطراف ذره بر ذره نیرو وارد می شود و باعث شتاب آن می گردد.



قانون اول نیوتن

قانون اول نیوتن بیان می‌کند که اگر هیچ نیروی خالص خارجی بر روی یک جسم بدون حرکت وارد نشود، این جسم همچنان بی‌حرکت باقی می‌ماند. در تعریفی دیگر می‌توان گفت، بدون اعمال نیروی خالص خارجی بر روی جسمی که در یک مسیر مستقیم با سرعت ثابت در حرکت است، جسم همچنان به حرکت مستقیم خود در سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

قانون دوم نیوتن:

بیان می‌کند که مجموع نیروهای وارده بر جسم برابر با شتابی است که متناسب با جرم ذره به آن اعمال می‌گردد.

$$\sum F = ma_G$$

معادلات مولفه ای و اسکالر قانون دوم نیوتن:

$$F_{\text{net},x} = ma_x, \quad F_{\text{net},y} = ma_y, \quad \text{and} \quad F_{\text{net},z} = ma_z.$$

فصل ۵: دستگاه یکاهای مکانیکی

سه سیستم اندازه گیری در مکانیک: متریک گوسی، انگلیسی.

در سیستم متریک واحدهای اصلی:

طول: بر حسب متر

جرم: برحسب کیلوگرم

زمان: بر حسب ثانیه

واحد نیرو در نیوتن است که یک نیوتن نیرویی است که به جرم یک کیلو گرم شتاب یک متر بر مجذور ثانیه می دهد.

در سیستم گوسی واحدهای اصلی:

طول: بر حسب سانتیمتر

جرم: برحسب گرم

زمان: بر حسب ثانیه

واحد نیرو در دین است که به یک دین نیرویی است که به جرم یک گرم شتاب یک سانتیمتر بر مجذور ثانیه می دهد.

Units in Newton's Second Law

System	Force	Mass	Acceleration
SI	newton (N)	kilogram (kg)	m/s^2
CGS[a]	dyne	gram (g)	cm/s^2
British[b]	pound (lb)	slug	ft/s^2

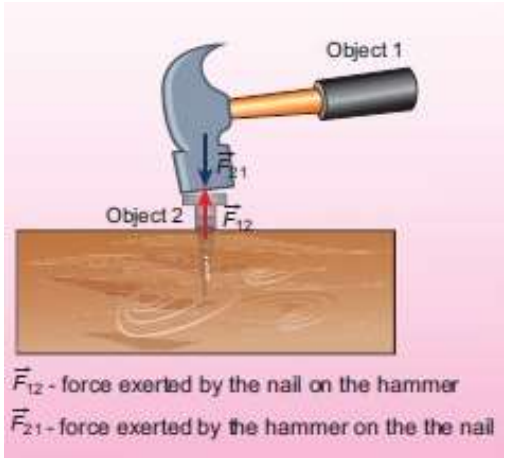
[a] $1\ \text{dyne} = 1\ g \cdot cm/s^2$.
[b] $1\ \text{lb} = 1\ \text{slug} \cdot ft/s^2$.

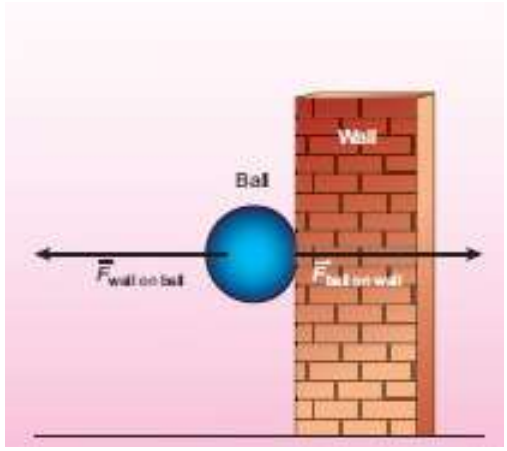
قانون سوم نیوتن:

کنشهای متقابل دو جسم بر هم همواره مساوی در خلاف جهت یکدیگرند.



$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}$$



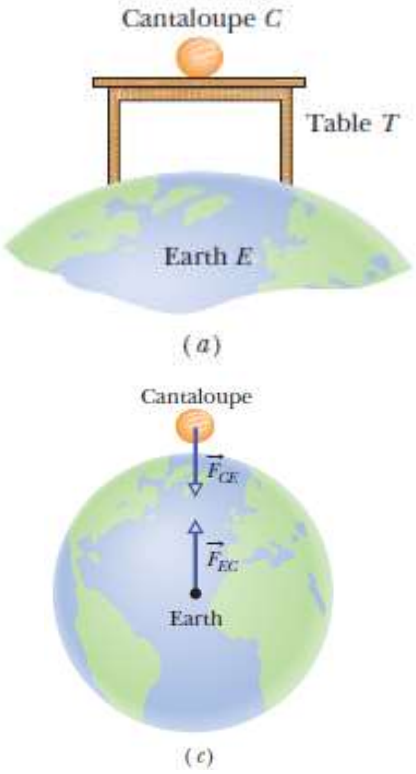


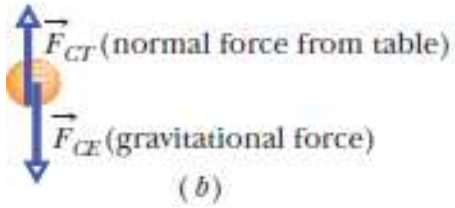


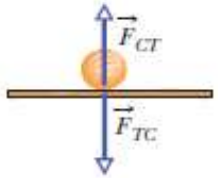
مثالی از قانون سوم:

د رشکل جسم بر روی سطح میز در حال سکون قرار دارد. نیروهای وارد بر جسم و عکس العمل آن نیروها رسم کنید.

عکس العمل نیروهای وارد بر جسم همراه با نیروهای وارد بر آن رسم شده است.







فصل ۵ : بعضی کاربردهای قوانین نیوتن

برای حل مسائل موارد زیر را انجام می دهیم:

۱- تعیین جسمی که حرکتش مورد نظر است (درقانون دوم نیوتن).

۲- مشخص کردن محیط مستقیم اطراف جسم به منظور تعیین نیروها ی وارد بر آن(یکی از محیطها همواره زمین می باشد).

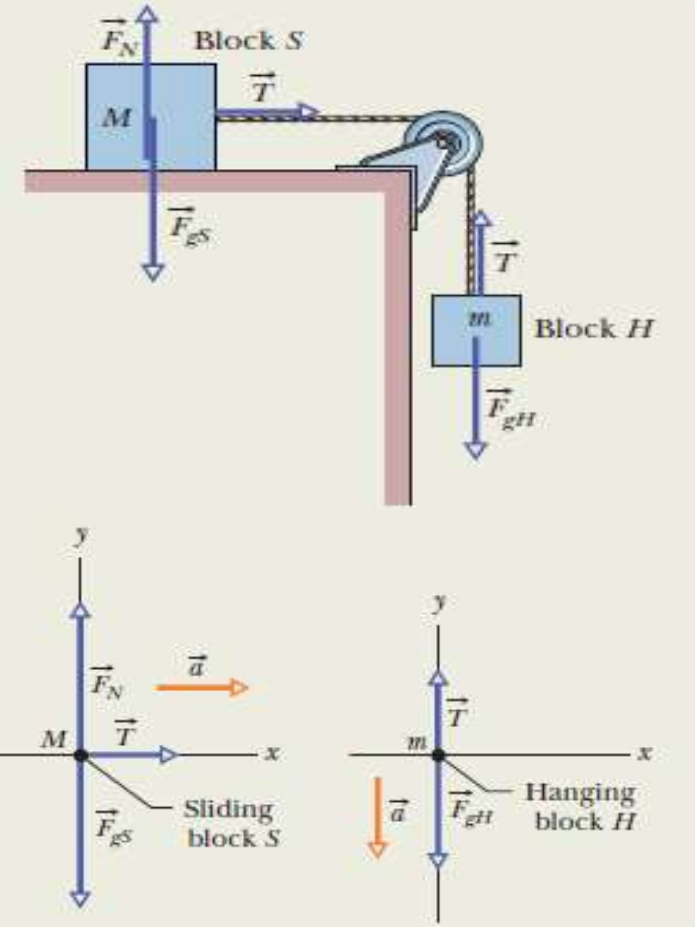
۳- تعیین سیستم مختصات مناسب (مناسب است که جهت مثبت محور ها در جهت شتاب باشد در این صورت است).

۴ - رسم نمودار جسم – آزاد یا رسم کلیه نیروهای وارد برجسم در سیستم مختصات مناسب.

۵- تجزیه نیروها و بدست آوردن مولفه ها در امتداد هر یک از محور های سیستم مختصات.

۶- استفاده از روابط مولفه ای قانون نیوتن:

$$F_{net,x} = Ma_x \qquad F_{net,y} = Ma_y \qquad F_{net,z} = Ma_z$$



مثال ۱- جسم برروی سطح میز بدون اصطکاکی قرار دارد و توسط طنابی و قرقره بدون اصطکاکی به جسم وصل است . شتاب هر یک از اجسام و نیروی کشش طناب را بدست آورید.

M=3.3kg **m=2.1kg**

$$F_{\text{net},x} = Ma_x \qquad F_{\text{net},y} = Ma_y \qquad F_{\text{net},z} = Ma_z$$

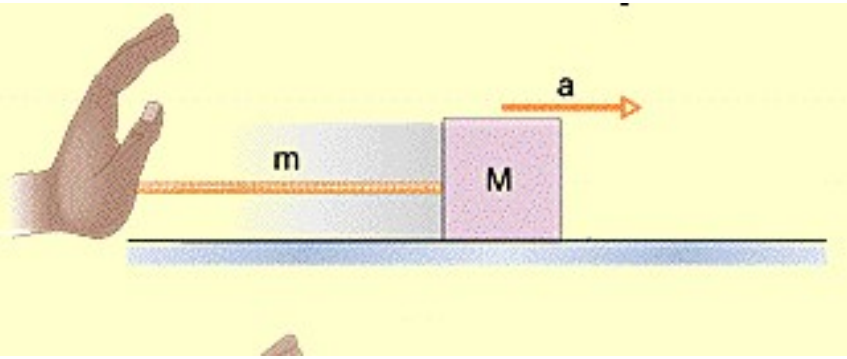
از روابط زیر شتاب و نیروی کشش ریسمان به دست می آ ید:

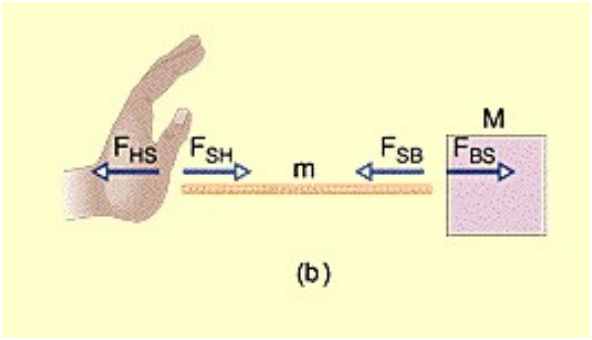
$$\left.\begin{aligned} F_{\text{net},y} &= Ma_y \\ F_{\text{net},x} &= Ma_x \end{aligned}\right\} \longrightarrow F_N - F_{gS} = 0 \qquad F_N = F_{gS} \longrightarrow \begin{aligned} T - mg &= -ma \\ T &= Ma. \end{aligned} \Bigg\} \longrightarrow \begin{aligned} a &= \frac{m}{M+m}g \\ T &= \frac{Mm}{M+m}g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{M+m}g = \frac{2.1\ \text{kg}}{3.3\ \text{kg} + 2.1\ \text{kg}}(9.8\ \text{m/s}^2) \\ &= 3.8\ \text{m/s}^2 \\ T &= \frac{Mm}{M+m}g = \frac{(3.3\ \text{kg})(2.1\ \text{kg})}{3.3\ \text{kg} + 2.1\ \text{kg}}(9.8\ \text{m/s}^2) \\ &= 13\ \text{N}. \end{aligned}$$

مثال ۲ : دو جسم روی سطح میز بدون اصطکاکی قرار دارند . اگر با دست نیرویی در امتداد افق بر جسم وارد کنیم و مجموعه از حالت سکون شروع به حرکت کند و با شتاب ثابت فاصله d=77cm را در زمان ۷/۱ ثانیه طی کند : الف) جفت نیروهایی کشش- واکنش را مشخص کنید. ب) نیروهایی که بر اجسام بر وارد می شود را به دست آورید

M=33kg و m=3.2kg





$$F_{HS} = -F_{SH}$$

$$F_{SB} = -F_{BS}$$

حل:

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2. \qquad a = \frac{2d}{t^2} = \frac{(2)(0.77\ \text{m})}{(1.7\ s)^2} = 0.533\ \text{m/s}^2.$$

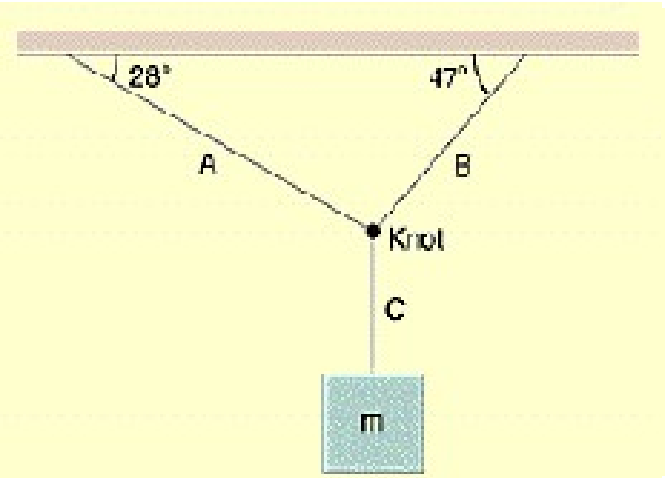
$$F_{SH} = (M + m)a = (33\ \text{kg} + 3.2\ \text{kg})(0.533\ \text{m/s}^2)$$
$$= 19.3\ \text{N} \approx 19\ \text{N}.$$

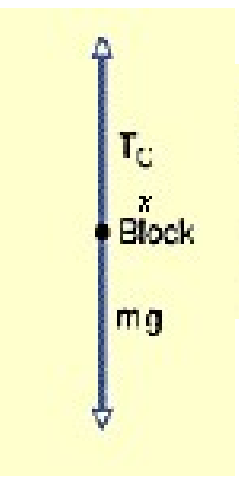
$$F_{BS} = Ma = (33\ \text{kg})(0.533\ \text{m/s}^2)$$
$$= 17.6\ \text{N} \approx 18\ \text{N}.$$

$$F = F_{SH} - F_{SB} = 19.3\ \text{N} - 17.6\ \text{N}$$
$$= 1.7\ \text{N}.$$

مثال ۳- جرم توسط ریسمان هایی آویخته شده است نیروی کشش در هر ریسمان را بدست آورید.

m=15kg

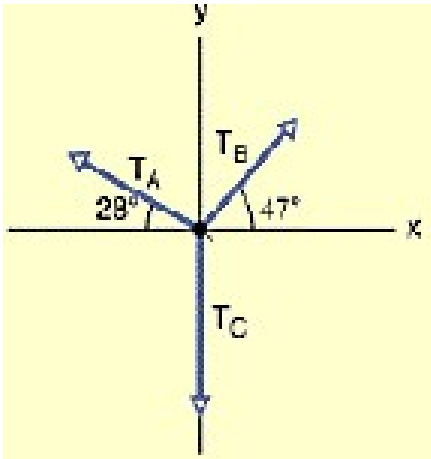




$$\sum F_y = T_C - mg = 0.$$

$$T_C = mg = (15\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)$$
$$= 147\ \text{N} \approx 150\ \text{N}.$$

ادامه حل:



$$\sum F_y = T_A \sin 28° + T_B \sin 47° - T_C = 0$$

$$\sum F_x = -T_A \cos 28° + T_B \cos 47° = 0.$$

$$T_A(0.469) + T_B(0.731) = 147 \text{ N}$$

$$T_B(0.682) = T_A(0.883).$$

$$T_B = \frac{0.883}{0.682} T_A = 1.29 T_A$$

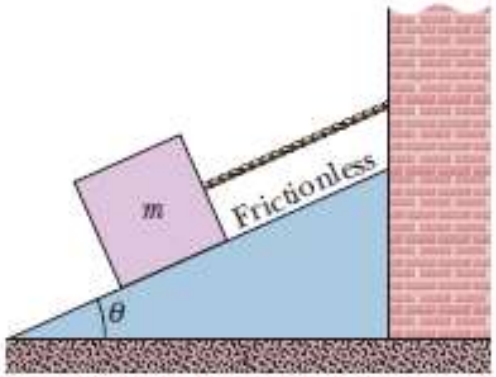
$$T_A = \frac{147 \text{ N}}{0.469 + (1.29)(0.731)}$$

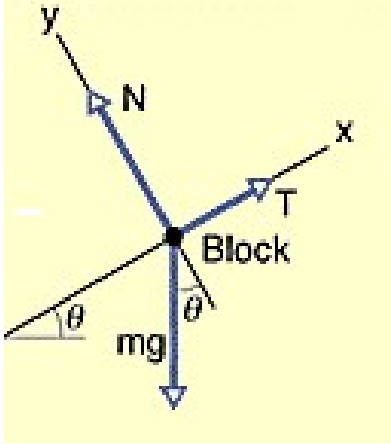
$$= 104 \text{ N} \approx 100 \text{ N}.$$

$$T_B = 1.29 T_A = (1.29)(104 \text{ N})$$

$$= 134 \text{ N} \approx 130 \text{ N}.$$

مثال ۴ – جرم توسط ریسمانی و در سطح شیبدار و بدون اصطحکاک نگه داشته شده است. اگر ***m=15kg*** باشد. الف) کشش ریسمان نیروی را که سطح بر جسم وارد می کند را بدست آورید ب) اگر ریسمان قطع شود شتاب حرکت جسم چقدراست؟





$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{N} + m\mathbf{g} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= T - mg\sin\theta = 0 \\
\sum F_y &= N - mg\cos\theta = 0. \\
T &= mg\sin\theta \\
&= (15\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(\sin 27^\circ) \\
&= 67\text{ N} \\
N &= mg\cos\theta \\
&= (15\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(\cos 27^\circ) \\
&= 131\text{ N} \approx 130\text{ N}.
\end{aligned}$$

ب) اگر ریسمان قطع شود شتاب حرکت جسم چقد راست؟

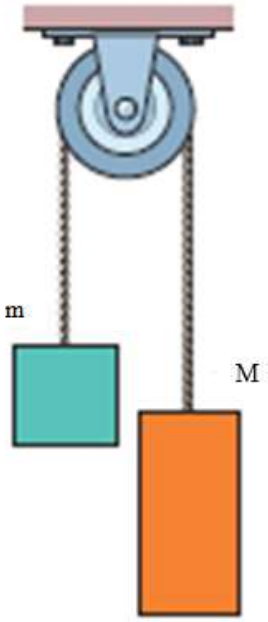
حل:

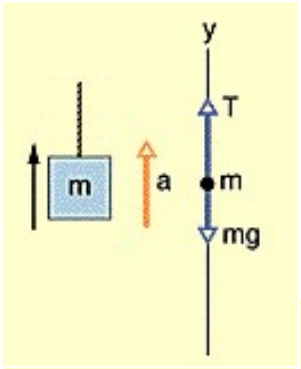


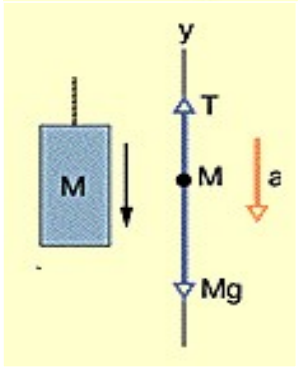
$$\sum F_x = 0 - mg \sin\theta = ma,$$

$$a = -g \sin\theta. \longrightarrow a = -(9.8\ \mathrm{m/s^2})(\sin 27^\circ) = -4.4\ \mathrm{m/s^2}.$$

مثال ۵ – دو جرم نامساوی به وسیله ریسمانی که از روی قرقره بدون اصطکاک و بدون جرمی گذشته است ، به هم وصل شده اند شتاب ونیروی کشش طناب را بدست آورید.







$$T - mg = ma.$$

$$T - mg = ma.$$

$$-T + Mg = Ma$$

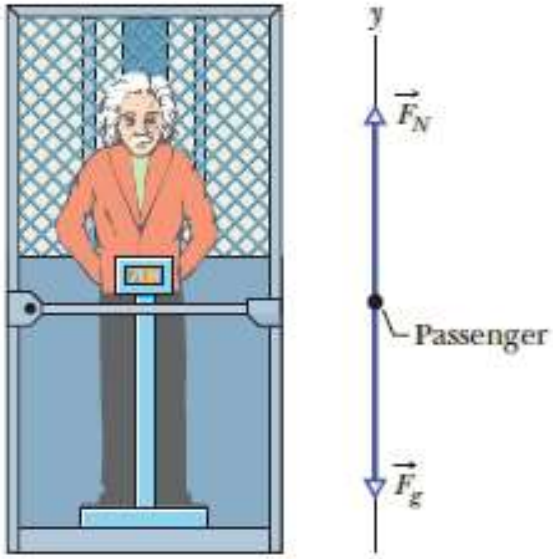
$$a = \frac{M - m}{M + m} g.$$

$$T = \frac{2mM}{M + m} g.$$

مثال ۶ – شخصی به جرم ***m=72.2kg*** روی ترازویی داخل آسانسوری که با شتاب در راستای قائم حرکت می کند ، ایستاده است عددی را که ترازو نشان می دهد (وزن ظاهری) را در هر یک از موارد شتاب صفر و آسانسور با سرعت ثابت به سمت بالا یا پایین حرکت می کند در این حالت وزن ظاهری و وزن حقیقی شخص یکسان است.

a=3.2m/s2

.



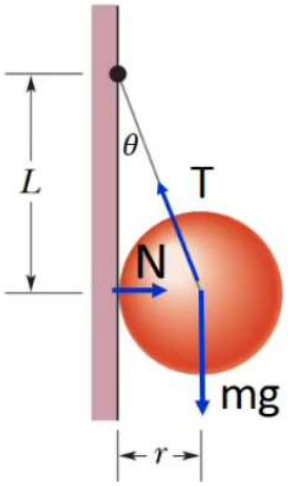
$$F_N - F_g = ma$$
$$F_N = F_g + ma.$$

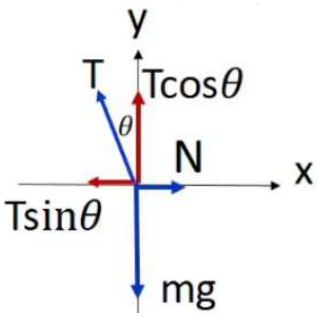
$$F_N = m(g + a)$$

$$F_N = (72.2\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2 + 3.20\ \text{m/s}^2) = 939\ \text{N},$$
$$F_N = (72.2\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2 + 0) = 708\ \text{N}.$$
$$F_N = (72.2\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2 - 3.20\ \text{m/s}^2) = 477\ \text{N}.$$

نمونه سوال

در شکل روبه روکره ی یکنواختی به جرم ۰.۸۵kg وشعاع ۴.۲cm به وسیله طنابی به جرم ناچیز به دیوار بدون اصطکاکی در فاصله ی L= 8cm بالاتر از مرکز کره متصل است . مطلوب است تعیین (الف)نیروی کشش در طناب و(ب)نیروی وارد بر کره از طرف دیوار.





نمونه سوال

حل:

$$\sum \vec{F} = 0 \begin{cases} \sum F_x = 0 \longrightarrow N - T\sin\theta = 0 \longrightarrow N = T\sin\theta \\ \sin\theta = \frac{r}{\sqrt{L^2+r^2}} \end{cases}$$

الف)

$$\sum \vec{F} = 0 \begin{cases} \sum F_y = 0 \longrightarrow T\cos\theta - mg = 0 \longrightarrow T\cos\theta = mg \\ \cos\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}} \end{cases}$$

ب)

نمونه سوال

الف)

$$\rightarrow N = \mathrm{T}\left(\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}}\right) \rightarrow N = 9.4\left(\frac{4.2 \times 10^{-2}}{\sqrt{(0.08)^2+(0.042)^2}}\right) = 4.4$$

ب)

$$\rightarrow \mathrm{T}\left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}\right) = mg \rightarrow \mathrm{T} = \frac{mg\sqrt{L^2 + r^2}}{L} = 9.4\mathrm{N}$$



فصل ۶ - دینامیک ذره -۲

فصل ۶ - دینامیک ذره -۲



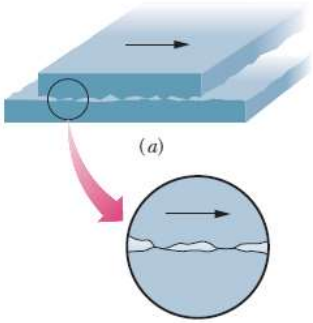
نیروهای اصطکاک

دینامیک حرکت دورانی یکنواخت

فصل ۶ - نیروهای اصطکاک

نیرویی که از یک سطح بر سطح دیگر که روی آن قرار دارد وارد می شود و با حرکت آن مخالفت می کند نیروی اصطکاک نامند.

جوش خوردگیهای موقت سطحی باعث نیروی اصطکاک می شود.



جهت نیروی اصطکاک موازی سطح و د رخلاف جهت حرکت احتمالی جسم است.



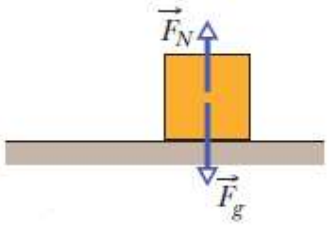
انواع نیروهای اصطکاک

۱- نیروی اصطکاک استاتیک که در حالت سکون بر جسم وارد می شود

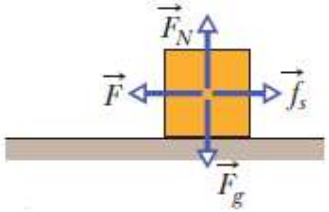
اگر جسم ساکن باشد نیروی اصطکاک استاتیک صفر است



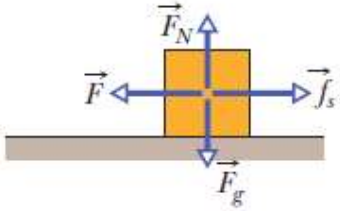
فصل ۶ - نیروهای اصطکاک



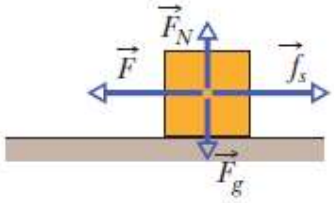
Frictional force = 0



Frictional force = F



Frictional force = F



Frictional force = F

در حقیقت حرکتی نسبی بین پا و زمین وجود ندارد. در نتیجه نیروی بین آن‌ها از نوع اصطکاک ایستایی محسوب می‌شود. اما اگر پا روی زمین کشیده شود، نیروی اصطکاک از نوع جنبشی است. بنابراین جهت تشخیص نوع نیروی بین دو سطح، به این نکته توجه فرمایید که آیا دو سطح نسبت به هم ساکن یا در حال حرکت هستند.

نیروی وارد شده بر جسم به اندازه ای نیست که جسم را به حرکت وا دارد در این حالت نیروی با افزایش نیروی نیز افزایش می یابد

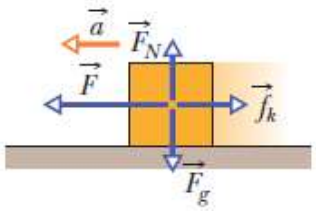
۲-نیروی اصطکاک استاتیک ماکزیمم : نیروی اصطکاکی است که بر جسم در آستانه حرکت وارد می گردد.

$$F_{s\,\max} = \mu_s F_n$$

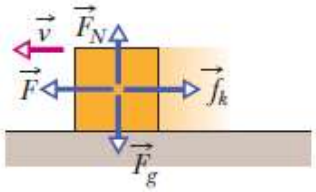
نیروی عکس العمل سطح

به جنس دو سطح

فصل ۶ - نیروهای اصطکاک



Weak kinetic frictional force



Same weak kinetic frictional force

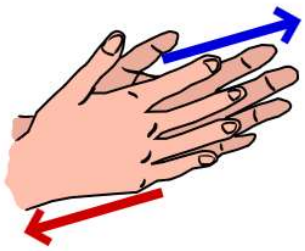
۳-نیروی اصطکاک جنبشی : که بر جسم در حال حرکت وارد می گردد و مقدار آن

$$F_k = \mu_k F_n$$

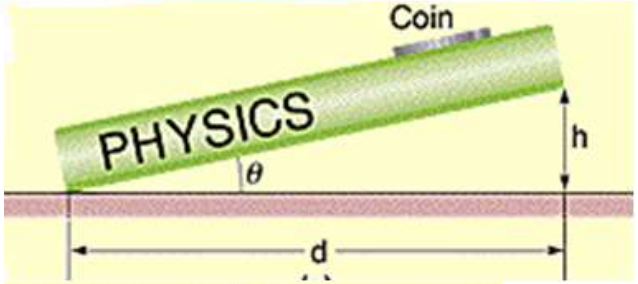
ضریب اصطکاک جنبشی

نیروی عکس العمل سطح

با تغییر نیروی ، نیروی اصطکاک جنبشی تغییری نمی کند

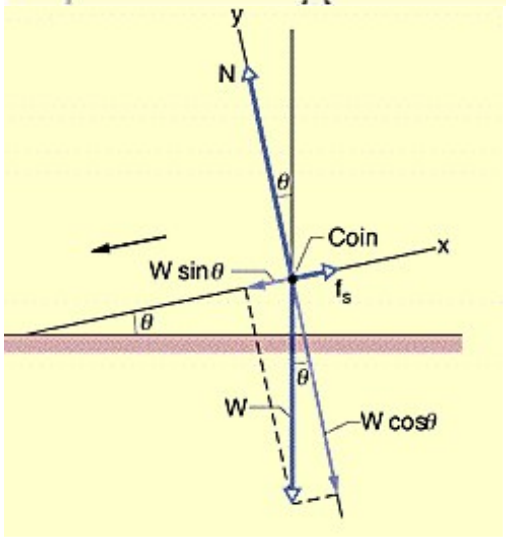


هرچه دستانتان را بیشتر به هم بفشارید، نیروی اصطکاک بین دو دست نیز بیشتر خواهد بود.



مثال ۱- یک سکه روی کتابی قرار دارد . زاویه را می توان تغییر داد مشاهده می شود که سکه تحت زاویه شروع به لغزش می کند ضریب اصطکاک استاتیک میان سکه و کتاب را بدست آورید.

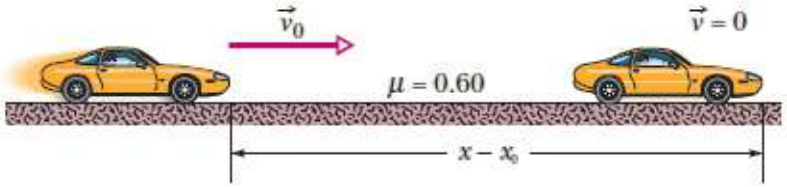
حل:



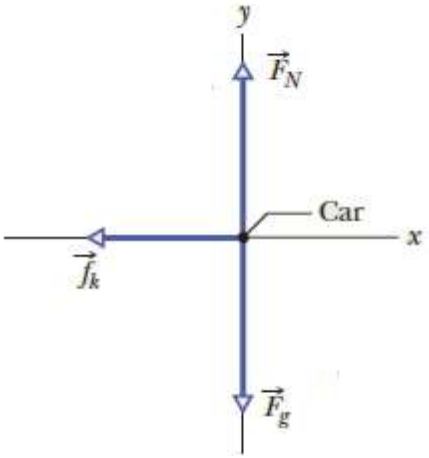
$$\sum F_x = f_s - W \sin\theta = 0, \quad \text{or} \quad f_s = W \sin\theta.$$

$$\sum F_y = N - W\cos\theta = 0, \quad \text{or} \quad N = W\cos\theta.$$

$$\frac{f_s}{N} = \frac{\mu_s N}{N} = \frac{W\sin\theta}{W\cos\theta} = \tan\theta,$$

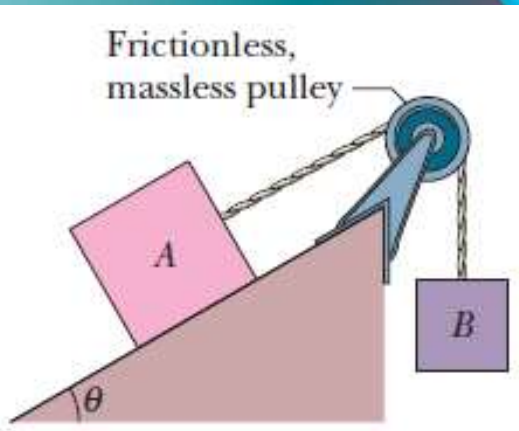


مثال۲- اتومبیل که با سرعت در امتداد جاده مستقیمی حرکت می کند ناگهان ترمز می کند بطوری که چرخها قفل می شوند و اتومبیل می لغزد . اگر ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۶فرض شود و سرعت اولیه ۱۰متر ثانیه باشد ، خط ترمز اتومبیل چقدر بوده است؟



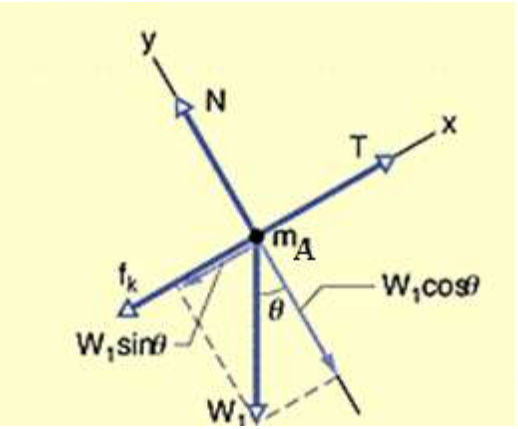
$$-f_k = ma_x \qquad f_k = \mu_k F_N \longrightarrow -\mu_k F_N = ma_x \longrightarrow \boxed{a_x = -\mu_k g}$$

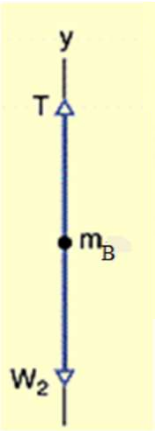
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \longrightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_x} = \frac{v^2 - v_0^2}{-2\mu_k g} = 8.50\,\text{m} \approx 8.5\,\text{m}$$



مثال ۳-دو جرم توسط ریسمانی که ا زیک قرقره بی وزن و بدون اصطکاک گذشته به یکدیگر وصل شده اند اگرزاویه شیب ۳۰ درجه باشد نیروی اصطکاک و ضریب اصطکاک جنبشی را بدست آورید.

$m_A = m_B = 14$ kg





$$\sum F_x = T - f_k - m_1 g \sin\theta = m_1 a_x = 0,$$

$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = 0,$$

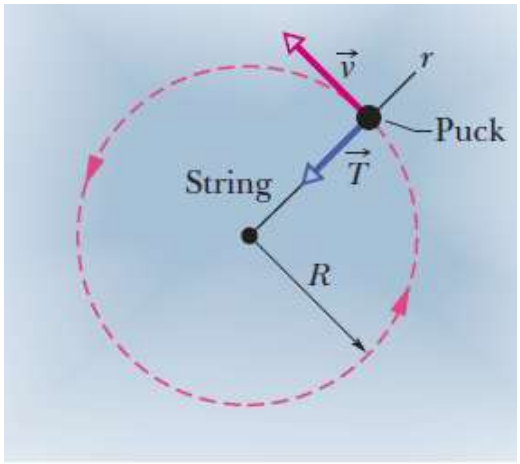
$$T = m_2 g.$$

$$\begin{aligned} f_k &= m_2 g - m_1 g \sin\theta \\ &= (14\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) - (14\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(\sin 30^\circ) \\ &= 68.6\text{ N} \approx 69\text{ N}. \end{aligned}$$

$$\mu_k = \frac{f_k}{N} = \frac{f_k}{m_1 g \cos\theta}$$

$$= \frac{68.6\text{ N}}{(14\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(\cos 30^\circ)} = 0.58.$$

فصل ۶ - دینامیک حرکت دورانی یکنواخت



شتاب حرکت ذره ای که با سرعت ثابت روی دایره ای به شعاع در حرکت است به سمت مرکز دوران و مقدار آن ثابت و برابر:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

با توجه به قانون دوم نیوتن به هر جسم شتابدار باید نیرویی وارد شود پس بر ایند وارد بر جسم دوران کننده باید به سمت مرکز دوران باشد و اندازه آن :

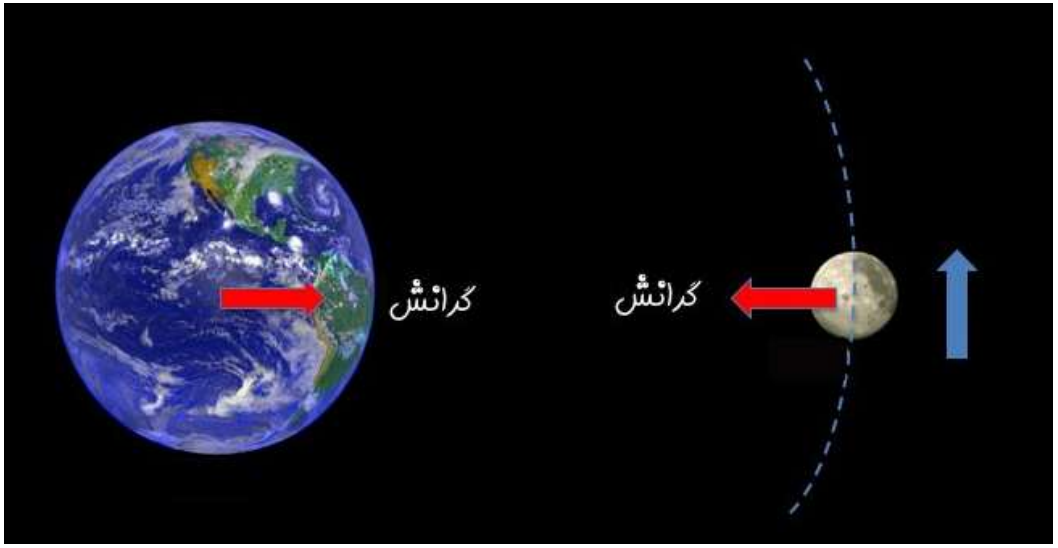
$$F = m\frac{v^2}{R}$$

فصل ۶ - دینامیک حرکت دورانی یکنواخت

چند نکته در حل مسائل دینامیک حرکت دورانی یکنواخت:

۱- همانند قبل جرم در قانون دوم نیوتن، محیط اطراف آن و بنابراین نیروهای وارد بر موضوع را مشخص و رسم می کنیم .

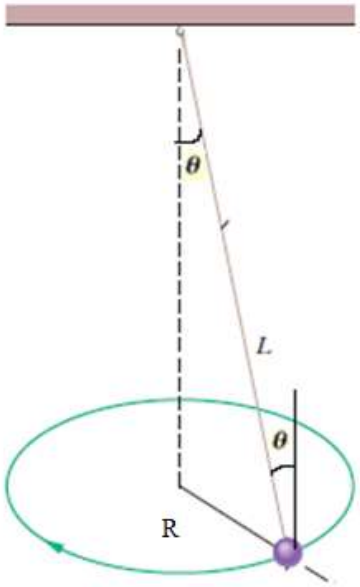
۲- یک سیستم مختصات مناسب ، که جهت آن درجهت شتاب جانب به مرکز است درنظر گرفته و نیروها را تجزیه می کنیم .

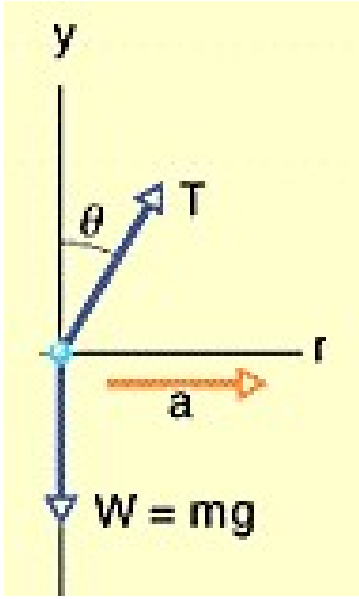


توجه داشته باشید که نیروی گریز از مرکز متفاوت با نیروی مرکزگرا است (البته مقدار آن‌ها در حرکت دایره‌ای یکنواخت برابر است). برای نمونه در هنگام چرخش زمین به دور خورشید نیرویی از جانب خورشید به آن وارد می‌شود که منجر به ثابت ماندن مدار زمین به دور خورشید خواهد شد. یا در حرکت ماه به دور زمین نیز نیرویی مشابه به ماه وارد می‌شود.

فصل ۶ - دینامیک حرکت دورانی یکنواخت

مثال ۱- آونگ مخروطی عبارت است از جسم کوچکی که با سرعت ثابت در انتهای نخی به طول مشخص روی دایره افقی دوران می کند دوره تناوب آن را بدست آورید.





$$T\sin\theta = ma_r = \frac{mv^2}{R},$$

$$T\cos\theta - mg = ma_y = 0, \quad \text{or} \quad T\cos\theta = mg.$$

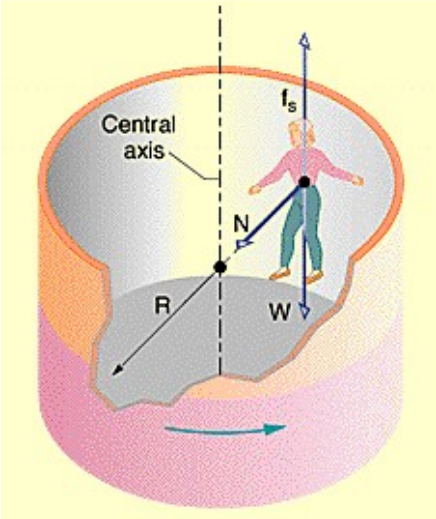
$$v = \sqrt{\frac{gR\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\theta}{g\sin\theta}}$$

$$R = L\sin\theta$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

مثال ۲- گردونه . ضریب اصطکاک لازم برای جلوگیری از سقوط شخص درگردونه که با سرعت می چرخد را بدست آورید. اگر ضریب اصطکاک استاتیک میان لباس و گردونه ۴/۰ باشد . سرعت دوران لازم چقدر است؟

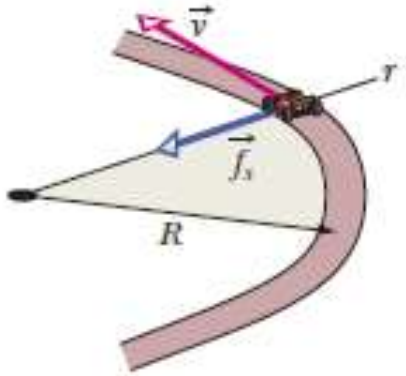


$$\mu_s N = mg,$$
$$N = \frac{mv^2}{R}.$$

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} = \sqrt{\frac{(9.8\ \text{m/s}^2)(2.1\ \text{m})}{0.40}}$$
$$= 7.17\ \text{m/s} \approx 7.2\ \text{m/s}.$$

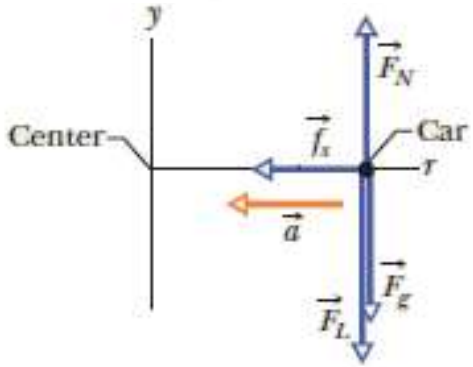
فصل ۶ - دینامیک حرکت دورانی یکنواخت

مثال ۳- اتومبیلی به جرم $m=1600\ kg$ با سرعت ثابت $v=20\ m/s$ در امتداد جاده دایروی مسطح به شعاع ۱۹۰ متر درحال دور زدن است . مینیمم مقدارضریب اصطکاک استاتیک بین چرخها و جاده چقدر باشد تا اتومبیل به سمت خارج نلغزد؟



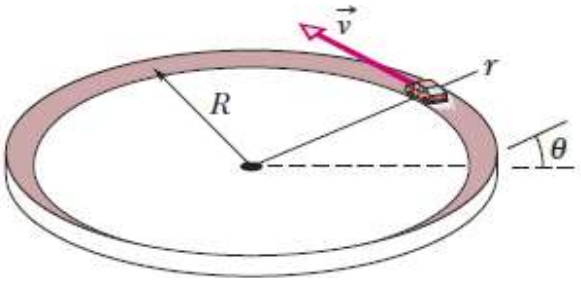
$$\mu_s mg = \frac{mv^2}{R},$$

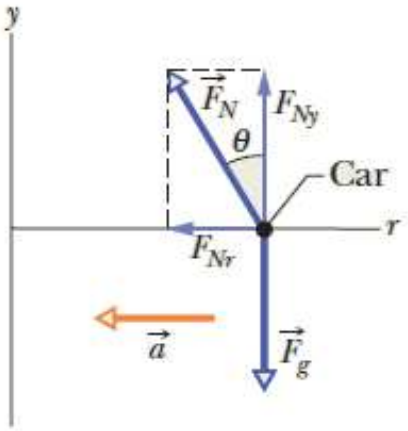
$$\mu_s = \frac{v^2}{gR} = \frac{(20\ \text{m/s})^2}{(9.8\ \text{m/s}^2)(190\ \text{m})} = 0.21.$$



فصل ۶ : دینامیک حرکت دورانی یکنواخت

مثال ۴ - همواره نمی توان به اصطکاک اعتماد کرد به همین دلیل در سر پیچها جاده ها را شیب عرضی می دهند . در این صورت زاویه شیب لازم چقدر باشد تا در نبود اصطکاک اتومبیل نلغزد





$$F_{\text{net},r} = ma_r \longrightarrow -F_N \sin\theta = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)$$

$$F_{\text{net},y} = ma_y \longrightarrow F_N \cos\theta - mg = m(0) \longrightarrow F_N \cos\theta = mg.$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{gR}$$

نیروی مقاومت هوا



هنگامی که یک توپ پرتاب می شود، حرکت آن یک سهمی را شکل می‌دهد. توپ به جلو و بالا می رود، سپس جاذبه حرکت رو به بالا را متوقف می‌کند و آن را به سمت پایین می‌کشد، اما حرکت رو به جلو ادامه می‌یابد. با این حال، نیمه دوم سهمی معمولاً مسافت کوتاه‌تری را نسبت به نیمه اول طی می‌کند. این در حالی است که حرکت در واقع سهمی است. وقتی جسم پرتاب شده پر یا دستمال باشد، مسیر حرکت ممکن است اصلاً شکل خاصی ایجاد نکند.

سرعت پایانی

سرعت پایانی نتیجه گرانش و کشش رو به بالا است که یکدیگر را متعادل می‌کنند. به عنوان مثال، یک چترباز در موقعیت معمول، یعنی بازوهای باز و رو به زمین، به سرعت نهایی حدود ۱۹۳ کیلومتر در ساعت می‌رسد. هنگامی که یک چترِ باز به آن متصل می‌شود، سرعت پایانه به ۱۹ کیلومتر در ساعت کاهش می‌یابد، در حالت ایده‌آل حرکت به اندازه‌ای آهسته می‌شود که چترباز در حالت ایستاده فرود بیایید و راه بروید.

نیروی مقاومت هوا

نیروی درگ

هنگامی که مقاومت هوا در بالاترین حد خود قرار دارد، نیرویی که ایجاد می‌کند درگ نامیده می‌شود که در زاویه‌ای مخالف جهت حرکت است. درگ دو جزء دارد: یکی در جهت افقی و دیگری در جهت عمودی. بسته به زاویه حرکت، یک جزء می‌تواند بزرگتر از دیگری باشد. بنابراین، گرانش و درگ هر دو سعی می‌کنند سرعت جسم متحرک را کاهش دهند، اولی در جهت عمودی و دومی در جهت افقی.

دلیل تغییر حرکت یک جسم در هوا از یک سهمی کامل، نیروی درگ است. یک عامل بسیار مهم در کشش، چگالی سیال است. نیروی کشش در هوای رقیق در ارتفاع بالا، هوای معمولی و در آب متفاوت است. عامل مهم دیگر شکل و اندازه جسم است.

نیروی مقاومت هوا به ضریب درگ مربوط به سیالی که جسم در آن حرکت می‌کند که در این جا هوا است، مجذور سرعت جسم در حال حرکت در یک سیال و سطح مقطع جسمی که در هوا در حال حرکت است، بستگی دارد.

در حقیقت رابطه نیروی مقاومت هوا برابر است با:

$$D = \frac{1}{2} C_d A \rho V^2$$

نیروی مقاومت هوا

مقاومت هوا را می‌توان با ضرب چگالی هوا در ضریب درگ، ضرب در مساحت جسمی که در هوا حرکت می‌کند، ضرب در مجذور سرعت محاسبه کرد. گاهی برای ساده سازی معادلات دیگر، برخی از عناصر را ثابت در نظر می‌گیرند. واحد مورد استفاده برای نشان دادن نیروی مقاومت هوا نیوتن است.

نیروی مقاومت هوا یک نوع خاصی از اصطکاک است و از نوع نیروهای تماسی است که بر جسمی که در هوا حرکت می‌کند وارد می‌شود.

نیروی مقاومت هوا

مثال ۱: یک جت مسافربری بزرگ با سرعت $v = 250\frac{m}{s}$ در حال حرکت است. مساحت بال‌های جت برابر با $A = 500\ m^2$ است. ضریب درگ در این حالت برابر با $C_d = 0.024$ است. در ارتفاعی که هواپیما در حال حرکت است چگالی هوا $\rho = 0.4500$ کیلوگرم بر متر مکعب است. در این حالت نیروی مقاومت هوا بر جت مسافربری چه قدر است؟

پاسخ: نیروی مقاومت هوا توسط رابطه زیر به دست می‌آید و با جایگذاری مقادیر داده شده در مسئله داریم:

$$F = \frac{\rho C_D A}{2} v^2$$

$$F = \frac{(0.4500\ \mathrm{kg/m^3})\,(0.025)\,(510.0\ \mathrm{m^2})}{2}(250.0\ \mathrm{m/s})^2$$

$$F = \frac{(0.4500\ \mathrm{kg/m^3})\,(0.024)\,(500.0\ \mathrm{m^2})}{2}(62500\ \mathrm{m^2/s^2})$$

$$F = 168750\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

$$\mathrm{F} = 168750\ \mathrm{N}$$

نیروی مقاومت هوا

مثال ۲: زنی با چتر نجات به سمت زمین در حال حرکت است. او با سرعت ثابت به سمت پایین حرکت می‌کند، زیرا نیرویی که از مقاومت هوا به سمت بالا به او وارد می‌شود با نیروی گرانش رو به پایین شخص خنثی می‌شود. چگالی هوا در ارتفاع فعلی 1٫20 کیلوگرم بر متر مکعب، مساحت چتر 75 متر مربع، و ضریب درگ چتر نجات $C_d = 1.75$ است. سرعت رو به پایین این زن چتر باز چه قدر است؟

پاسخ: سرعت زن چترباز با استفاده از نیروی مقاومت هوا قابل محاسبه است و داریم:

$$F = \frac{\rho C_D A}{2} v^2 \rightarrow v^2 = \frac{2F}{\rho C_D A}$$

$$v^2 = \frac{2F}{\rho C_D A} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2F}{\rho C_D A}}$$

سرعت زن چتر باز ثابت است و بنابراین نیروی گرانشی که به سمت پایین وارد می‌شود باید برابر با مقدار نیروی مقاومت هوا که به سمت بالا وارد می‌شود، باشد. بنابراین، نیروی F در فرمول بالا برابر با 500 نیوتن است. بدین ترتیب سرعت رو به پایین زن چترباز برابر است با:

نیروی مقاومت هوا

$$v = \sqrt{\frac{2F}{\rho C_D A}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(500\ \text{N})}{(1.20\ \text{kg/m}^3)\,(1.75)\,(75.0\ \text{m}^2)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{157.5\ \text{kg/m}}}$$

$$v = \sqrt{6.349\ \text{m}^2/\text{s}^2}$$

$$v = 2.52\ \text{m/s}$$

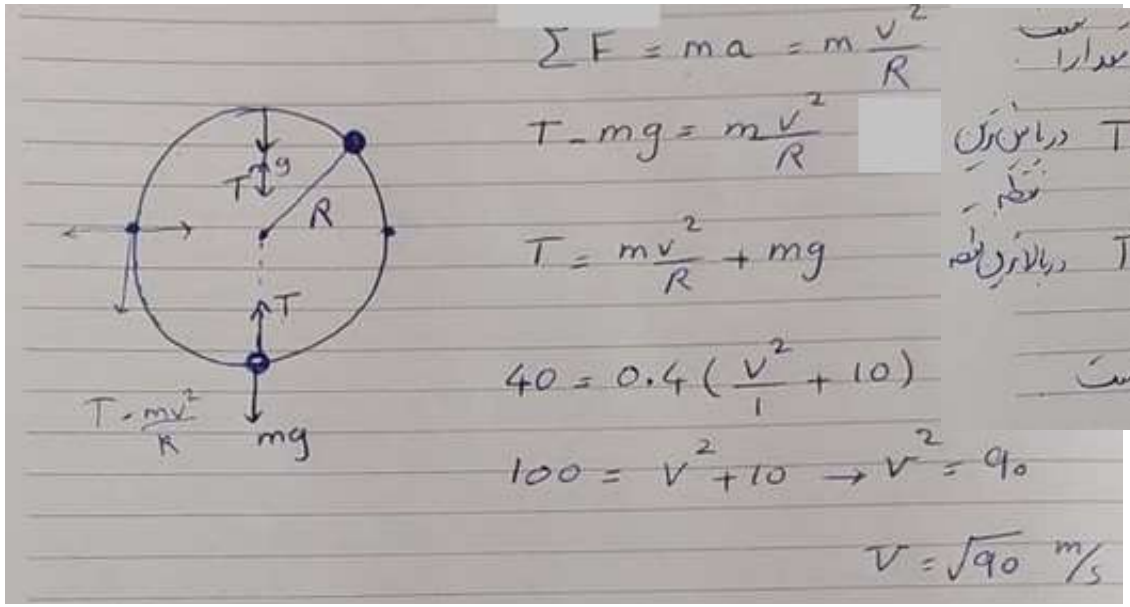
نمونه سوال

ریسمانی می‌تواند بیشینه کشش $۴۰\ N$ را بدون پاره شدن تحمل کند. بچه ای سنگی را به جرم $۰/۴\ kg$ به انتهای این ریسمان بسته و انتهای دیگر آن را در دست خود می‌گیرد و سنگ را در دایره قائمی به شعاع $۱\ m$ می‌چرخاند. او تندی سنگ را به آرامی افزایش می‌دهد تا اینکه ریسمان پاره شود.

الف) با مقایسه نیروی کشش نخ در نقاط مختلف مسیر دایره ای، توضیح دهید هنگام پاره شدن ریسمان، سنگ در کجای مسیر دایره قرار دارد؟

ب) تندی سنگ هنگام رها شدن از ریسمان چقدر است؟

نمونه سوال

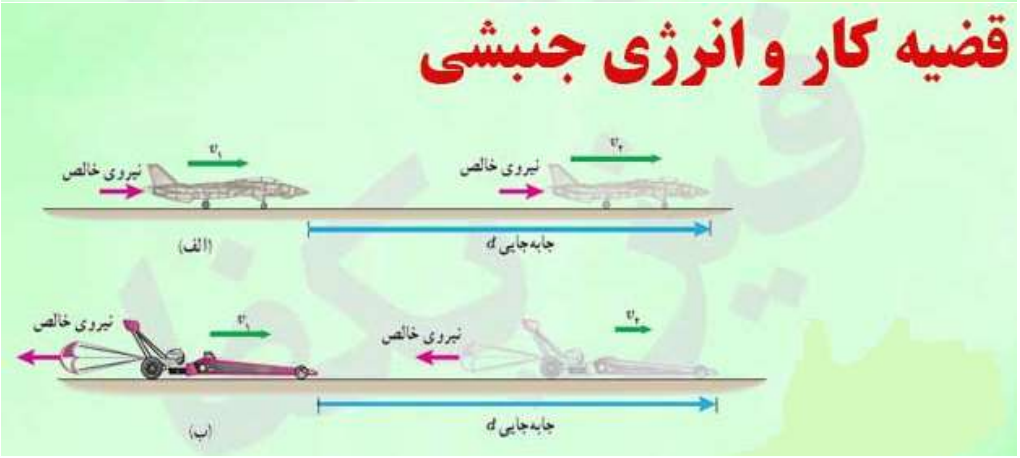

$\sum F = ma = m\frac{v^2}{R}$
$T - mg = m\frac{v^2}{R}$
$T = m\frac{v^2}{R} + mg$
$40 = 0.4\left(\frac{v^2}{1} + 10\right)$
$100 = v^2 + 10 \rightarrow v^2 = 90$
$v = \sqrt{90}\ m/s$
الف) در پایین‌ترین قسمت دایره، زیرا در این نقطه مقدار T بیشترین مقدار است
در پایین‌ترین نقطه: $T - mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow T = \frac{mv^2}{R} + mg$
در بالاترین نقطه: $T + mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow T = \frac{mv^2}{R} - mg$
در تمام نقاط دیگر دایره، مقدار T بین دو نقطه بالا و پایین دایره است.
R
T
mg
$T - \frac{mv^2}{R}$

نمونه سوال



فصل ۷ – کار و انرژی





کار نیروی ثابت

کار نیروی متغییر – مورد یک بعدی

انرژی جنبشی و قضیه کار – انرژی

توان

مسئله اساسی دینامیک یافتن مکان ذره به صورت تابعی از زمان است.

اگر نیروهای وارد بر ذره ثابت باشد ، براحتی می توان از قانون دوم نیوتن شتاب و با استفاده ا زمعادلات حرکت با شتاب ثابت ، مکان و سرعت را به صورت تابعی از زمان بدست آورد.

اگر نیرو ها ی وارد بر ذره ثابت نباشد ، شتاب نیز ثابت نیست و فرمولهای حرکت با شتاب ثابت صادق نیست در این صورت باید از روشهای انتگرالگیری استفاده کنیم.

فصل ۷ : کار نیروی ثابت



اگر نیروهای وارد بر ذره تابع مکان ذره باشد مانند نیروی گرانش و نیروی فنر از مفاهیم کار و انرژی می توان برای پیدا کردن سرعت ذره استفاده کرد.

فرض می کنیم در امتداد خط راست و نیروی وارد بر ذره د رهمان امتداد و ثابت باشد کار نیروی هنگامی که ذره تحت تاثیر آن به اندازه d جابجا می گردد عبارت است از:

$$W = F_x d$$

$$1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 1\ \text{N}\cdot\text{m} = 0.738\ \text{ft}\cdot\text{lb}.$$

فصل ۷ : کار نیروی ثابت

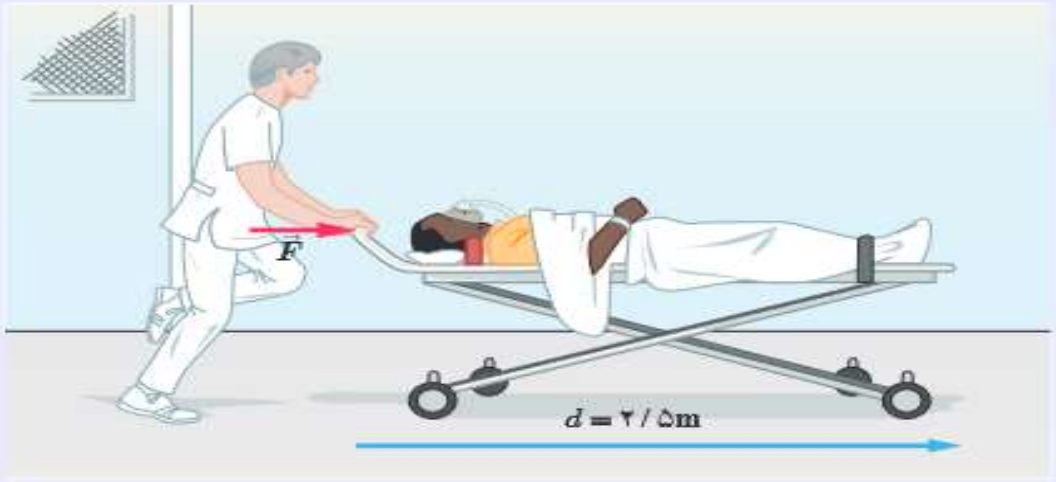
اگر نیروی ثابت وارد بر ذره در امتداد حرکت نباشد بلکه زاویه ϕ با امتداد جابجا بسازد کار نیروی :

$$W = Fd\cos\phi$$

کار کمیتی نرده ای است که می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد .

هنگامی که جسمی را د رمقابل سطح زمین سطح زمین بالا می بریم کار مثبت و هنگامی که جسمی را در مقابل سطح زمین پایین می آوریم کار منفی و

هنگامی که جسمی را در مقابل سطح درامتداد افق جابجا می کنیم کار صفر است.



بیماری به جرم ۷۲kg روی تختی به جرم ۱۵kg دراز کشیده است. پرستاری این تخت را با نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ روی سطحی هموار و با اصطکاک ناچیز هُل می‌دهد. مجموعهٔ تخت و بیمار با شتاب ۰/۶۰m/s^2 حرکت می‌کند.

الف) اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ چقدر است؟

ب) اگر تخت ۲/۵m در جهت این نیرو جابه‌جا شود، کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ را حساب کنید.

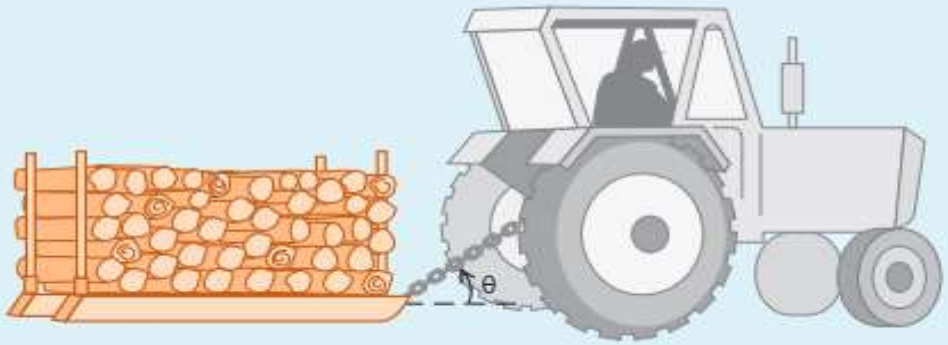
پاسخ : الف) جرم کل بیمار و تخت برابر ۸۷kg است. با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم :

$$F = ma = (۸۷\text{kg})(۰/۶۰\text{m/s}^2) = ۵۲\text{N}$$

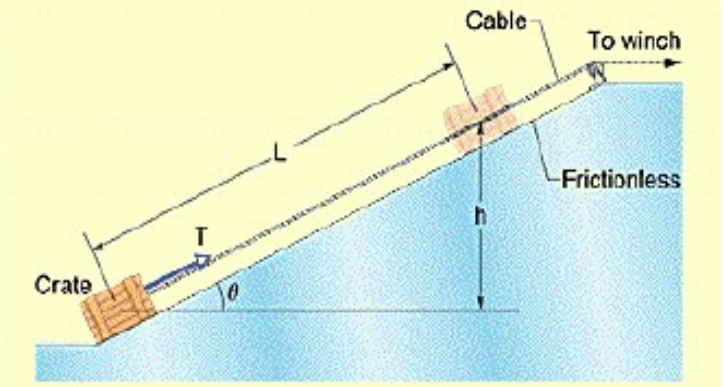
ب) چون نیرو و جابه‌جایی در یک جهت‌اند، با استفاده از رابطهٔ (۲ــ۲) کار نیروی F برابر است با :

$$W = Fd = (۵۲\text{N})(۲/۵\text{m}) = ۱/۳ \times ۱۰^2\text{J}$$

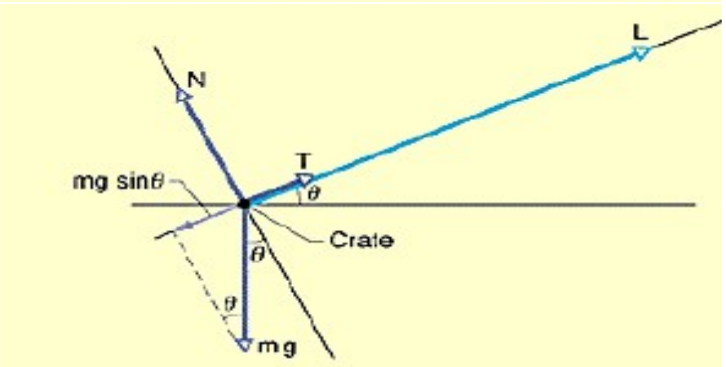
کشاورزی توسط تراکتور، سورتمه‌ای پر از هیزم را در راستای یک زمین هموار به اندازهٔ ۲۳۵m جابه‌جا می‌کند (شکل زیر). وزن کل سورتمه و بار آن $mg = ۱/۴۷ \times ۱۰^۴ \text{N}$ است. تراکتور نیروی ثابت $F_۱ = ۵/۰۰ \times ۱۰^۳ \text{N}$ را در زاویهٔ $\theta = ۴۵^\circ$ بالای افق به سورتمه وارد می‌کند. نیروی اصطکاک جنبشی $f_k = ۳/۵۰ \times ۱۰^۳ \text{N}$ است که برخلاف جهت حرکت به سورتمه وارد می‌شود. کار کل انجام شده روی سورتمه را به دو روش محاسبه کنید.



فصل ۷ : کار نیروی ثابت

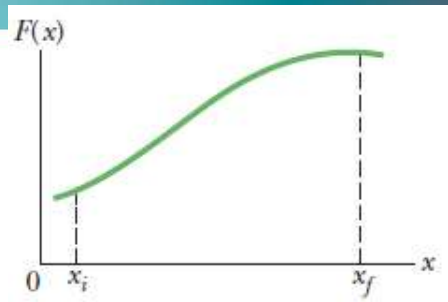


مثال- می خواهیم جسمی به جرم ۱۵ کیلوگرم را از سطح شیب دار بدون اصطکاکی به طول ۵/۷ متر تا ارتفاع ۲/۵ متری با نیروی موازی سطح شیب دار با سرعت ثابت بالا ببریم . کار نیروی وزن را محاسبه کنید.



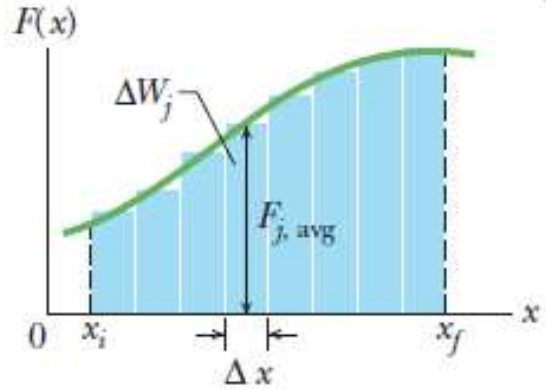
$$W_g = mg\,L\cos(\theta + 90^\circ) = -mgL\sin\theta = -mgh.$$

$$W_g = -(15.0\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(2.50\text{ m})$$
$$= -368\text{ J}.$$



کار این نیرو F(x) روی جسم هنگامی که جسم از نقطه x_i به نقطه x_f جابجا می گردد برابر است با :

$$\Delta W_j = F_{j,\text{avg}}\,\Delta x \longrightarrow W = \sum \Delta W_j = \sum F_{j,\text{avg}}\,\Delta x \longrightarrow W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F_{j,\text{avg}}\,\Delta x$$



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

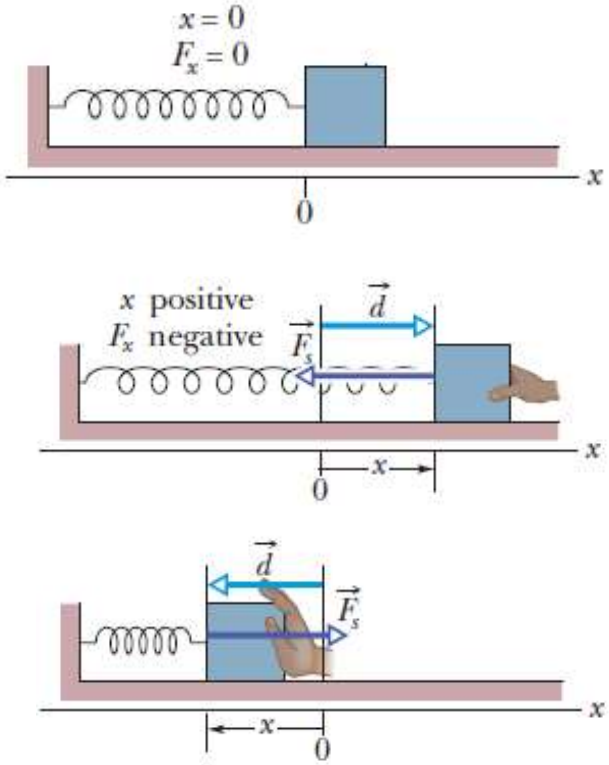
کار نیرو ی متغیر برابر سطح زیر منحنی است

به عنوان مثال از کار نیروی متغییر کار نیروی فنر را محاسبه می کنیم

طبق قانون هوک هرگاه انتهای فنری را به اندازه X نسبت به وضعیت تعادلیش بکشیم ویا بفشاریم ، فنر بر عاملی که باعث تغییر طول آن نیرویی متناسب با تغییر طول وارد می کند:

$$F_x = -kx$$

K ضریبی است که ثابت فنر نامیده می شود



کار نیروی فنر درجابجایی انتهای آزاد آن از نقطه x_i به x_f نقطه

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_x\,dx \longrightarrow W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx$$

$$= (-\tfrac{1}{2}k)[x^2]_{x_i}^{x_f} = (-\tfrac{1}{2}k)(x_f^2 - x_i^2)$$

این کار برابر است با :

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

اگر نیرو هم از لحاظ اندازه و هم جهت تغییر کند و اگر جابجایی جسم یک مسیر خمیده باشد در این صورت کار نیرو درجابجایی جسم از نقطه r_i تا r_f نقطه برابر است با :

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\longrightarrow \quad dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz.$$

فصل ۷ – کار نیروی متغیر – مورد سه بعدی

نیروی $\vec{F} = 3x^2 i + 4j$ که در آن xبر حسب متر است،بر ذره ای وارد می شود و فقط انرژی جنبشی آن را تغییر می دهد.هنگامی که ذره از نقطه ای با مختصات(۳و۲) به نقطه ای با مختصات (۰و۳) جابه جا می شود،چقدر کار روی آن انجام می شود؟آیا سرعت حرکت این ذره طی این جابه جایی افزایش می یابد؟

$$w=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,.\overrightarrow{dr}$$

$$=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (3x^2 i + 4j)\,.(dxi + dyj)$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (3x^2 dx + 4dy) = \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^0 4\,dy$$

$$=3\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 + 4y\Big|_3^0$$

$$=(3)^3 - 2^3 + 4(0) - 4(3) = 7J$$

$$w_{\text{کل}} = \Delta k = k_2 - k_1$$

معنی این نتیجه مثبت این است که بر اثر نیروی **F**،انرژی جنبشی ذره افزایش یافته و بنابراین سرعت ذره نیز افزایش یافته است

انرژی جنبشی یک جسم طبق تعریف برابر است با :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \longleftrightarrow \quad 1\ \text{joule} = 1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$$

بیان قضیه کار- انرژی :

کار بر آیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر است با تغییرات انرژی جنبشی آن

$$\Delta K = K_f - K_i = W$$

$$K_f = K_i + W$$

اثبات قضیه در حالتی که برآیند نیروها ثابت باشد:

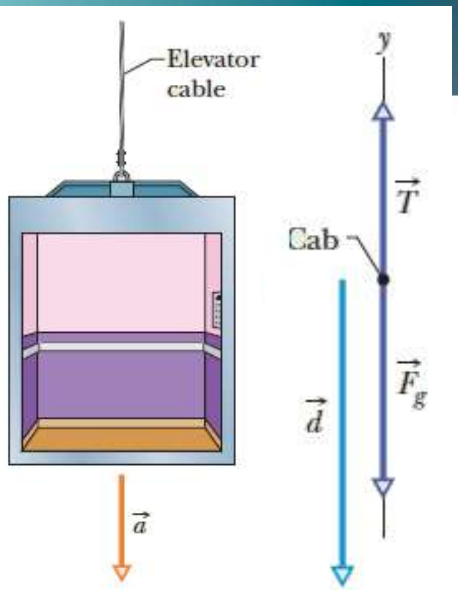
$$F_x = ma_x$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d$$
$$\rightarrow \quad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F_x d = W$$

اثبات قضیه کار – انرژی جنبشی در حالت کلی

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx$$

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dt}dx$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$
$$\rightarrow \quad ma\,dx = m\frac{dv}{dx}v\,dx = mv\,dv$$

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2.$$



مثالی :آسانسور به جرم ۵۰۰ کیلوگرم با سرعت ۴ متر بر ثانیه به سمت پایین در حرکت است . کابل آسانسور ناگهان شل می شود و آسانسور با شتاب $1/5g$ به سمت پایین حرکت می کند . در طی سقوط آن درفاصله ۱۲ متری سقوط، مطلوب است : الف) کار انجام شده روی آسانسور توسط نیروی وزن ب) کار انجام شده توسط نیروی کابل

الف)

$$W_g = mgd\cos 0° = (500\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(12\text{ m})(1)$$
$$= 5.88\times 10^4\text{ J} \approx 59\text{ kJ}.$$

ب)

$$T - F_g = ma. \longrightarrow W_T = Td\cos\phi = m(a+g)d\cos\phi. \longrightarrow \begin{cases} W_T = m\left(-\frac{g}{5}+g\right)d\cos\phi = \frac{4}{5}mgd\cos\phi \\ = \frac{4}{5}(500\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(12\text{ m})\cos 180° \\ = -4.70\times 10^4\text{ J} \approx -47\text{ kJ}. \end{cases}$$

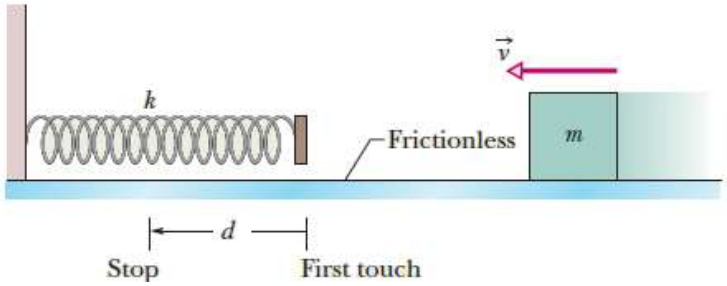
ج) کار کل انجام شده روی آسانسور

$$W = W_g + W_T = 5.88 \times 10^4\,\text{J} - 4.70 \times 10^4\,\text{J}$$
$$= 1.18 \times 10^4\,\text{J} \approx 12\,\text{kJ}.$$

د) انرژی جنبشی در پایان ۱۲ متر سقوط

$$K_f = K_i + W = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + W$$
$$= \tfrac{1}{2}(500\,\text{kg})(4.0\,\text{m/s})^2 + 1.18 \times 10^4\,\text{J}$$
$$= 1.58 \times 10^4\,\text{J} \approx 16\,\text{kJ}.$$

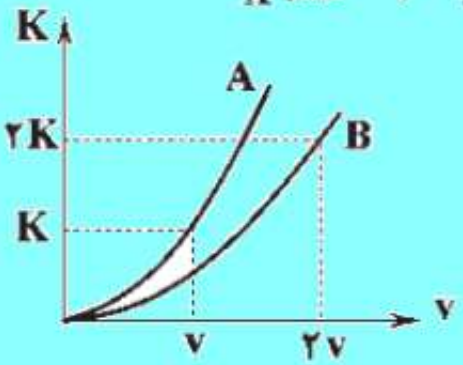
مثال ۲- جسمی به جرم ۰/۴ کیلوگرم با سرعت ثابت ۰/۵ متر بر ثانیه روی یک میز افقی بدون اصطکاکی می لغزد . این جسم با متراکم کردن یک فنر به حال سکون در می آید اگر ثابت نیروی فنر ۷۵۰ نیوتن بر متر باشد چقدر متراکم می شود؟



$$K_f - K_i = -\tfrac{1}{2}kd^2 \longrightarrow 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}kd^2 \longrightarrow$$

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0.50\ \text{m/s})\sqrt{\frac{0.40\ \text{kg}}{750\ \text{N/m}}} = 1.2 \times 10^{-2}\ \text{m} = 1.2\ \text{cm}.$$

برای دو جسم A و B به جرم‌های m_A و m_B نمودار انرژی جنبشی برحسب تندی به صورت زیر است. m_B چند برابر m_A است؟



حل:

به کمک رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ و با نوشتن یک تناسب ساده خواهیم داشت:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow \frac{K_B}{K_A}=\frac{m_B}{m_A}\times\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲K}{K}=\frac{m_B}{m_A}\times\left(\frac{۲v}{v}\right)^۲ \Rightarrow \frac{m_B}{m_A}=\frac{۱}{۲}$$

فصل ۷ – توان



توان آهنگ زمانی انجام کار است و یک کمیت اسکالر است.

توان متوسط : اگر کل کار انجام شده را تقسیم بر زمان انجام آن کنیم توان متوسط بدست می آید.

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$$

توان لحظه ای : توان در هر لحظه را توان لحظه ای نامند.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 0.738 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

$$1 \text{ horsepower} = 1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}$$

می توان توان لحظه ای را به صورت ضرب نقطه ای زیر نوشت:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi\, dx}{dt} = F\cos\phi\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$P = Fv\cos\phi.$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

فصل ۷ : توان

اتومبیلی به جرم ۲ تن با توان موتور $16\ kW$ در مسیری مستقیم شروع به حرکت می‌کند و پس از ۱ دقیقه تندی اش را به $30\ m/s$ می‌رساند. بازده موتور اتومبیل چند درصد است؟ (از تمامی نیروی های تلف کننده انرژی صرف نظر کنید)

حل:

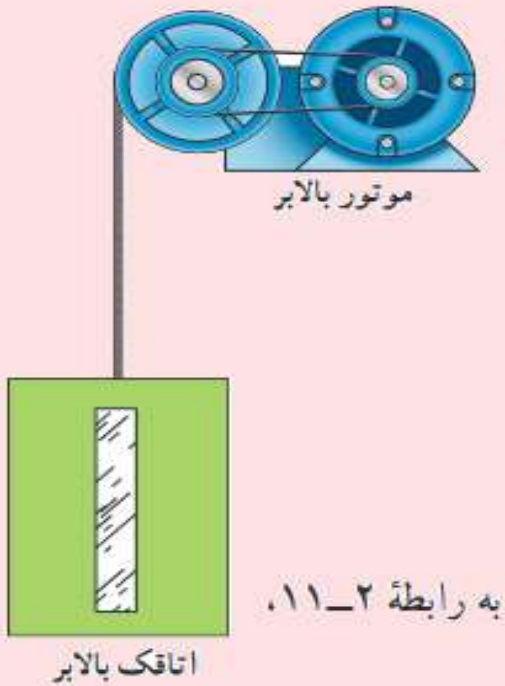
$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \rightarrow W_{موتور} = \frac{1}{2} \times 2000(30^2 - 0) = 900\ kJ$$

$$P_{مفید} = \frac{W_{موتور}}{\Delta t} = \frac{900}{60} = 15\ kW$$

$$\text{بازده برحسب درصد} = \frac{P_{مفید}}{P_{کل}} \times 100 = \frac{15}{16} \times 100 = 93/75$$

فصل ۷ : توان

جرم اتاقک بالابری به همراه بار آن ۵۰۰kg است (شکل روبه‌رو). اگر این بالابر در مدت ۱۰/۰s از طبقهٔ همکف به طبقهٔ دوم در ارتفاع ۶/۲۰m برود، توان متوسط موتور این بالابر چند اسب بخار است؟ نیروهای اتلافی را نادیده بگیرید.



پاسخ : با توجه به رابطهٔ ۲ــ۴، کار کل انجام شده روی اتاقک بالابر (شامل کار نیروی وزن و کار نیروی موتور بالابر) برابر تغییر انرژی جنبشی آن است. به این ترتیب داریم :

$$W_{\text{وزن}} + W_{\text{موتور}} = K_2 - K_1$$

$$-mg(h_2 - h_1) + W_{\text{موتور}} = 0 - 0$$

$$W_{\text{موتور}} = mg(h_2 - h_1) = (500\,\text{kg})(9/81\,\text{m/s}^2)(6/20\,\text{m} - 0) = 3/04 \times 10^4\,\text{J}$$

در محاسبهٔ بالا، مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین (طبقهٔ همکف) گرفته‌ایم. با توجه به رابطهٔ ۲ــ۱۱، توان متوسط موتور بالابر برابر است با :

$$\overline{P} = \frac{W_{\text{موتور}}}{\Delta t} = \frac{3/04 \times 10^4\,\text{J}}{10/0\,\text{s}} = 3/04 \times 10^3\,\text{W} = 4/08\,\text{hp}$$



فصل ۸ : پایستگی انرژی

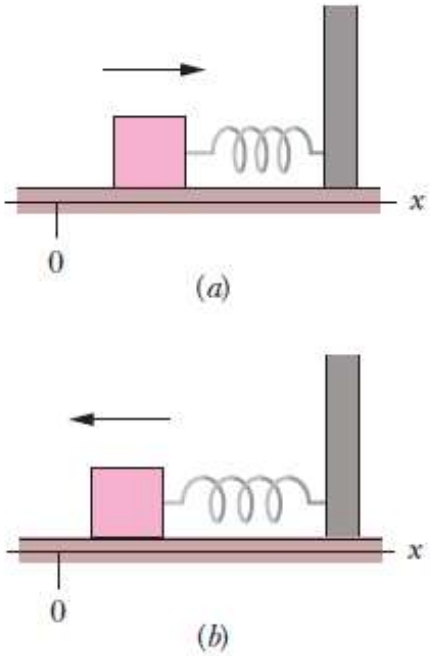


فصل ۸ : پایستگی انرژی

نیروهای پایستار
انرژی پتانسیل
دستگاههای پایستار یک بعدی
دستگاههای پایستار دو بعدی و سه بعدی
پایستگی انرژی

یک نیرو هنگامی پایستار است که کار انجام شده توسط آن روی یک ذره در یک مسیر بسته صفر باشد. در غیر این صورت نیرو نا پایستار است.

مثلا نیروی فنر پایستار است. چون مطابق شکل با فرض نبود اصطکاک جسم هنگام بر گشت به نقطه شروع همان سرعت اولیه را دارد.

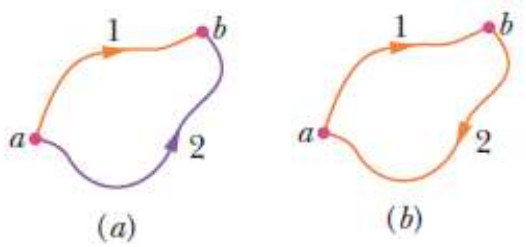


در قبل، بر طبق قضیه کار – انرژی جنبشی ، کار برآیند نیرو ها صفر است چون تغییر انرژی جنبشی ذره صفر است ، پس نیروی فنر پایستار است.

طریقه دیگر بیان نیروی پایستار :

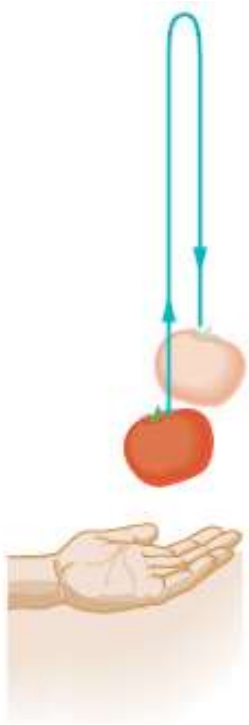
کار نیروی پایستار به مسیر طی شده بستگی ندارد

اگر نیروی وارد بر ذره پایستار باشد کار آن در دو مسیر شکل زیر یکسان است.



$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0 \rightarrow \begin{cases} W_{ab,1} = -W_{ba,2}, \\ W_{ab,2} = -W_{ba,2} \end{cases} \rightarrow \boxed{W_{ab,1} = W_{ab,2},}$$

فصل ۸ : نیروهای پایستار



یکی دیگر از نیروهای پایستار نیروی گرانشی است. چون مطابق شکل با فرض نبود اصطکاک، جسم هنگام بر گشت به نقطه شروع همان سرعت اولیه را دارد.

انرژی پتانسیل یک دستگاه معرف شکلی از انرژی ذخیره شده است که می تواند مورد استفاده قرار گیرد و به انرژی جنبشی تبدیل شود.

اگر در طول حرکت جسم فقط نیروی پایستار بر جسم وارد گردد، مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی در حین حرکت ثابت است که آن را انرژی مکانیکی می نامند.

$$K+U = E = \text{const}$$

فصل ۸ : نیروهای پایستار

چون کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی حرکت بستگی دارد،کار این چنین نیرویی فقط به موضع ذره بستگی دارد پس :

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx.$$

بر طبق قضیه کار –انرژی جنبشی :

$$W = \Delta K = -\Delta U$$

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx.$$

چون انرژی پتانسیل فقط به موضع ذره بستگی دارد پس :

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$$

رابطه بین یک نیروی پایستار و انرژی پتانسیل منتسب به آن :

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

محاسبه انرژی پتانسیل برای دو نمونه از نیروهای پایستار، یعنی نیروی گرانش و نیرو فنر:

الف) انرژی پتانسیل گرانشی:

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\, dy = mg \int_{y_i}^{y_f} dy = mg \Big[y \Big]_{y_i}^{y_f},$$

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\, \Delta y.$$

$$U - U_i = mg(y - y_i).$$

$$U = mgy$$

ب) انرژی پتانسیل کشسانی:

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \tfrac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f},$$

$$\Delta U - \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2.$$

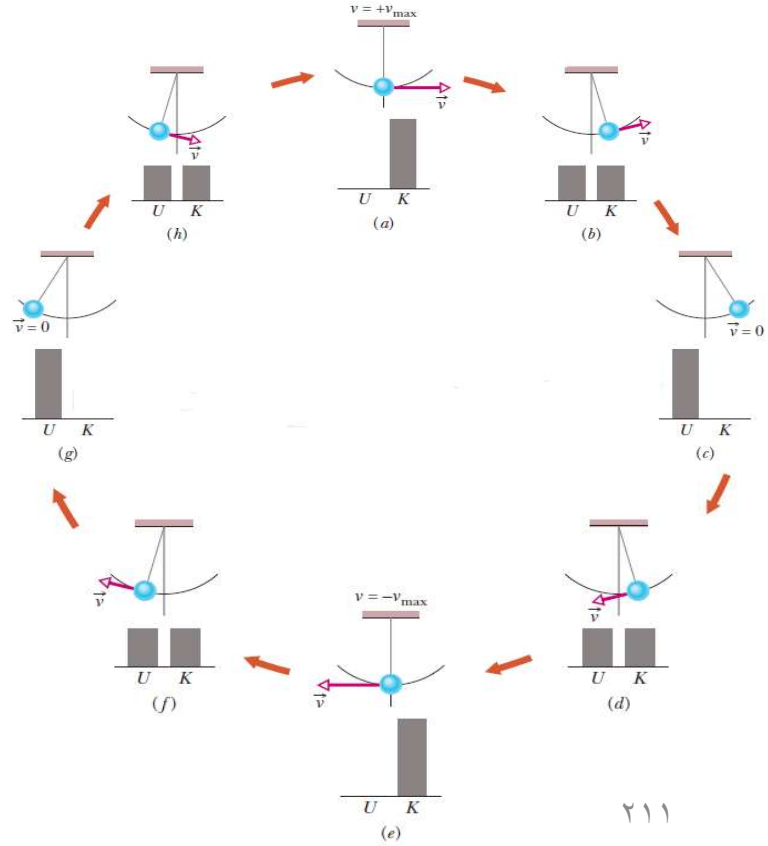
$$U - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

توجه: در محاسبات فوق مبدا انرژی پتانسیل در مبدا مختصات فرض شده است .

فصل ۸ : نیروهای پایستار

با توجه به قانون پایستگی انرژی مکانیکی ملاحظه می شود
مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیستم جرم + زمین ثابت است:



فصل ۸ : دستگاههای پایستار دو بعدی و سه بعدی

در این حالت انرژی پتانسیل تابعی از سه مختصه است و رابطه پایستگی انرژی :

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x,y,z) - \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0,y_0,z_0) = E$$

بردار نیروی پایستار :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -i\frac{\partial U}{\partial x} - j\frac{\partial U}{\partial y} - k\frac{\partial U}{\partial Z}$$

چند نکته در حل مسائل:

۱ – اگر درطی حرکت ذره فقط نیروهای پایستار بر ذره وارد گردد و یا اگر نیروهای ناپایستار نیز بر ذره وارد می شوند کار آنها در طول حرکت صفر باشد در این صورت انرژی مکانیکی پایسته است یعنی د رکلیه نقاط حرکت انرژی مکانیکی یکسان است:

a,b,c,.....

$E_a = E_b = \text{----}$

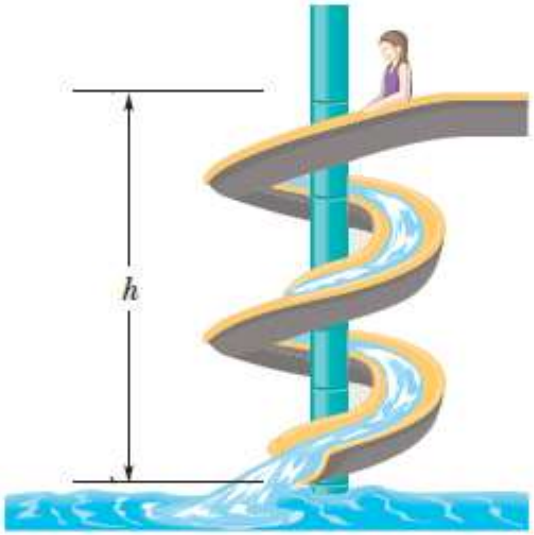
چند نکته در حل مسائل:

۲ - اگر درطی حرکت ذره نیروی ناپاستار ، مثلا نیروی اصطکاک نیز بر ذره وارد گردد در این صورت انرژی مکانیکی پایسته نیست و از فرمول زیر برای حل مسئله استفاده می کنیم:

$$E_b - E_a = W_{f_k}^{ab}$$

فصل ۸ : پایستگی انرژی

مثال ۱: بچه ای مطابق شکل از ارتفاع ۸/۵ متری به پایین می لغزد. با فرض اینکه اصطکاک نیست سرعت در انتهای مسیر چقدر است؟



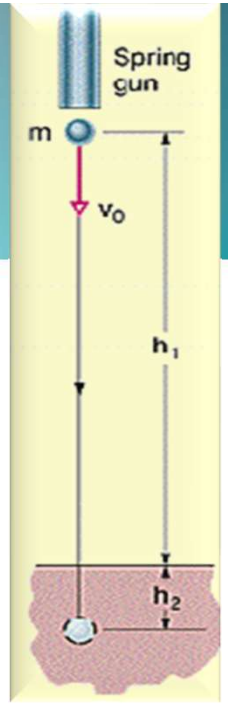
$$K_b + U_b = K_t + U_t,$$

$$\tfrac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b = \tfrac{1}{2}mv_t^2 + mgy_t.$$

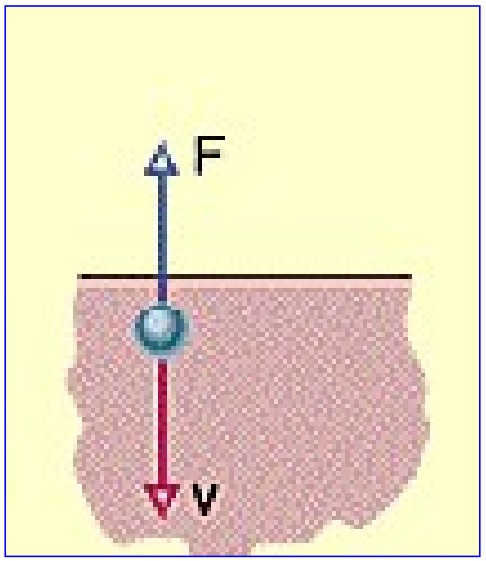
$$v_b^2 = v_t^2 + 2g(y_t - y_b)$$

$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(8.5\ \text{m})}$$

$$= 13\ \text{m/s}.$$



مثال۲: گلوله ای به جرم ۵/۲ گرم مطابق شکل از توپی در ارتفاع ۱۸ متری با سرعت اولیه ۱٤ متر بر ثانیه شلیک می شود و به اندازه ۲۱ سانتیمتر در شن فرو می رود. با صرف نظر کردن از نیروی مقاومت هوا کار نیروی مقاومت شن و اندازه نیروی مقاومت متوسط وارد بر جسم از طرف شن را تعیین کنید؟



$$\Delta E = (0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) - mg(h_1 + h_2),$$

$$\Delta E = -12\,(5.2 \times 10^{-3}\text{kg})\,(14\ \text{m/s})^2 - (5.2 \times 10^{-3}\text{kg})\,(9.8\ \text{m/s}^2)\,(18\ \text{m} + 0.21\ \text{m})$$

$$= -1\,437\ \text{J}$$

$$-Fh_2 = \Delta E.$$

$$F = \frac{\Delta E}{-h_2} = \frac{-1.437\ \text{J}}{-0.21\ \text{m}} = 6.84\ \text{N} \approx 6.8\ \text{N}.$$

فصل ۸ : پایستگی انرژی



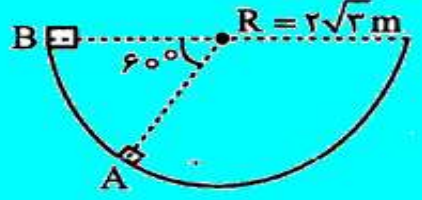
در شکل روبه‌رو هواپیمایی که در ارتفاع ۳۰۰m از سطح زمین و با تندی ۵۰m/s پرواز می کند، بسته‌ای را برای کمک به آسیب دیدگان زلزله رها می‌کند. تندی بسته هنگام برخورد به زمین چقدر است؟ (از تأثیر مقاومت هوا روی حرکت بسته چشم‌پوشی کنید.)

$$E_۲ = E_۱ \rightarrow K_۲ + U_۲ = K_۱ + U_۱$$

$$\frac{۱}{۲}mv_۲^۲ + mgh_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + mgh_۱ \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{۲}v_۲^۲ + ۰ = \frac{۱}{۲}v_۱^۲ + gh_۱$$

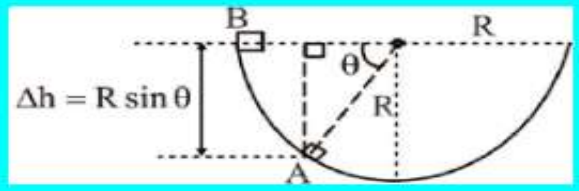
$$\frac{۱}{۲}v_۲^۲ + ۰ = \frac{۱}{۲} \times ۵۰^۲ + ۹/۸ \times ۳۰۰ \rightarrow \frac{۱}{۲}v_۲^۲ = ۴۱۹۰ \quad \rightarrow v_۲ = ۹۱/۵۴ \, m/s$$

مطابق شکل جسمی به جرم $۲kg$ از نقطه A تا نقطه B درون یک نیمکره به شعاع $R = ۲\sqrt{۳}m$ جابه‌جا می‌شود. اگر کار نیروی اصطکاک در طی این جابه‌جایی $-۱۲J$ باشد، کار کل انجام گرفته روی جسم در این جابه‌جایی چند ژول است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



حل:

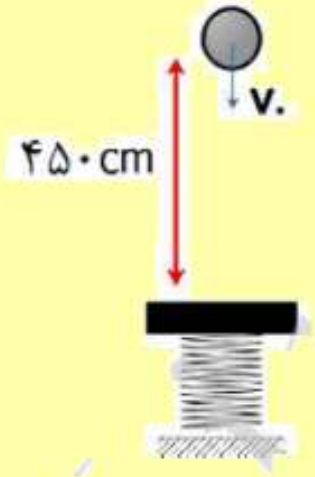
کار نیروی وزن به مسیر بستگی ندارد و همواره از $W_{وزن} = \pm mg\Delta h$ قابل محاسبه است. علامت منفی برای حالتی است که جسم در طی جابه‌جایی بالاتر از حالت اولیه‌اش قرار گیرد و Δh مقدار تغییر ارتفاع جسم در طی جابه‌جایی است:



$$W_{وزن} = -۲\times۱۰\times۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۶۰\,J$$

$$W_T = W_{وزن} + W_{f_k} = -۶۰ + (-۱۲) = -۷۲J$$

در شکل زیر گلوله ۲۰۰ گرمی با سرعت $v_.$ شلیک می‌شود. و پس از طی مسیر قائم به فنر برخورد می‌کند و آن را حداکثر به اندازه x فشرده می‌کند و ۲۰ ژول انرژی کشسانی در فنر ذخیره می‌کند . اگر انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی جنبشی در لحظه شلیک گلوله باهم برابر باشند. $v_.$ و x به ترتیب چند m/s و cm است ؟ (مبدا گرانش را پایین ترین نقطه مسیر گلوله فرض کنید و از تلفات انرژی صرف نظر کنید و $g = ۱۰ N/Kg$)



حل:

طبق متن سوال پایین ترین نقطه مسیر را مبدا گرانش فرض می‌کنیم و هم‌چنین وقتی فنر در حداکثر فشردگی قرار دارد تندی گلوله صفر است .

در نتیجه :(طبق متن سوال انرژی کشسانی فنر در نقطه پایانی ۲۰ ژول است)

$$\text{نقطه پایانی} \Longrightarrow E_۲ = k_۲ + U_۲ + U_e = ۰ + ۰ + ۲۰ = ۲۰\, j$$

در نقطه شلیک انرژی جنبشی با انرژی پتانسیل گرانشی برابر است هم چنین به علت پایسته بودن مسیر $E_۱ = E_۲ = ۲۰\, j$. در نتیجه:

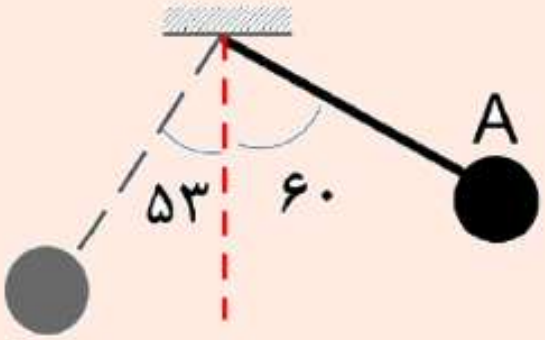
$$\text{نقطه شلیک} \Longrightarrow E_۱ = k_۱ + U_۱ = ۲۰\, J \Longrightarrow k_۱ = U_۱ \Longrightarrow U_۱ = k_۱ = ۱۰\, \text{j}$$

$$U_۱ = mgh \Longrightarrow ۱۰ = ۰/۲ \times ۱۰ \times (۴/۵ + x) \Longrightarrow x = ۰/۵\, m = ۵۰\, cm$$

$$k_۱ = \frac{۱}{۲} m v_۰^{۲} \Longrightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۲\, v_۰^{۲} \Longrightarrow v_۰ = ۱۰\, {}^{m}/_{s}$$

مطابق شکل گلوله ای به جرم ۱۰۰ گرم متصل به نخی به طول ۵۰ سانتی متر تحت زاویه ۶۰ درجه نسبت به قـائم از نقطـه A رها می‌شود و پس از عبور از پایین ترین نقطه مسیر حداکثر تا زاویه ۵۳ درجه نسبت به قائم منحرف می‌شود . اندازه کار نیروی مقاوم هوا در این مسیر چند میلی ژول است ؟

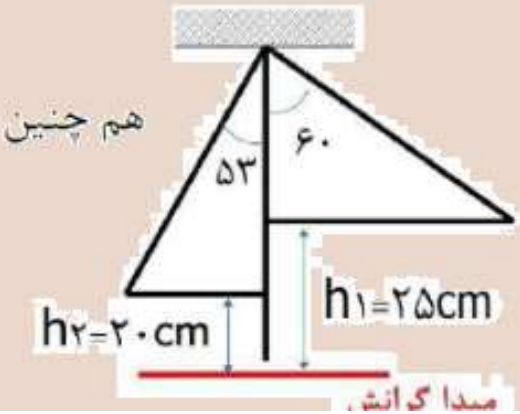
$(g = ۱۰\ N/Kg$ و $\cos ۶۰ = ۰/۵ , \cos ۵۳ = ۰/۶)$



حل:

فاصله گلوله تا پایین ترین نقطه مسیر (مبدا گرانش) از طریق رابطه $h = l(1 - \cos\alpha)$ محاسبه می‌شود

$$\begin{cases} h_1 = 50(1 - \cos 60) = 25\ cm \\ h_2 = 50(1 - \cos 53) = 20\ cm \end{cases}$$



هم چنین سرعت گلوله در نقطه ۱ و ۲ برابر با صفر است در نتیجه :

$$\begin{cases} E_1 = K_1 + U_1 = 0 + 0/1 \times 10 \times 0/25 = 250\ mj \\ E_2 = K_2 + U_2 = 0 + 0/1 \times 10 \times 0/2 = 200\ mj \end{cases}$$

$$W_{\text{مقاوم هوا}} = E_2 - E_1 = 200 - 250 = -50\ mj$$

مثال

اتومبیلی به جرم 1000 کیلوگرم، با سرعت 16.7m/s در حال حرکت است. راننده با دیدن چراغ قرمز، ترمز می‌کند. ترمز اتومبیل نیروی اصطکاک برابر با 8000 نیوتن به اتومبیل وارد می‌کند. در شرایط ذکر شده، مسافتی که طول می‌کشد تا اتومبیل متوقف شود را محاسبه کنید.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

همانطور که بیان شد، این انرژی (رابطه بالا) با کار انجام شده توسط ترمزها برابر است. از آنجایی که نیروی اعمال شده توسط ترمزها معلوم است، کار ترمز با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$W = F\Delta x \cos\theta$$

انرژی جنبشی اتومبیل با استفاده از مقادیر داده شده به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}(1000)(16{,}7)^2 \\ &= 139\ 445\ \text{J} \end{aligned}$$

برای محاسبه کار ترمز با استفاده از رابطه داده شده، نیاز به معرفی زاویه θ داریم. همانطور که می‌دانیم، بردار نیروی ترمز و جابه‌جایی در این مثال در خلاف جهت یکدیگر هستند. بنابراین زاویه بین این دو بردار برابر با 180 درجه است. بر این اساس، کار ترمز به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} W &= F\Delta x\cos\theta \\ &= (8000)\,(\Delta x_0)\cos(180) \\ &= (8000)\,(\Delta x_0)\,(-1) \\ &= (-8\,000)\,(\Delta x_0) \end{aligned}$$

طبق قضیه کار و انرژی می‌دانیم که تغییر در انرژی جنبشی با کار انجام شده برابر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= W_{\text{net}} \\ E_{k,f} - E_{k,i} &= (-8000)\,(\Delta x_0) \\ 0 - 139\,445 &= (-8000)\,(\Delta x_0) \end{aligned}$$

در نهایت جابه‌جایی اتومبیل حین فرایند ترمز، به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\Delta x_0 &= \frac{139445}{8000} \\ &= 17{,}4\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

جسمی به جرم ۲۰۰ گرم را با سرعت $۳۶\frac{km}{h}$ به روی سطح افق پرتاب می کنیم و پس از طی مسافت ۲ متر می ایستد،با استفاده از قضیه کار_انرژی جنبشی،کار نیروی اصطکاک را در طی مسیر و همچنین اندازه ی نیروی اصطکاک را بدست آورید.

حل: اولا باید کیلومتر بر ساعت را تبدیل به متر بر ثانیه کنیم. برای این کار مقدار را بر ۳.۶ تقسیم میکنیم.سرعت انتهایی صفر است زیرا سوال گفته پس طی مسافت ۲ متر می ایستد لذا طبق قضیه ی کار و انرژی داریم :

$$v_۱ = ۳۶\frac{km}{h} \div ۳.۶ = ۱۰\frac{m}{s}$$

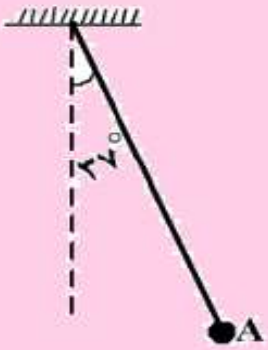
$$W_T = K_۲ - K_۱ \rightarrow W_{f_k} = -K_۱ = -\frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$= -\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۱۰} \times ۱۰۰ = -۱۰j$$

$$W_{f_k} = -f_k \times d \rightarrow -۱۰ = -f_k \times ۲ \rightarrow f_k = ۵N$$

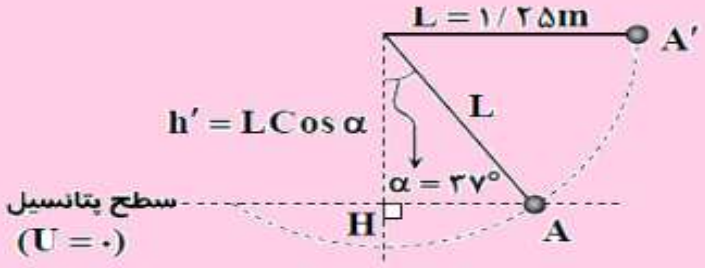
مطابق شکل زیر، آونگی به طول ۱٫۲۵ متر، با سرعت V از وضعیت نشان داده شده (نقطهٔ A) عبور می‌کند. کم‌ترین مقدار V چند متر بر ثانیه باشد، تا ریسمان بتواند به وضعیت افقی برسد؟

(از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، $g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$ و $\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$)



حل:

مطابق با اصل بقای انرژی مکانیکی (دقت شود که مقاومت هوا ناچیز است)، مقدار کل انرژی گلوله در نقطه‌ی A با نقطه‌ی A' یکسان است. از سوی دیگر اگر کمترین سرعت گلوله در نقطه‌ی A را بخواهیم به گونه‌ای که گلوله به نقطه‌ی A' برسد، باید سرعت در نقطه‌ی A' برابر صفر شود (چرا؟)



$$E_A = E'_A \Rightarrow K_A + U_A = K_{A'} + U_{A'} \Rightarrow \frac{۱}{۲} m V_A^۲ + ۰ = ۰ + mgh'$$

$$\Rightarrow V_A = \sqrt{۲gh'} = \sqrt{۲gLCos\alpha} \Rightarrow V_A = \sqrt{۲ \times ۱۰ \times ۱/۲۵ \times ۰/۸} = ۲\sqrt{۵} \frac{m}{s}$$



فصل ۹ : پایستگی تکانه خطی

فصل ۹: پایستگی تکانه خطی

مرکز جرم

حرکت مرکز جرم

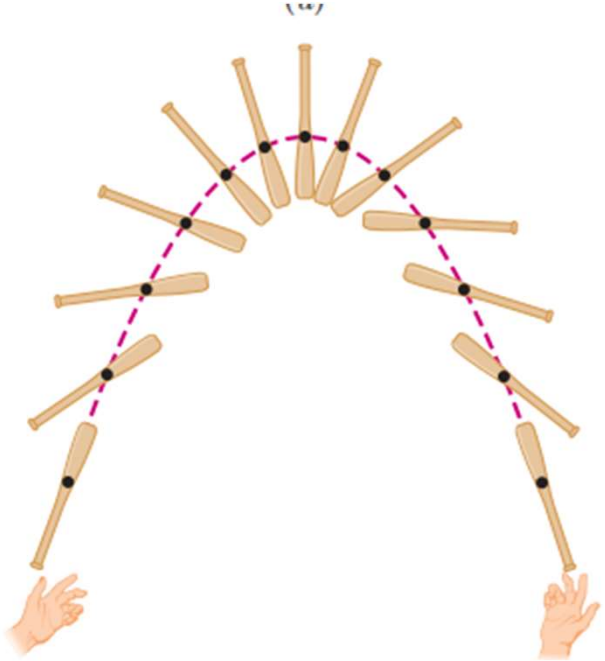
تکان خطی یک ذره

تکانه خطی یک دستگاه ذرات

پایستگی تکانه خطی

بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه

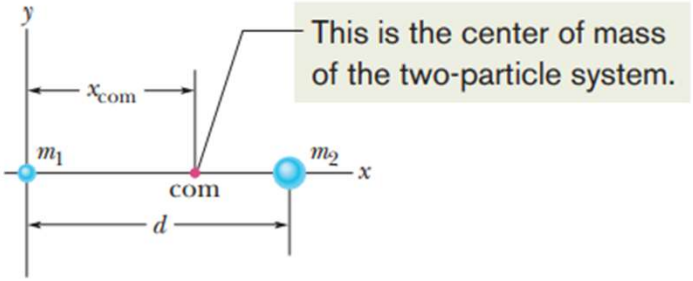
فصل ۹ : مرکز جرم

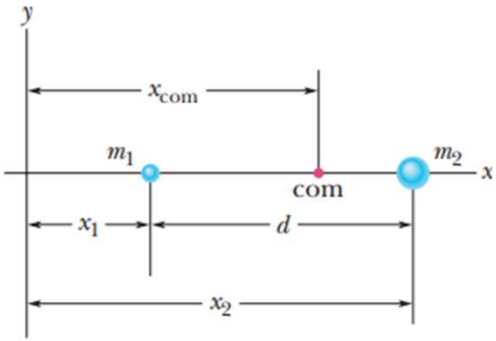


اگر جسم دارای حرکت دورانی و ارتعاشی همراه با انتقال باشد. نقطه ای در جسم وجود دارد که حرکت آن مانند حرکت نقطه ای است که تحت تاثیر همان نیروهای خارجی وارد بر جسم قرار گیرد . این نقطه را مرکز جرم می نامند.

فصل ۹ : مرکز جرم

مکان مرکز جرم در حالت ساده سیستم شامل دو ذره :





$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

فصل ۹ : مرکز جرم

مکان مرکز جرم : اگر n ذره به جرمهای $m_n,\ldots,m_2,m_1$ روی یک خط راست داشته باشیم :

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{M}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

اگر ذرات در سه بعد توزیع شده باشند . مرکز جرم با سه مختصه تعیین می گردد:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i.$$

فصل ۹ : مرکز جرم

با استفاده از نماد گذاری برداری ، بردار مکان ذرات و مرکز جرم :

$$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i,$$

$$\mathbf{r}_{cm} = x_{cm}\mathbf{i} + y_{cm}\mathbf{j} + z_{cm}\mathbf{k}.$$

اگر مبداء چارچوب در مرکز جرم باشد $r_{cm} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$

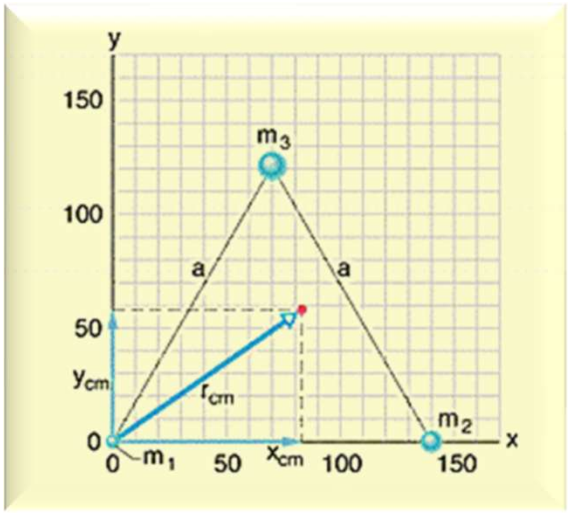
فصل ۹ : مرکز جرم

محل مرکز جرم مستقل ازچارچوب مرجع به کار رفته است درواقع :

مرکز جرم دستگاهی از ذرات فقط به جرم ذرات و موضع آنها نسبت به یکدیگر بستگی دارد

فصل ۹ : مرکز جرم

مثال ۱ : سه ذره به جرمهای در گوشه های یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱۴۰ سانتیمتر قرار دارند . اسکان مرکز جرم را تعیین کنید.



$m_2=2.5kg, m_1=1.2\ kg\ \ m_3=3.4\ kg$

حل:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}$$

$$= \frac{(1.2\ \text{kg})(0) + (2.5\ \text{kg})(140\ \text{cm}) + (3.4\ \text{kg})(70\ \text{cm})}{7.1\ \text{kg}}$$

$$= 83\ \text{cm}$$

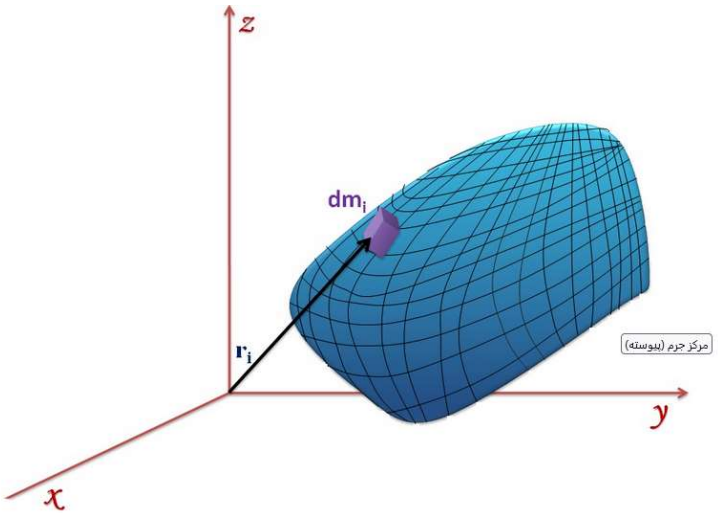
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M}$$

$$= \frac{(1.2\ \text{kg})(0) + (2.5\ \text{kg})(0) + (3.4\ \text{kg})(121\ \text{cm})}{7.1\ \text{kg}}$$

$$= 58\ \text{cm}.$$

فصل ۹ : مرکز جرم

یک جسم صلب را می توان به صورت توزیع پیوسته ای از ذرات به جرم بسیار کوچک در نظر گرفت. مختصات مرکز جرم آن عبارت خواهد بود از :



$$x_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm$$

فصل ۹ : مرکز جرم اجسام پیوسته

مرکز جرم یک جسم با چگالی یکنواخت را می‌توان به صورت کلی با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$\underline{r}_{CM} = \frac{\int \rho \underline{r} dV}{M_{tot}}$$

در این رابطه، ρ چگالی جسم را نمایش می‌دهد و V نشان دهنده حجم جسم مورد نظر است. نکته‌ای که باید به آن اشاره کرد این است که زمانی که چگالی یکنواخت باشد، به عنوان یک ثابت از عبارت انتگرالی فوق خارج می‌شود.

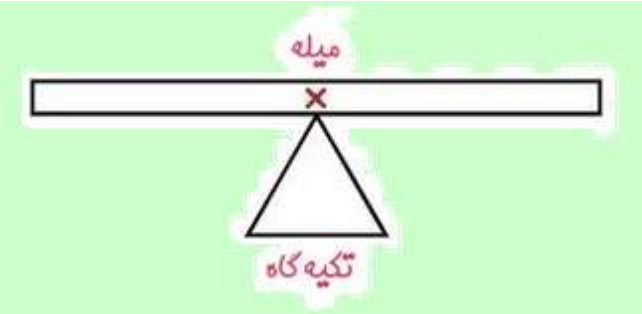
فصل ۹ : مرکز جرم

در صورتی که چگالی جسم یکنواخت نباشید و مقدار آن در مکان‌های مختلف متفاوت باشد، رابطه انتگرالی فوق به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\underline{r}_{CM} = \frac{\int \rho(\underline{r})\underline{r}dV}{\int \rho(\underline{r})dV}$$

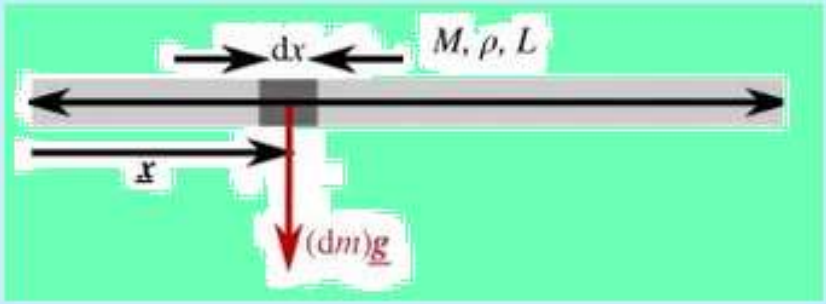
فصل ۹ : مرکز جرم

مرکز جرم یک جسم که چگالی یکنواختی دارد را معمولا بدون انجام محاسبات ریاضی و تنها با در نظر گرفتن تقارن آن جسم، می‌توان به دست آورد.



فصل ۹ : مرکز جرم

به عنوان مثال میله‌ای با چگالی M/L را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. در این رابطه M، جرم کلی میله و L، طول آن را نمایش می‌دهد.



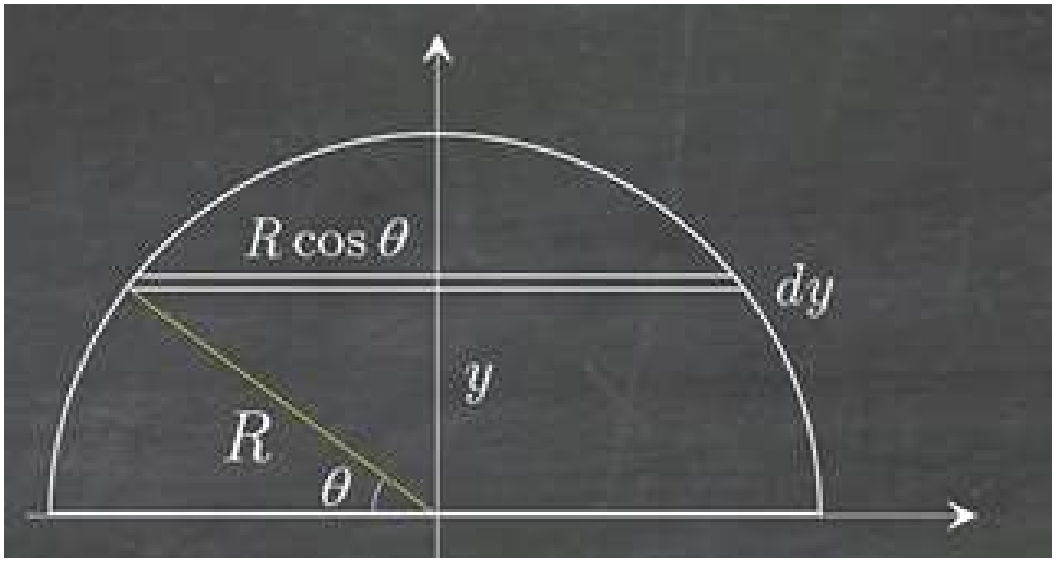
در این شرایط می‌توان میله را با یک نقطه به جرم M نمایش داد که در نقطه‌ای با مختصات r قرار گرفته است و r مکان مرکز جرم این میله را نشان می‌دهد. در شرایطی که میله چگالی یکنواخت دارد، مرکز جرم (فاصله r) در فاصله‌ای برابر با نصف طول میله (r = L/2) قرار می‌گیرد. این موضوع در شکل زیر به تصویر کشیده شده است.

$$r = \frac{\int_0^L x\rho \mathrm{d}x}{M}$$

با محاسبه انتگرال فوق، مکان مرکز جرم به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$r = \frac{\left[\rho \frac{x^2}{2}\right]_0^L}{M} = \frac{\rho \frac{L^2}{2}}{M}$$

فصل ۹ : : مرکز جرم نیم دایره



$$\frac{dm}{M}=\frac{۴R\cos\theta dy}{\pi R^{۲}}$$

$$dm=\frac{۴M\cos\theta}{\pi R}dy$$

$$y_{cm}=\frac{۱}{M}\int ydm$$

$$y_{cm}=\frac{۱}{M}\int_{.}^{R} y\frac{۴M\cos\theta}{\pi R}dy$$

$$y_{cm}=\frac{۴}{\pi R}\int_{.}^{R} y\cos\theta dy$$

$$y=R\sin\theta$$

$$dy=R\cos\theta d\theta$$

فصل ۹ : مرکز جرم نیم دایره

$$y_{cm}=\frac{۴}{\pi R}\int_{۰}^{\pi/۲} R^{۳}\sin\theta\cos^{۲}\theta d\theta$$

$$y_{cm}=\frac{۴R}{\pi}\int_{۰}^{\pi/۲} -U^{۲}dU$$

$$y_{cm}=\frac{۴R}{\pi}\left(-\frac{U^{۳}}{۳}\right)\Big|_{۰}^{\pi/۲}$$

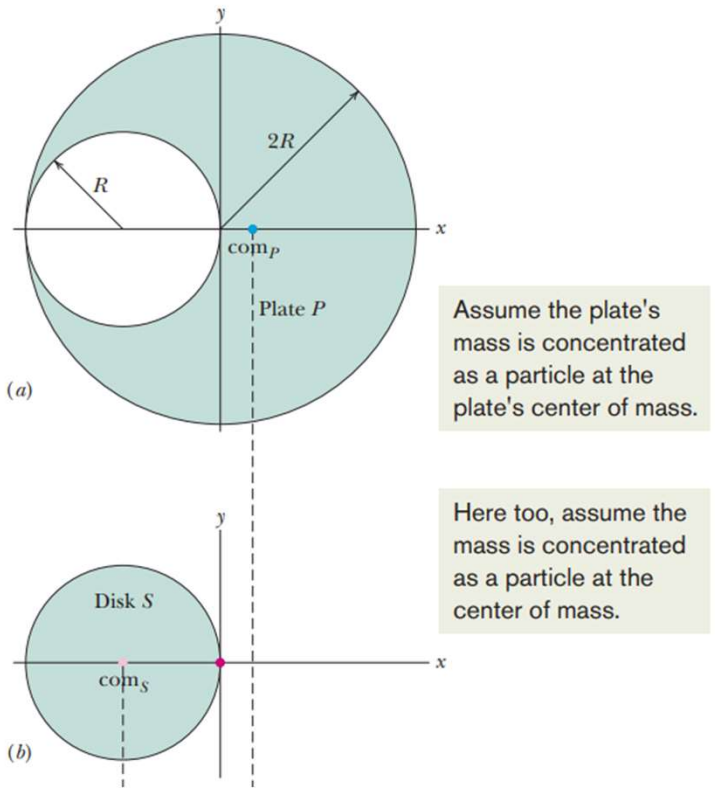
$$y_{cm}=\frac{۴R}{\pi}\left(-\frac{\cos^{۳}\theta}{۳}\right)\Big|_{۰}^{\pi/۲}$$

$$y_{cm}=\frac{۴R}{۳\pi}$$

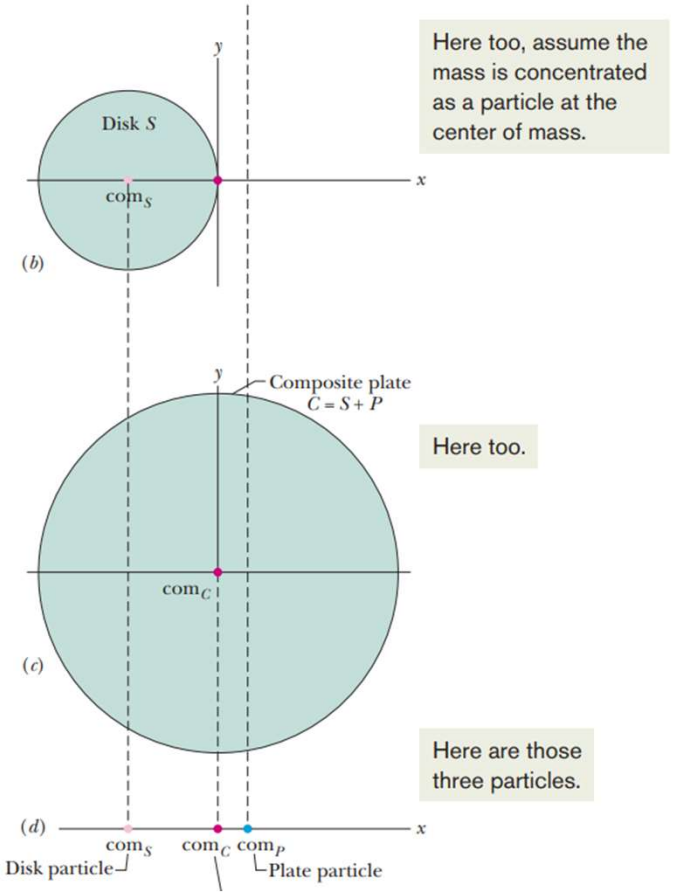
$$x_{cm}=۰$$

فصل ۹ : مرکز جرم

مثال ۲ : از داخل صفحه فلزی دایروی به شعاع ۲R *دیسکی به شعاع برداشته شده است . مکان مرکز جرم را تعین کنید .*

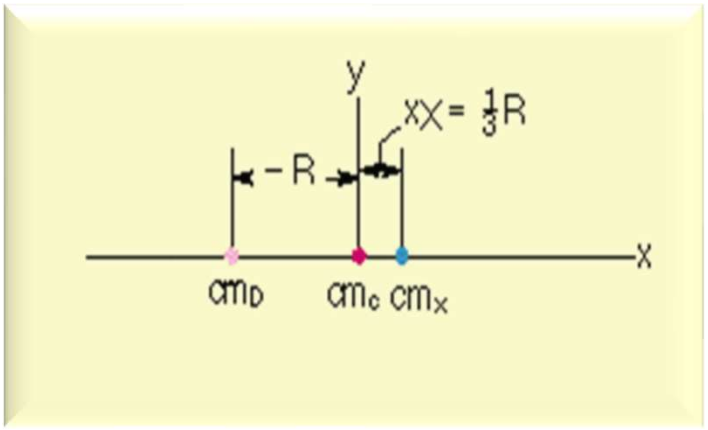


حل: صفحه فلزی سوراخدار را جسم و دیسک دایروی برداشته شده X می نامیم. D را جسم R به شعاع



ادامه حل:

اگر جسم صفحه دایروی اولیه باشد که سوراخ شده است در این صورت مر کز جرم آن د رمبداء سیستم مختصات است.



ادامه حل:

جسم شامل دو جسم است بنابراین مرکز جرم آن:

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

با توجه به اینکه است :

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}.$$

اگر ρ چگالی جرمی صفحه و ضخامت آن باشد داریم:

$$m_D = \pi R^2 \rho t \quad \text{and} \quad m_X = \pi(2R)^2 \rho t - \pi R^2 \rho t.$$

$$x_X = -\frac{(-R)(\pi R^2 \rho t)}{\pi(2R)^2 \rho t - \pi R^2 \rho t} = \tfrac{1}{3}R.$$

فصل ۹ : مرکز جرم

برای دستگاهی از ذره می توان با استفاده از تعریف مرکز جرم نوشت :

$$M\mathbf{r}_{cm} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n,$$

با مشتق گیری زمانی از طرفین :

$$M\mathbf{v}_{cm} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n.$$

با مشتق گرفتن از معادله سرعتها داریم:

$$M\mathbf{a}_{cm} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \cdots + m_n\mathbf{a}_n.$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن پس $F_i=m_ia$

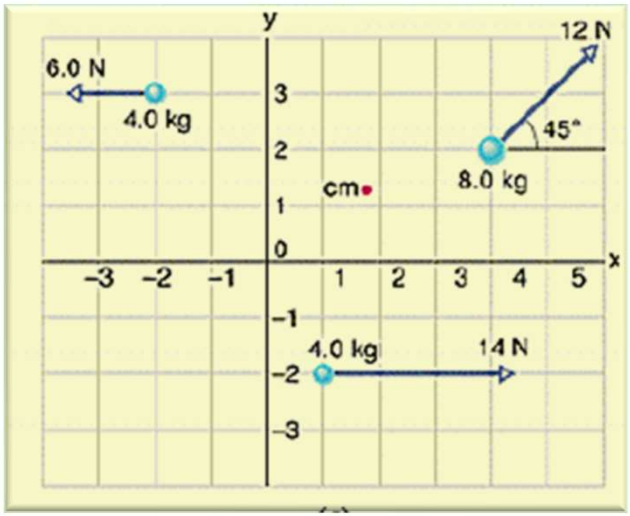
$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{F}_n.$$

درمیان این نیروها نیروهای داخلی نیز وجود دارند که طبق قانون سوم نیوتن همدیگر را حذف می کنند . بنابراین جمع بالا معرف تمام نیروهای خارجی وارد بر ذرات است یعنی :

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm} \qquad \begin{aligned} \sum F_{ext,x} &= Ma_{cm,x}, \\ \sum F_{ext,y} &= Ma_{cm,y}, \\ \sum F_{ext,z} &= Ma_{cm,z}. \end{aligned}$$

فصل ۹ : حرکت مرکز جرم

مثال : سه ذره مطابق شکل تحت تاثیر نیروهای خارجی مختلف قرار دارند شتاب مرکز جرم را بدست آورید



حل:

$$\sum F_{\text{ext},x} = 14\ \text{N} - 6.0\ \text{N} + (12\ \text{N})(\cos 45°)$$
$$= 16.5\ \text{N}.$$
$$\sum F_{\text{ext},y} = (12\ \text{N})(\sin 45°) = 8.49\ \text{N}$$
$$\sum F_{\text{ext}} = \sqrt{(16.5\ \text{N})^2 + (8.49\ \text{N})^2} = 18.6\ \text{N}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{8.49\ \text{N}}{16.5\ \text{N}} = \tan^{-1} 0.515 = 27°.$$
$$a_{\text{cm}} = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{18.6\ \text{N}}{16\ \text{kg}} = 1.16\ \text{m/s}^2$$

فصل ۹ : حرکت مرکز جرم

تکانه یک ذره برداری است که به صورت حاصلضرب جرم ذره د رسرعتش تعریف می شود :

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$$

قانون نیوتن دوم را بر حسب تکانه چنین است:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

فصل ۹ : تکانه خطی یک دستگاه ذرات

تکانه کل یک دستگاه ذرات برابر است با جمع بردار ی تکانه های هر یک از ذرات:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \cdots + \mathbf{p}_n \\ &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n. \\ \mathbf{P} &= M\mathbf{v}_{cm}\end{aligned}$$

با مشتق گیری از رابطه فوق قانون دوم نیوتن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = M\mathbf{a}_{cm}$$

فصل ۹ : پایستگی تکانه خطی

قانون پایستگی اندازه حرکت خطی

در مکانیک، **سه قانون پایستگی** مهم وجود دارد:

۱. پایستگی انرژی
۲. پایستگی تکانه خطی
۳. پایستگی تکانه زاویه ای

قانون های پایستگی یا بقا نتیجه قانون دوم نیوتون هستند؛ یعنی:

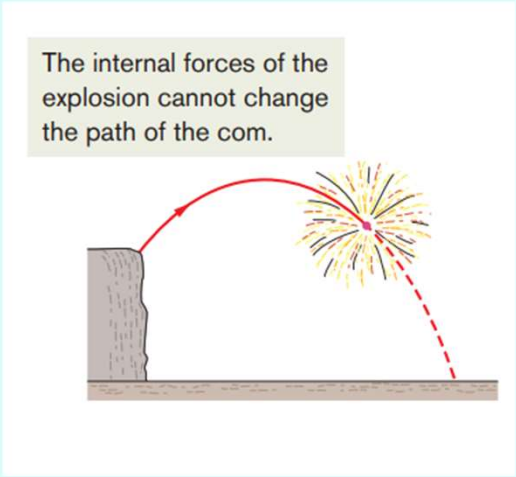
حاصل ضرب جرم در شتاب، ثابت است و دلیل بر تغییر حرکت و بر هم کنش اجسام است . این حاصل ضرب، نیرو نامیده می شود. با بقای انرژی قبلا آشنا شده اید؛ این قانون می گوید:

اگر هیچ نیروی خارجی (خارج از سیستم مورد نظر) به سیستم وارد نشود، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل مقدار ثابتی خواهد بود.

اما اگر نیروی اصطکاک در این سیستم وجود داشته باشد، انرژی بقا نخواهد داشت و مجموع انرژی پتاسیل و جنبشی، مقدار ثابتی نخواهد بود.

فصل ۹ : پایستگی تکانه خطی

اگر یک سامانه منزوی باشد، به گونه ای که نیروی خارجی به آن وارد نشود؛ در این صورت تکانه خطی باید ثابت و پایسته بماند.



برای توجیه می دانیم که مشتق تکانه بر حسب زمان، نیرو است:

$$F_{net} = \frac{dP}{dt} = 0$$

پس تکانه یک عدد ثابت بوده است:

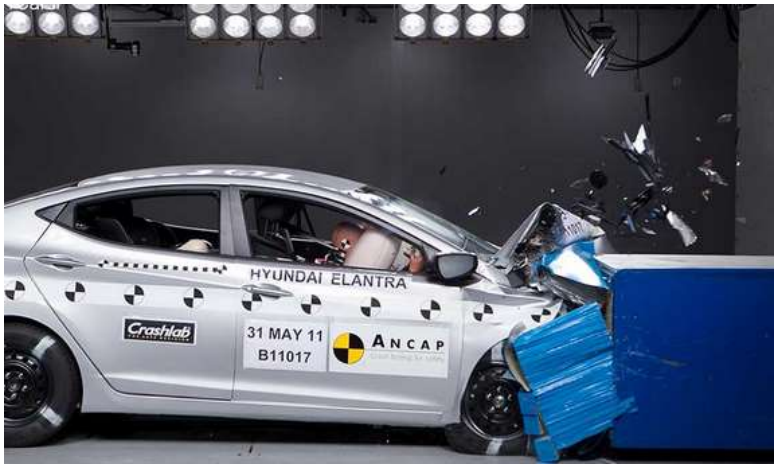
$$P = constant$$

بدین ترتیب تکانه آغازین با تکانه در لحظه بعدی (پایانی) برابر است و به این قانون پایستگی تکانه گویند:

$$P_i = P_f$$

این قانون در مولفه ها، وابسته به عدم وجود نیروی خارجی است و در صورت نبودن نیروی خارجی در هر یک از ابعاد، تکانه در جهت مذکور پایسته خواهد بود. (ممکن است در یکی از جهات تکانه پایسته باشد یا دو بعد یا هر سه بعد)

فصل ۹ : بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه



مثال۲:

شکل روبرو صحنه ای از یک آزمون تصادف را نشان می دهد که در آن خودرویی به جرم ۱۲۰۰kg به دیواری برخورد کرده و سپس برمی گردد. اگر تندی اولیه و نهایی خودرو به ترتیب ۵۴km/h و ۹km/h باشد و تصادف ۰٫۱۵s طول بکشد،

الف)تغییر تکانه خودرو را پیدا کنید.

ب)اندازه و جهت نیروی متوسط وارد بر خودرو را تعیین کنید.

الف)

$$v_2 = 9\frac{km}{h} = 2.5\frac{m}{s}$$

$$v_1 = 54\frac{km}{h} = 15\frac{m}{s}$$

$$\Delta\vec{v} = (2.5 - 15) = -12.5\frac{m}{s}$$

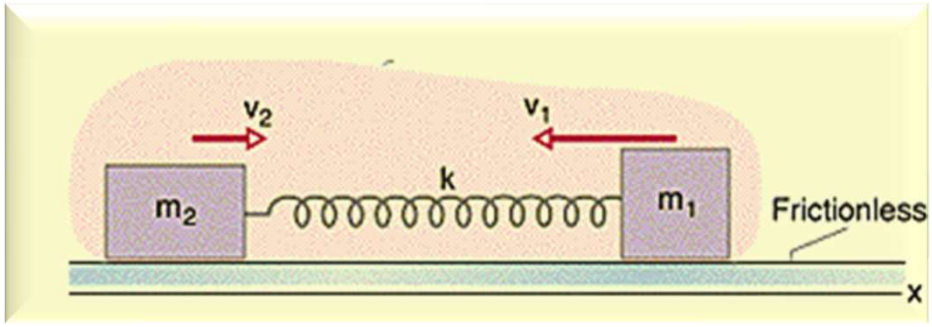
$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = 1200kg \times \left(-12.5\frac{m}{s}\right)\vec{i} = -15000\frac{kg.m}{s}\vec{i}$$

ب)نیروی وارد شده از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{-15000}{0.150} = (-1 \times 10^5 N)\vec{i}$$

فصل ۹ : بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه

مثال۱- دو جسم به وسیله به وسیله فنری به هم وصل شده وروی سطح میز بدون اصطکاکی قرار دارند . دو جسم را از هم دور و سپس رها می کنیم نسبت انرژی جنبشی انها را به دست آورید.



حل: چون بر دستگاه جسم و فنر نیروی خارجی خالصی وارد نمی شود ، تکانه کل پایسته است

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$
$$P_i = P_f$$
$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}.$$

فصل ۹ : بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه

مثال ۴:

شخصی به جرم ۶۰ کیلوگرم از یک بلندی روی یک تشک سقوط می کند. اگر تندی او هنگام رسیدن به تشک 5m/s باشد و پس از ۰/۲ ثانیه متوقف شود، اندازه نیروی متوسطی که تشک بر او وارد می کند، چقدر است؟

از رابطه زیر برای محاسبه نیروی وارد شده استفاده می کنیم:

$$|F| = \left|\frac{\Delta p}{\Delta t}\right| = \left|\frac{m\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\frac{60kg \times (v_2 - v_1)}{0.2s}\right|$$

V_2 یعنی سرعت نهایی برابر با صفر است بنابر این:

$$|F| = \left|\frac{60kg \times (0 - 5m/s)}{0.2s}\right| = |-1500N| = 1500N$$

فصل ۹ : بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه

***تمرین حل شده)**

نارنجکی به محض انفجار به دو تکه هم جرم تقسیم شده و در جهت x متلاشی می شود. اگر سرعت یکی از تکه ها v=2m/s باشد، سرعت تکه دیگر چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

با توجه به اینکه نیرویی از خارج به نارنجک وارد نمی شود، تکانه قبل از انفجار و پس از انفجار برابر است:

$$P_i = P_f$$

$$0 = mv_1 + mv_2$$

پس اندازه دو تکه با هم برابر اما جهت آنها با یکدیگر مخالف است:

$$v_2 = -2m/s$$

فصل ۹ : بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه



مردی به جرم m در پایین نردبانِ طنابی آویخته از بالونی به جرم M ایستاده است بالون نسبت به زمین ساکن است. (الف) اگر این مرد با سرعت v (نسبت به نردبان) از نردبان بالا برود، بالون در چه جهتی و با چه سرعتی (نسبت به زمین) حرکت خواهد کرد؟ (ب) وقتی که مرد از صعود باز می‌ایستد وضعیت حرکت چگونه خواهد بود؟



فصل ۹ : برخورد

فصل ۹ : بر خورد



برخورد چیست ؟

ضربه و تکانه

پایستکی تکانه د رحین بر خورد

بر خورد در یک بعد

برخورد در دو یا سه بعد

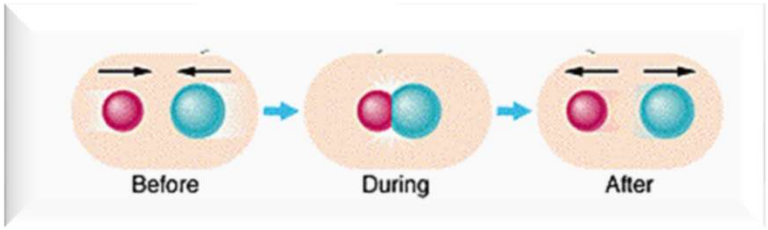
فصل ۹ : برخورد چیست ؟



در برخورد نیروی نسبتا زیادی در زمان کوتاه به ذرات بر خورد کننده وارد می شود و حرکت ذرات برخورد کننده بطور ناگهانی تغییر می کند.

فصل ۹ : برخورد چیست ؟

زمانهای قبل و بعد از برخورد کاملا از هم متمایز است .

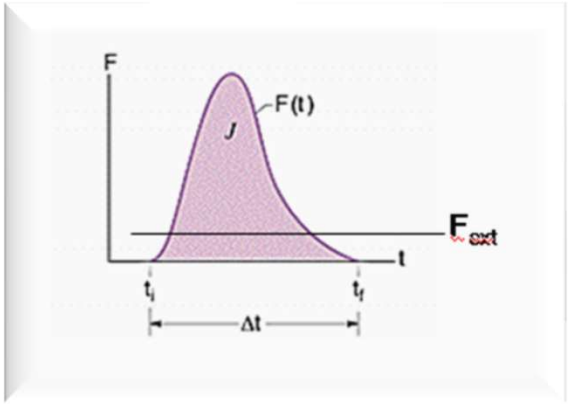


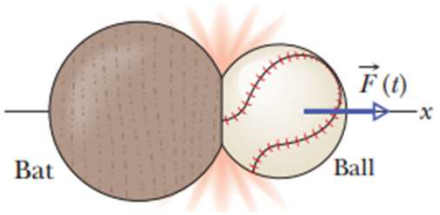
$$J = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\, dt$$

$$p_f - p_i = \Delta p = J$$

انتگرال نیرو را در بازه زمانی که نیرو اثر می کند را ضربه می نامند.

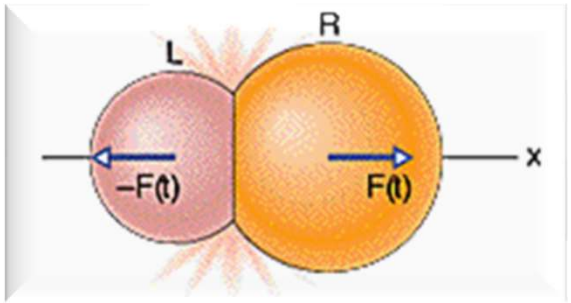
ضربه باعث تغییر اندازه حرکت می گردد





فصل ۹ : پایستگی تکانه د رحین بر خورد

تغییر کل تکانه دستگاه در اثر بر خورد صفر است. یعنی تکانه قبل از برخورد و بعد از برخورد با یکدیگر برابر است.



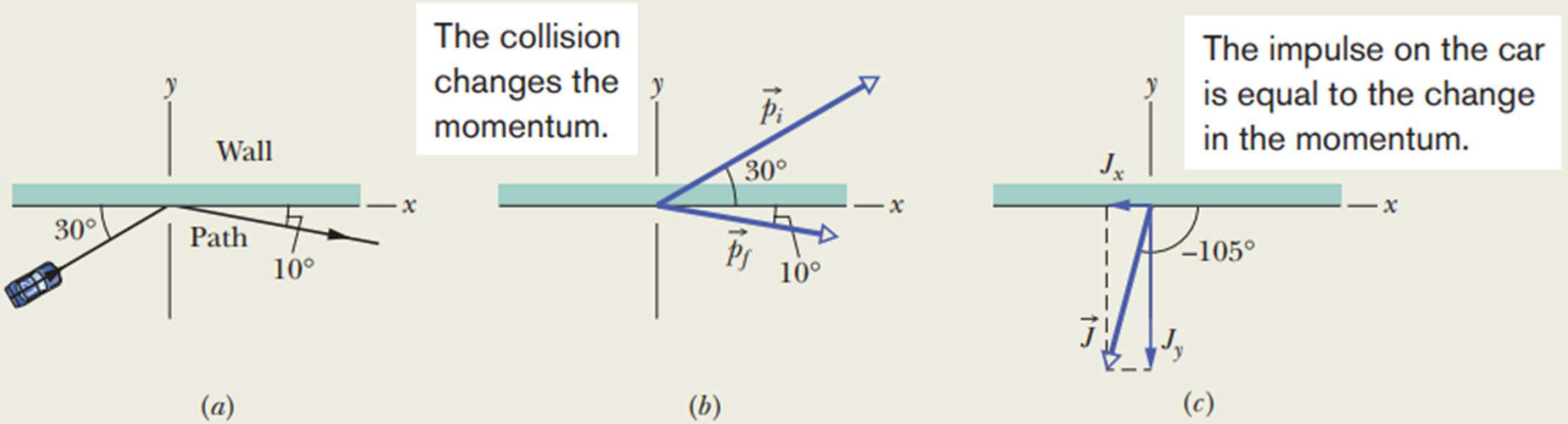
برآیند نیروهای وارد بر سیستم صفر است.

پایستگی تکانه به این دلیل است .که در حین برخورد نیروهای خارجی در مقایسه با نیروهای داخلی صرف نظر کردنی است.

فصل ۹ : بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه

مسئله نمونه- ضربه دو بُعدی، برخورد خودرو مسابقه – دیوار

قسمت الف شکل نمای مسیر یک خودرو مسابقه را در هنگام برخورد با دیوار کنار مسیر، با دید از بالا نشان می دهد. درست پیش از برخورد خودرو با تندی $v_i = 70\,m/s$ در مسیر خط راستی تحت زاویه 30 درجه نسبت به دیوار حرکت می کند. درست پس از برخورد خودرو با تندی $v_f = 50\,m/s$ در مسیر خط راستی تحت زاویه 10 درجه نسبت به دیوار به حرکت ادامه می دهد. جرم راننده m برابر با $80kg$ است.



فصل ۹ : بعضی کاربرد های اصل پایستگی تکانه

الف) در این برخورد ضربه وارد شده به راننده $\vec{J}$ چیست؟

مؤلفه‌ی x: در راستای محور x، داریم

$$J_x = m(v_{fx} - v_{ix})$$

$$J_x = (۸۰\,\text{kg})[(۵۰\,\text{m/s})\cos(-۱۰^\circ) - (۷۰\,\text{m/s})\cos ۳۰^\circ]$$

$$J_x = -۹۱۰\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

مؤلفه‌ی y: در راستای محور y، داریم

$$J_y = m(v_{fy} - v_{iy})$$

$$J_y = (۸۰\,\text{kg})[(۵۰\,\text{m/s})\sin(-۱۰^\circ) - (۷۰\,\text{m/s})\sin ۳۰^\circ]$$

$$J_y = -۳۴۹۵\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \approx -۳۵۰۰\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

ضربه: بنابراین برابر است با

$$\vec{J} = (-910\hat{i} - 3500\hat{j})\,kg.m/s$$

و بزرگی ضربه چنین به دست م یآید

$$J = \sqrt{J_x^۲ + J_y^۲} = ۳۶۱۶\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \approx ۳۶۰۰\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

ب) این برخورد $14ms$ طول می کشد. بزرگی نیروی متوسط وارد شده به راننده در این برخورد چقدر است؟
با توجه به معادله $J = F_{avg}\Delta t$ ، بزرگی نیروی متوسط F_{avg} از نسبت بزرگی ضربه J ، به مدت زمان برخورد Δt به دست می آید.
محاسبات: داریم

$$F_{\text{avg}} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{۳۶۱۶\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}{۰/۰۱۴\,\text{s}} \Rightarrow$$

$$F_{\text{avg}} = ۲/۵۸۳\times۱۰^{۵}\,\text{N} \approx ۲/۶\times۱۰^{۵}\,\text{N}$$

با استفاده کردن از معادله $F = ma$ به ازای $m = 80\,kg$ می توان نشان داد که بزرگی شتاب متوسط راننده در حین برخورد در حدود $3.22 \times 10^{3} m/s^{2} = 329g$ است، که شتابی مرگ بار است.

فصل ۹ : بر خورد در یک بعد

انواع برخورد:

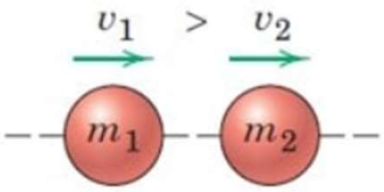
هر گاه در برخورد انرژی جنبشی پایسته بماند بر خورد را کشسان و در غیر این صورت ناکشسان نامند.

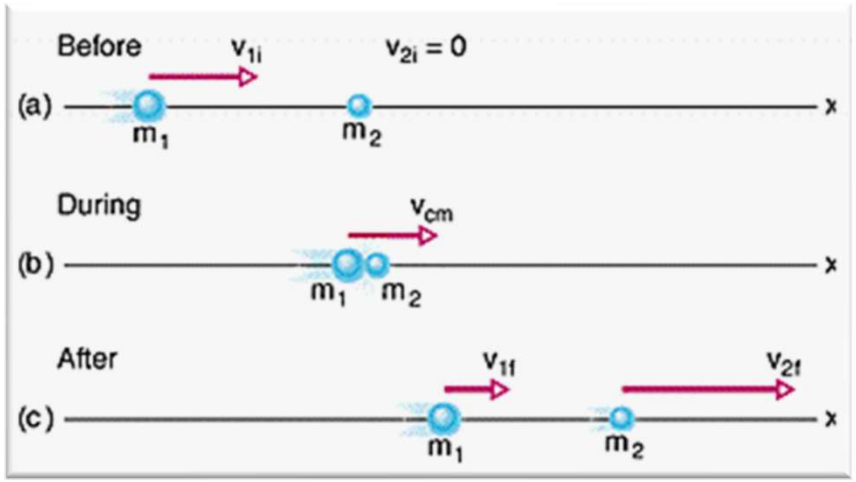
اگر دو جسم بعد از برخورد به هم بچسبند برخورد را کاملا ناکشسان نامند.

د ربرخورد کشسان تکانه و انرژی جنبشی سیستم قبل از برخورد و بعد از برخورد مساوی است.

فصل ۹ : بر خورد در یک بعد

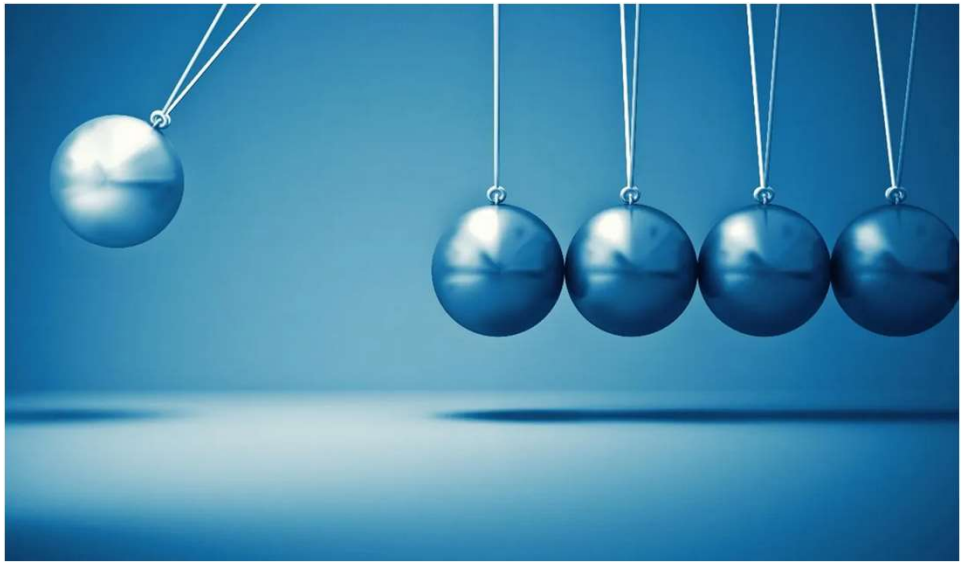
ابتدا مورد یک بعدی برخورد را که یکی از اجسام (ذره هدف) درحال سکون است را در نظر می گیریم .





فصل ۹ : بر خورد در یک بعد

باتوجه به اصول پایستگی سرعت های بعد از برخورد به دست می آید:



$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f}$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2.$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}.$$

اگر جرمها مساوی باشند

$$v_{1f} = 0 \quad \text{and} \quad v_{2f} = v_{1i},$$

یعنی ذره اول میخکوب و ذره دوم با سرعتی که ذره اول د ر ابتدا داشت به حرکت در می آید

اگر هدف بسیار سنگین تر از پرتابه باشد:
ذره هدف با همان سرعت فرودی بر می گردد

$$m_2 \gg m_1$$

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{and} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1i}.$$

فصل ۹ : بر خورد در یک بعد چند مورد خاص

اگر هدف بسیار سبک تر از پرتابه باشد:

سرعت ذره سنگین عملا تغییری نمی کند

$$m_1 \gg m_2$$

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{and} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}.$$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow$$

$$m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = m_1\vec{V}_{1f} + m_2\vec{V}_{2f}$$

$$K_i = K_f \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1V_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2$$

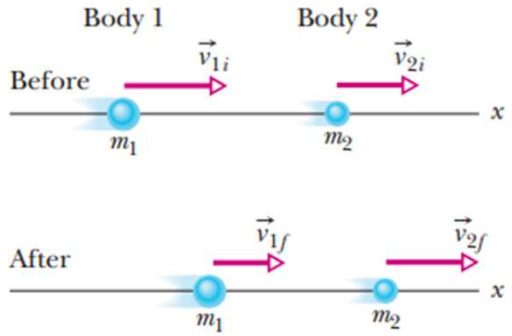
$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}),$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}).$$

در حالت کلی، با حل معادلات ۱ و ۲، سرعت‌های مجهولِ v_1 و v_2، با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه هستند.

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

$$v_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)u_2 + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1$$



فصل ۹ : بر خورد در یک بعد

مثال۱- الف) به چه نسبتی انرژی جنبشی یک نوترون در برخورد کشسان رو دررو با یک هسته اتم که ابتدا ساکن است کاهش می یابد

حل:

$$K_i = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \quad \text{and} \quad K_f = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2.$$

$$\text{frac} = \frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}.$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$\text{frac} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

مثال۱- ب) کاهش نسبی انرژی جنبشی نوترون را هنگامی که به این طریق با هسته سرب ، هسته کربن و هسته هیدروژن برخورد می کند پیدا کنید.

حل:

$$\text{frac} = \frac{(4)(206)}{(1+206)^2} = 0.019 \text{ or } 1.9\%;$$

$$\text{frac} = \frac{(4)(12)}{(1+12)^2} = 0.28 \text{ or } 28\%;$$

$$\text{frac} = \frac{(4)(1)}{(1+1)^2} = 1 \text{ or } 100\%.$$

فصل ۹ : بر خورد در یک بعد

برخورد غیرکشسان

در یک برخورد غیرکشسان، مقداری از انرژی جرم‌ها، در اثر برخورد، به شکل‌های دیگری از انرژی - مثلا صدا یا گرما - تبدیل خواهد شد. برای مثال با رها کردن یک توپ کشسان، پس از چندین برخورد با زمین، انرژی آن گرفته شده و به تعادل می‌رسد. هم‌چنین در فرآیند هم‌جوشی هسته‌ای، هنگامی که دو ذره بنیادی به یکدیگر برخورد کنند، بخشی از انرژی آن‌ها به جرم تبدیل می‌شود.

برخورد غیرکشسان(غیرالاستیک):

در این نوع برخورد فقط اصل پایستگی تکانه برقرار است ولی انرژی جنبشی ذرات تغییر کرده و به شکل های دیگر انرژی تبدیل می شود:

پایستگی تکانه

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow$$

$$m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = m_1\vec{V}_{1f} + m_2\vec{V}_{2f}$$

$$K_i = K_f + Q \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1V_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2 + Q$$

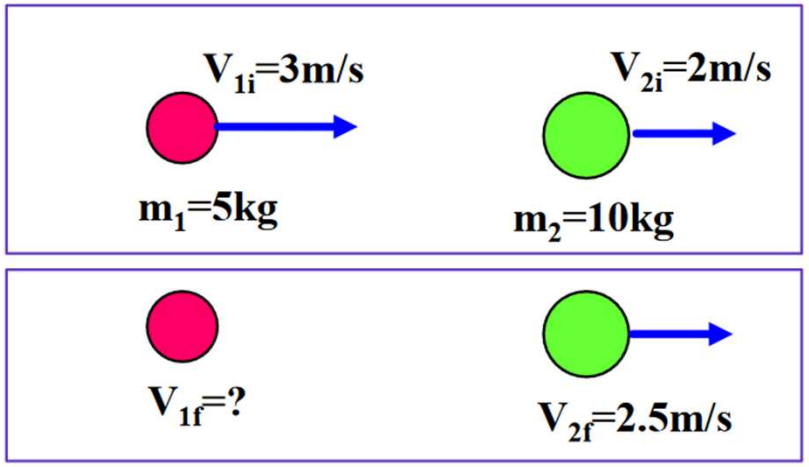
مقداری از انرژی که به اشکال دیگر تبدیل شده است

برخورد غیرکشسان(غیرالاستیک):

مثال : جسمی به جرم 5kg با سرعت 3m/s با جسم دیگری به جرم 10kg که با سرعت 2m/s در همان جهت حرکت می کند ، برخورد غیرالاستیک انجام می دهد. پس از برخورد جسم 10 کیلوگرمی با سرعت 2.5m/s در همان جهت قبلی حرکت می کند.

الف) سرعت جسم 5 کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟

ب) انرژی جنبشی در اثر برخورد چند ژول تغییر می کند؟



قبل برخورد

بعد برخورد

برخورد غیرکشسان(غیرالاستیک):

حل :

$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} \Rightarrow$$

$$(5)(3) + (10)(2) = 5V_{1f} + (10)(2.5) \Rightarrow 35 = 5V_{1f} + 25$$

$$V_{1f} = \frac{10}{5} = 2m/s$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 = \frac{1}{2}(5)(3)^2 + \frac{1}{2}(10)(2)^2$$

$$= 22.5 + 20 = 42.5J$$

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2 = \frac{1}{2}(5)(2)^2 + \frac{1}{2}(10)(2.5)^2$$

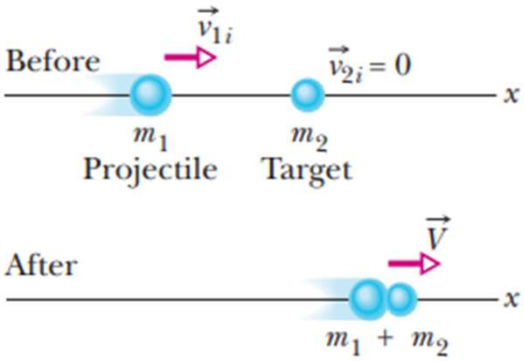
$$= 10 + 31.25 = 41.25J$$

$$K_i = K_f + Q \Rightarrow$$

$$42.5 = 41.25 + Q \Rightarrow$$

$$Q = 1.25J$$

برخورد غیرکشسان کامل (غیرالاستیک کامل)



اگر دو جسم بعد از برخورد به هم بچسبند برخورد را کاملا ناکشسان نامند

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}.$$

در این نوع برخورد فقط اصل پایستگی تکانه برقرار است و دو جسم پس از برخورد با هم جفت شده و با سرعت یکسانی حرکت می کنند. انرژی جنبشی ذرات تغییر کرده و به شکل های دیگر انرژی تبدیل می شود:

پایستگی تکانه

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow$$

$$m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{V}_f$$

سرعت نهایی اجسام پس از برخورد

$$K_i = K_f + Q \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1V_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2i}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_f^2 + Q$$

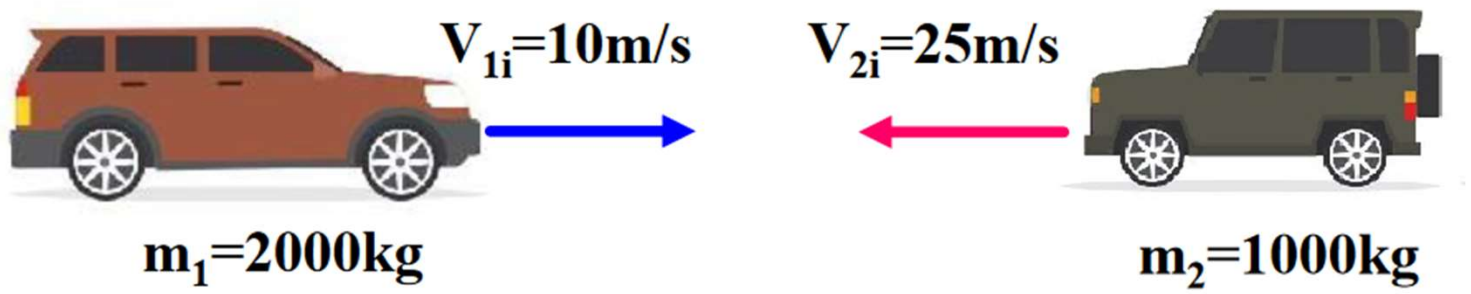
برخورد غیرکشسان کامل (غیرالستیک کامل)

مثال : اتومبیلی به جرم 2000kg که با سرعت 10m/s به سمت شرق در حرکت است با اتومبیل دیگری به جرم 1000kg که با سرعت 25m/s به طرف غرب میرود برخورد غیرالاستیک کامل می کند.

الف) سرعت مشترک دو اتومبیل پس از برخورد چقدر است؟

ب) در این برخورد چند ژول انرژی جنبشی تلف می شود؟

حل :



ادامه ی حل :

$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = (m_1 + m_2) V_f \Rightarrow$$

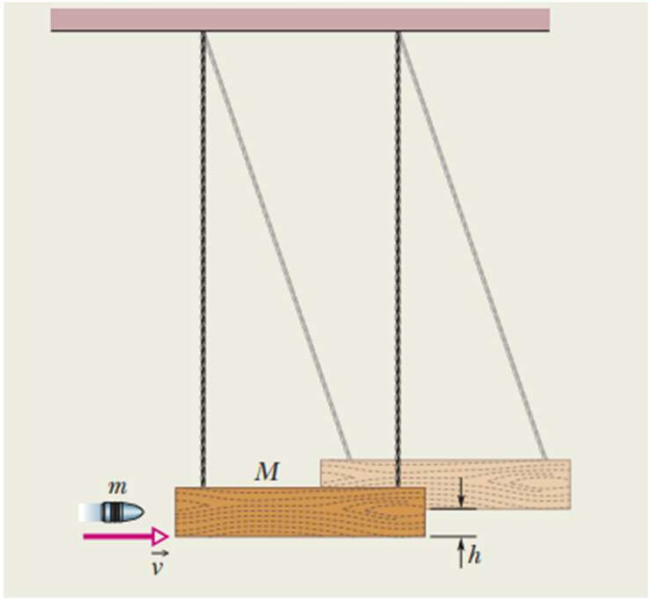
$$(2000)(10) + (1000)(-25) = (1000 + 2000) V_f \Rightarrow$$

$$-5 = 3V_f \Rightarrow V_f = -\frac{5}{3} m/s$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 = \frac{1}{2}(2000)(10)^2 + \frac{1}{2}(1000)(25)^2$$

$$= 100000 + 312500 = 412500J = 412.5KJ$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_f^2 = \frac{1}{2}(2000 + 1000)(-\frac{5}{3})^2 = 4166.6J = 4.166KJ$$



مثال۲- آونگ بالیستیک – گلوله ای به جرم m به قطعه چوب بزرگی مطابق شکل برخورد کاملا غیر الاستیک می کند و در آن فرو می رود و مجموعه به اندازه h بالا می رود سرعت گلوله را بدست آورید

حل:

$$mv = (M + m)V.$$

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh}$$

مثال : در یک آونگ بالستیک جرم قطعه چوب 1.5kg و جرم گلوله 0.01kg است. اگر ارتفاع چوب پس از برخورد به 0.2m برسد، سرعت گلوله پیش از برخورد چقدر بوده است؟

حل :

$$V = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh} = \frac{(0.01+1.5)}{0.01}\sqrt{2(10)(0.2)}$$

$$= \frac{1.51}{0.01}\sqrt{4} = 151(2) = 302m/s$$

فصل ۹ : بر خورد در یک بعد

گلوله ای ۵ گرمی با سرعت ٤۰۰ متر بر ثانیه به فرد ساکنی به جرم ۸۰ کیلوگرم برخورد می کند و در بدن وی باقی می ماند ، سرعت گلوله و فرد بلافاصله بعداز برخورد را بیابید .



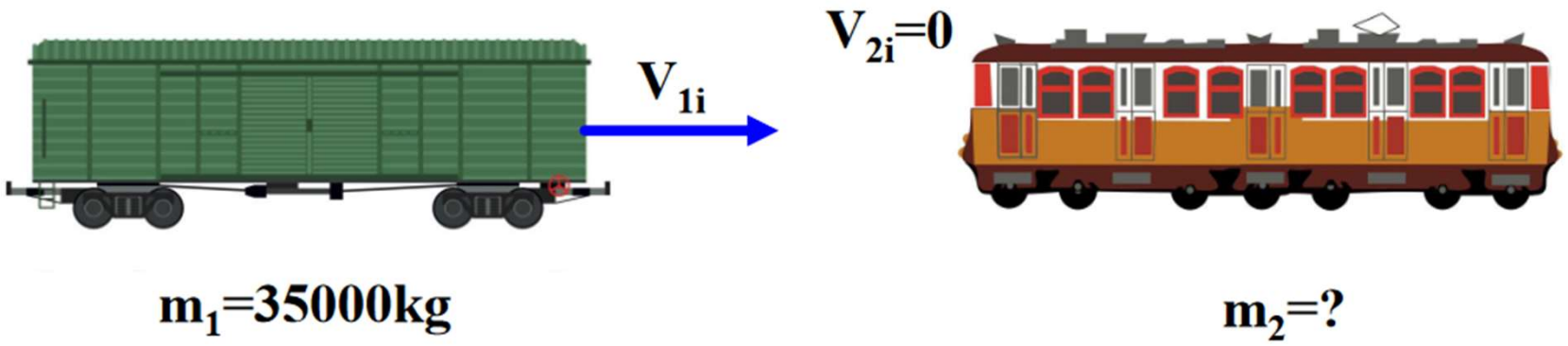
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_2'$$

$$0.005 \times 400 + 80 \times 0 = (0.005 + 80) v_2'$$

$$v_2' = \frac{2}{80.005} = 0.0249\text{m}$$

مثال : یک واگن باری به جرم 35ton با یک واگن مسافری که در حال سکون است برخورد می کند. این دو واگن به هم چفت شده و 27 درصد از انرژی جنبشی اولیه ی آنها بصورت گرما، صدا، ارتعاشات و ... تلف می شود. جرم واگن مسافری را محاسبه کنید.

حل :



$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = (m_1 + m_2) V_f \Rightarrow \boxed{m_1 V_{1i} = (m_1 + m_2) V_f}$$

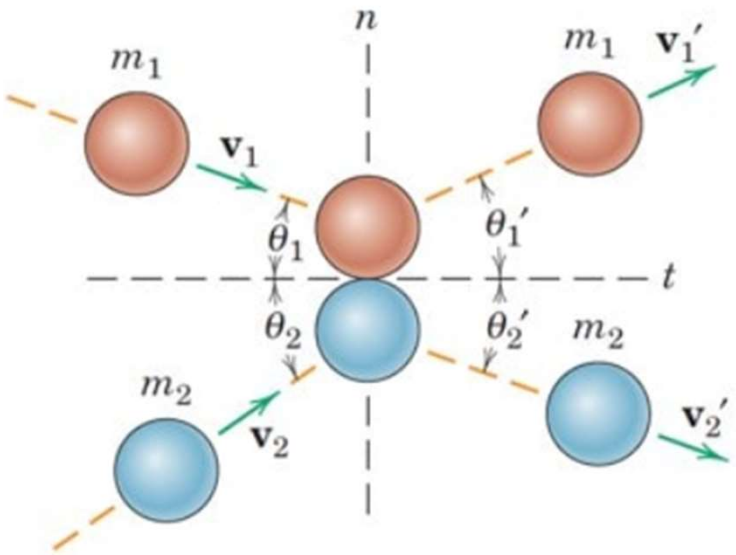
$$K_f = K_i - 0.27K_i = 0.73K_i \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_f^{\,2} = (0.73)\frac{1}{2} m_1 V_{1i}^{\,2}}$$

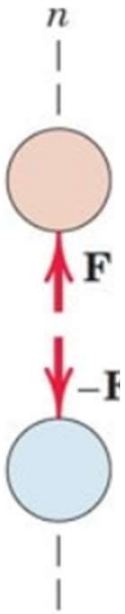
$$\begin{cases} m_1 V_{1i} = (m_1 + m_2) V_f \\ (m_1 + m_2) V_f^{\,2} = (0.73) m_1 V_{1i}^{\,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1^2 V_{1i}^{\,2} = (m_1 + m_2)^2 V_f^{\,2} \\ (0.73) m_1 V_{1i}^{\,2} = (m_1 + m_2) V_f^{\,2} \end{cases}$$

$$\frac{m_1^2 V_{1i}^{\,2}}{(0.73) m_1 V_{1i}^{\,2}} = \frac{(m_1 + m_2)^2 V_f^{\,2}}{(m_1 + m_2) V_f^{\,2}} \Rightarrow \frac{m_1}{0.73} = m_1 + m_2 \Rightarrow \frac{35000}{0.73} = 35000 + m_2$$

$$47945 = 35000 + m_2 \Rightarrow \boxed{m_2 = 12945 kg}$$

فصل ۹ : برخورد در دو یا سه بعد

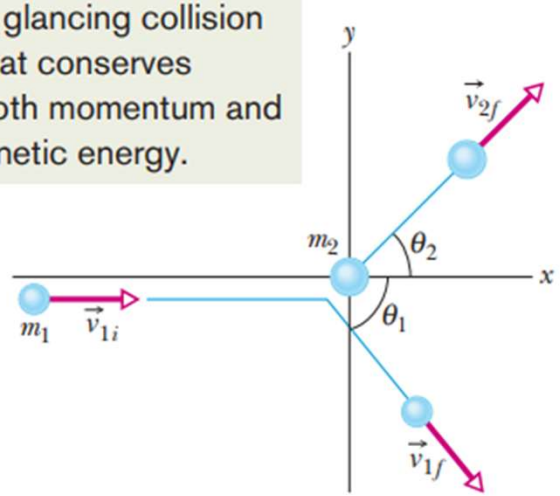




دربرخورد دو بعدی سرعت هر یک از ذرات قبل یا بعد از برخورد ممکن است دارای دومولفه باشد.

فصل ۹ : برخورد در دو یا سه بعد

در شکل یک برخورد دو بعدی نشان داده شده است که در ذره هدف ساکن است.



از اصل پایستگی تکانه دو معادله مولفه ای بدست می آید:

اگر برخورد کشسان باشد از اصل پایستگی انرژی جنبشی داریم

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$
$$0 = -m_1 v_{1f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f} \sin\theta_2$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

فصل ۹ : برخورد در دو یا سه بعد

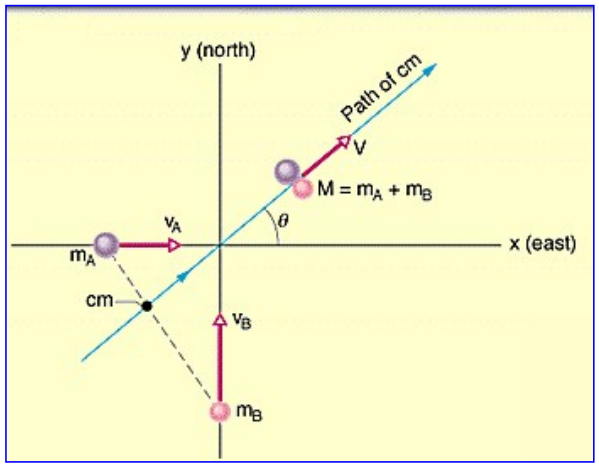
با استفاده از قوانین پایستگی تنها می توان سه مجهول را بدست آورد

اگر شرایط اولیه (v_{1i}, m_2, m_1) رابدانیم ، چهار مجهول ($\theta_2, \theta_1, v_{2f}, v_{1f}$) خواهیم داشت و سه معادله .

پس برای حل مسئله باید یکی از این کمیتها مثلا θ_1 را تعیین کنیم

فصل ۹ : برخورد در دو یا سه بعد

مثال : دو اسکیت باز مطابق شکل برخورد کرده و به هم می پیوندند. قبل از برخورد یکی از آنان که جرمش ۸۳ کیلوگرم با سرعت ۲/۶ کیلومتر بر ساعت به سمت مشرق و دیگری به جرم ۵۵ کیلوگرم با سرعت ۸/۷ کیلومتر بر ساعت به سمت شمال در حرکت است. الف) سرعت نهایی این دو نفر پس از برخورد چقدر است؟



حل-الف:

$$m_A v_A = MV\cos\theta$$
$$m_B v_B = MV\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\text{ kg})(7.8\text{ km/h})}{(83\text{ kg})(6.2\text{ km/h})} = 0.834.$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.834 = 39.8^\circ \approx 40^\circ.$$

$$V = \frac{m_B v_B}{M\sin\theta} = \frac{(55\text{ kg})(7.8\text{ km/h})}{(83\text{ kg} + 55\text{ kg})(\sin 39.8^\circ)}$$
$$= 4.86\text{ km/h} \approx 4.9\text{ km/h}.$$

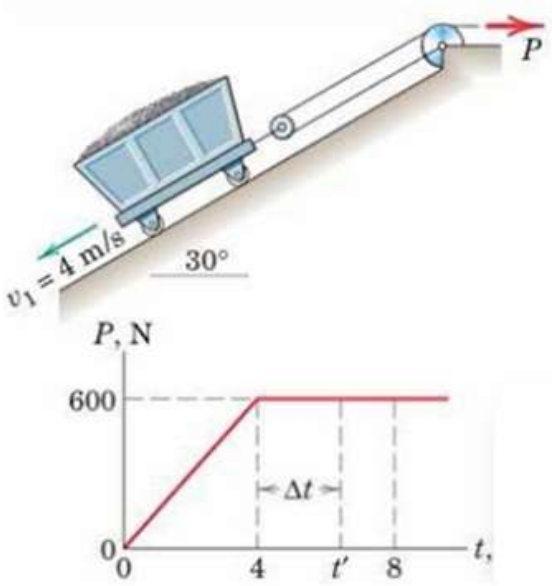
فصل ۹ : برخورد در دو یا سه بعد

ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه اسکیت بازها در اثر برخورد تلف می شود؟

حل:

$$K_i = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2$$
$$= (\tfrac{1}{2})(83\text{ kg})(6.2\text{ km/h})^2 + (\tfrac{1}{2})(55\text{ kg})(7.8\text{ km/h})^2$$
$$= 3270\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2.$$
$$K_f = \tfrac{1}{2}MV^2$$
$$= (\tfrac{1}{2})(83\text{ kg} + 55\text{ kg})(4.86\text{ km/h})^2 = 1630\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2.$$
$$\text{frac} = \frac{K_f - K_i}{K_i}$$
$$= \frac{1630\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2 - 3270\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2}{3270\text{ kg}\cdot\text{km}^2/\text{h}^2} = -0.50.$$

نمونه سوال



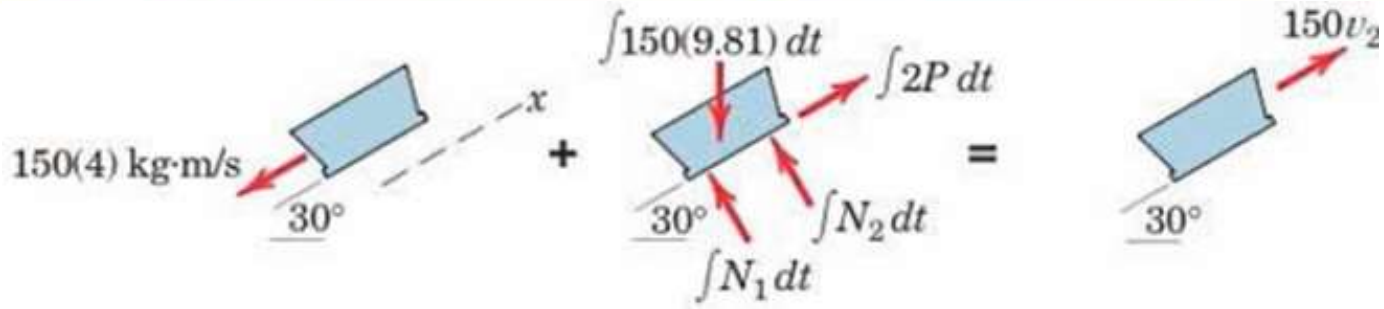
مساله نمونه

در حالی که این واگن در حال پایین رفتن از سطح شیبدار با سرعت 4 m/s است، نیروی P با نمودار نشان داده شده به آن وارد می گردد. ملاحظه می کنید که اندازه این نیرو پس از رسیدن به ثانیه چهارم ثابت و برابر با 600 N خواهد ماند.

زمانی که لازم است تا واگن شروع به تغییر جهت حرکت دهد را بیابید.

سرعت آن در لحظه t = 8 s را بیابید.

نمونه سوال



تغییرات اندازه حرکت خطی واگن بر حسب زمان (توجه: به علت متغیر بودن P و در نتیجه عکس العمل های عمودی، از علامت انتگرال استفاده کرده ایم).

با نوشتن رابطه بین تغییرات اندازه حرکت خطی واگن و ضربه خطی وارد بر آن داریم:

$$m(v_1)_x + \int \Sigma F_x\, dt = m(v_2)_x$$

$$150(-4) + \tfrac{1}{2}(4)(2)(600) + 2(600)\Delta t - 150(9.81)\sin 30^\circ(4 + \Delta t) = 150(0)$$

$$\Delta t = 2.46\ \text{s} \qquad t' = 4 + 2.46 = 6.46\ \text{s}$$

نمونه سوال

مساله نمونه

برای به دست آوردن سرعت در ثانیه هشتم، باید رابطه بین تغییرات اندازه حرکت خطی واگن و ضربه خطی وارد بر آن را برای کل این مدت بنویسیم:

$$m(v_1)_x + \int \Sigma F_x \, dt = m(v_2)_x$$

$$150(-4) + \tfrac{1}{2}(4)(2)(600) + 4(2)(600) - 150(9.81)\sin 30^\circ(8) = 150(v_2)_x$$

$$(v_2)_x = 4.76 \text{ m/s} \longrightarrow \text{سرعت در ثانیه هشتم}$$



فصل ۱۰ : سینماتیک دورانی

فصل ۱۰ : سینماتیک دورانی

حرکت دورانی

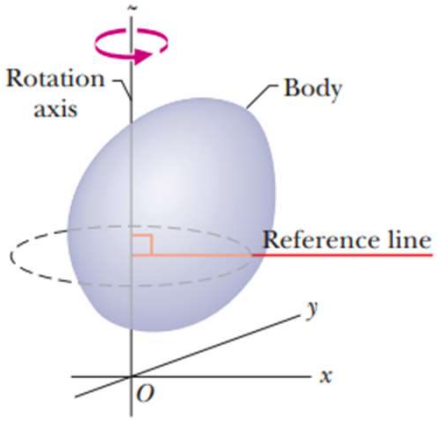
سینماتیک دورانی – متغییرها

دوران با شتاب زاویه ای ثابت

کمیتهای دورانی به صورت برداری

رابطه میان سینماتیک خطی و زاویه ای

فصل ۱۰ : سینماتیک دورانی

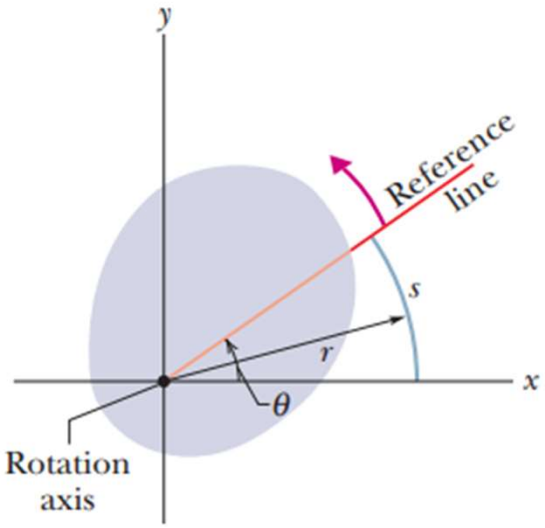


دراین فصل حرکت دورانی محض حول یک محور ثابت که در آن در هر ذره جسم روی دایره ای به مر کز محور دوران حر کت می کند را مورد مطالعه قرار می دهیم.

حرکت کلی یک جسم صلب ، ترکیبی از حرکتهای انتقالی و دورانی است.

فصل ۱۰ : سینماتیک دورانی؛متغیرها

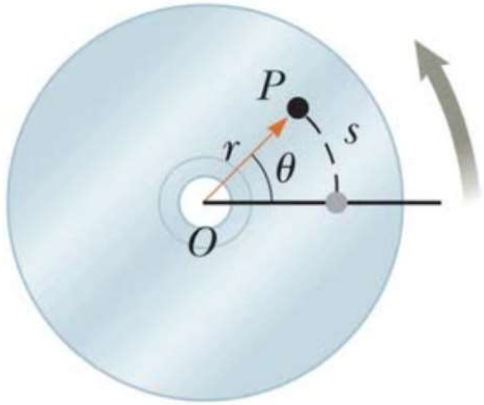
اگر محل و مو قعیت هر ذره جسم صلب مانند P نسبت به چارجوب مرجع معلوم باشد می توان وضعیت تمامی جسم صلب در حال دوران را تعیین کرد



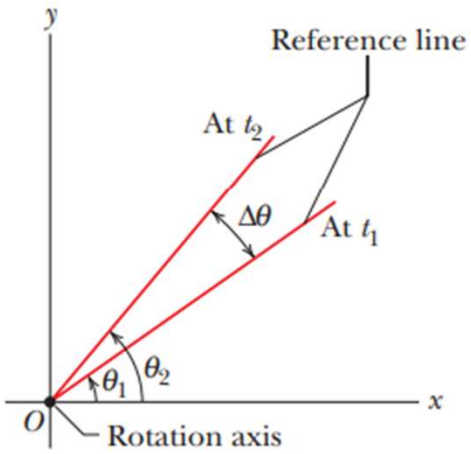
معمولا زاویه بر حسب رادیان (rad) بیان می‌شود.

$$\theta = \frac{s}{r}$$

یک دور = 2π rad = 360°



فصل ۱۰ : سینماتیک دورانی؛متغیرها



θ: موضع زاویه ای ذره است که بر حسب رادیان اندازه گیری می شود:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

سرعت زاویه ای متوسط: اگر در زمان $\Delta t=t_2-t_1$ زاویه $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ طی می شود سرعت زاویه ای متوسط برابر است با :

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

فصل ۱۰ : سینماتیک دورانی؛متغیرها

سرعت زاویه ای لحظه ای : سرعت زاویه ای در یک لحظه است که بر حسب رادیان بر ثانیه اندازه گیری می شود:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

شتاب زاویه ای متوسط: اگر سرعتهای زاویه ای ω_1 و ω_2 در زمان های t_2, t_1 باشد :

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

فصل ۱۰ : سینماتیک دورانی؛متغیرها

شتاب زاویه ای لحظه ای : شتاب زاویه ای د رهر لحظه از زمان است:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

واحد شتاب زاویه ای لحظه ای و متوسط رادیان بر مجذور ثانیه است

فصل ۱۰: دوران با شتاب زاویه ای ثابت

اگر شتاب زاویه ای ثابت باشند معادلات حرکت دورانی محض با شتاب ثابت :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$
$$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$
$$\theta = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

فصل ۱۰: دوران با شتاب زاویه ای ثابت

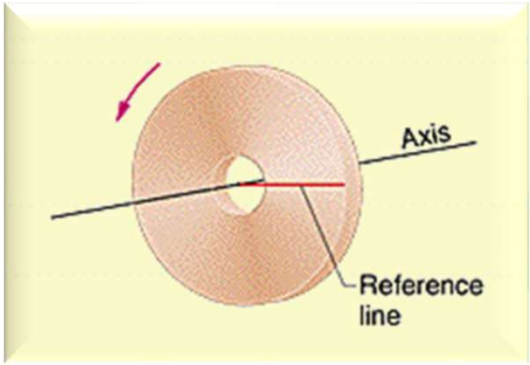
درجدول زیر معادلات حرکت با شتاب ثابت در حرکت دورانی و حرکت انتقالی با یکدیگر مقایسه شده است:

Linear Equation	Missing Variable		Angular Equation	Equation Number
$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10-12)
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-13)
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10-14)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(10-15)
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-16)

فصل ۱۰: دوران با شتاب زاویه ای ثابت

مثال ۱

یك سنگ سمباده شتاب زاویه‌ای ثابت α برابر با $3.5\ rad/s^2$ دارد. در آغاز حرکت، از حالت سکون، خط OP در شکل ۱۱–۵ افقی است. مطلوب است (الف) جابه‌جایی زاویه‌ای خط OP (و در نتیجه سنگ سمباده) و (ب) سرعت زاویه‌ای سنگ سمباده پس از $0.25\ s$



حل:

(الف) α و t معلوم‌اند و می‌خواهیم θ را پیدا کنیم.

$$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

در لحظهٔ $t=0$، داریم $\omega=\omega_0=0$ و $\alpha=3.0\ \mathrm{rad/s^2}$. بنابراین، پس از $2.0\ \mathrm{s}$ خواهیم داشت

$$\theta=(0)(2.0\ \mathrm{s})+\frac{1}{2}(3.0\ \mathrm{rad/s^2})(2.0\ \mathrm{s})^2=6.0\ \mathrm{rad}=0.96\ \mathrm{rev}$$

(ب) α و t معلوم‌اند و می‌خواهیم ω را پیدا کنیم.

$$\omega=\omega_0+\alpha t=0+(3.0\ \mathrm{rad/s^2})(2.0\ \mathrm{s})=6.0\ \mathrm{rad/s}$$

فصل ۱۰: دوران با شتاب زاویه ای ثابت

مثال ۲-حل:

معادلهٔ $\omega = \omega_0 + \alpha t$ را برای شتاب زاویه‌ای ثابت به‌دست آورید.

(الف) از تعریف شتاب زاویه‌ای، یعنی $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ داریم

$$\alpha\, dt = d\omega$$

چون مقدار α ثابت است، پس

$$\alpha \int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

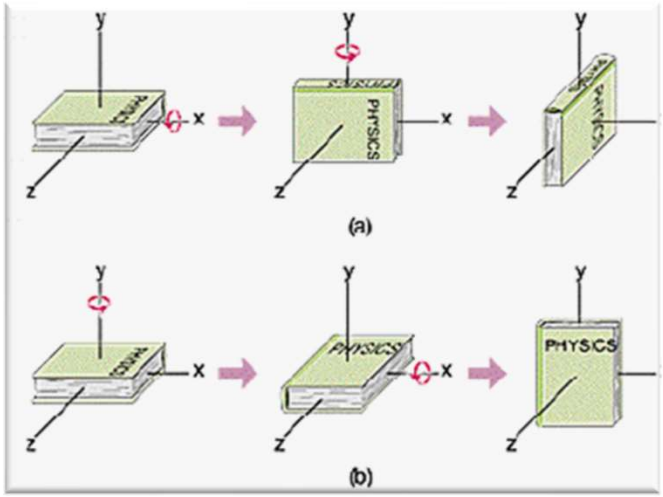
$$\alpha t = \omega - \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

فصل ۱۰: دوران با شتاب زاویه ای ثابت

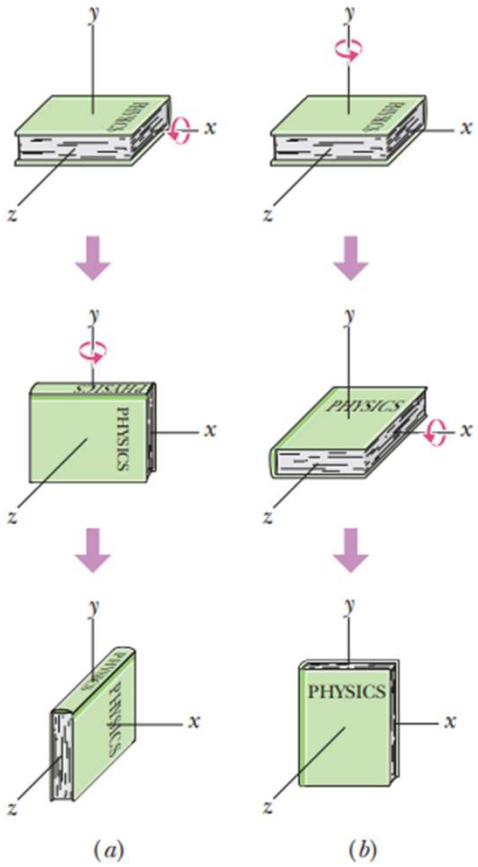
آیا کمیتهای دورانی بردارند؟ جواب این پرسش را فقط می توان با تحقیق در اینکه آیا این کمیتها از قوانین جمع برداری پیروی می کنند یا نه داد.

جابجایی های زاویه ای بردار نیستند زیرا مانند بردار ها از قانون جابجایی جمع برداری تبعیت نمی کنند



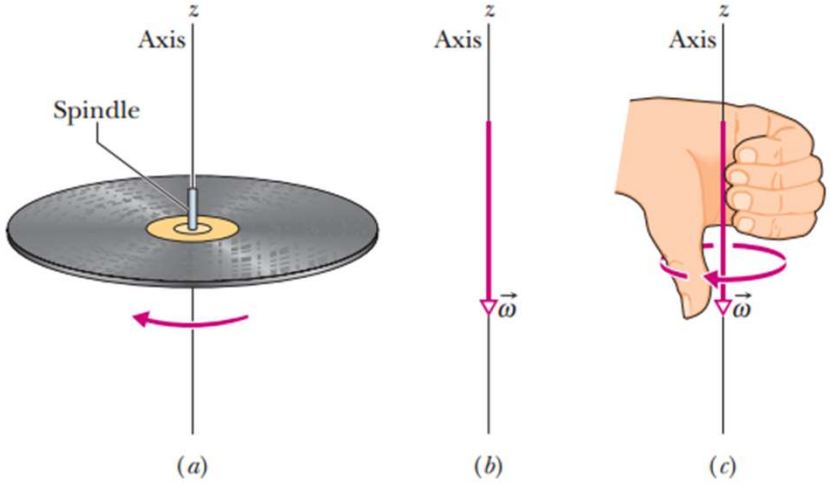
$$\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$$

اگر جابجایی های زاویه ای بینهایت کوچک باشند، خاصیت جابجا پذیری در جمع حاصل می شود بنا براین بردارند.



کمیتهایی که بر حسب جابجاییهای بی نهایت کوچک، مانند سرعت وشتاب زاویه ای، تعریف می شوند بردارند.

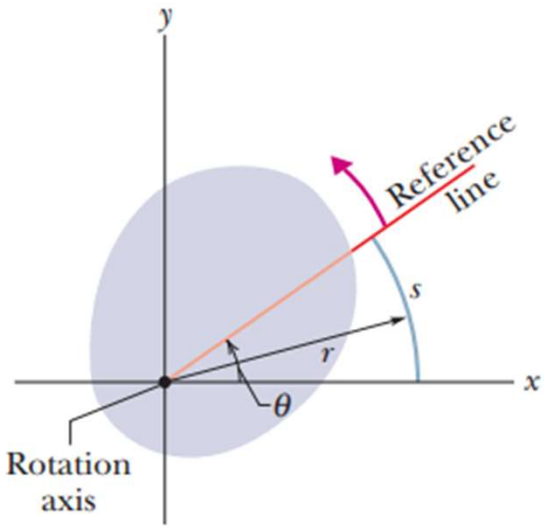
جهت بردار سرعت زاویه ای عمود بر صفحه دوران است و با قاعده دست راست تعیین می گردد



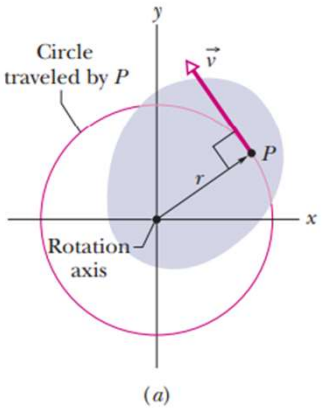
فصل ۱۰ : رابطه میان سینماتیک خطی و زاویه ای

هر ذره جسم مانند نقطه P یک دایره را می پیماید که موقعی که جسم به اندازه زاویه θ می چرخد . ذره در امتداد کمان فاصله s را طی می کند که :

$$s = \theta r$$



فصل ۱۰ : رابطه میان سینماتیک خطی و زاویه ای

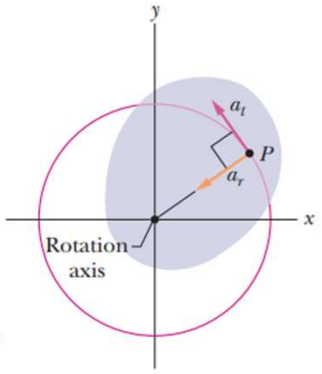


(a)

با مشتق گیری از دوطرف نسبت به زمان و با توجه به اینکه r ثابت است رابطه سرعت خطی و زاویه ای به دست می آید :

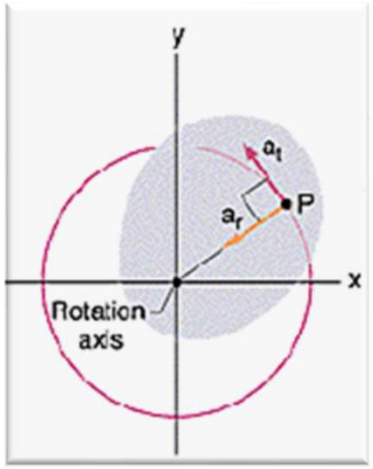
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

$$v = \omega r$$



فصل ۱۰ : رابطه میان سینماتیک خطی و زاویه ای

با مشتق گیری از رابطه $v=r\omega$ نسبت به زمان رابطه شتاب خطی و زاویه ای به دست می آید:



$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$

$$a_t = \alpha r$$

فصل ۱۰ : رابطه میان سینماتیک خطی و زاویه ای

پس بزرگی مولفه مماسی شتاب خطی یک ذره در حرکت دایره ای برابر است با حاصلضرب بزرگی شتاب زاویه ای د رفاصله ذره از محور دوران.

مولفه شعاعی شتاب ذره ای که روی دایره حرکت میکند برابر است با :

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

فصل ۱۰ : دینامیک دورانی



فصل ۱۰ : دینامیک دورانی

گشتاور نیروی وارد بر ذره

تکانه زاویه ای یک ذره

دستگاه ذرات

انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

دینامیک دورانی جسم صلب

ترکیب حرکتهای انتقالی ودورانی یک جسم صلب

فصل ۱۰ : دینامیک دورانی

در این بخش علل دوران یعنی دینامیک دورانی را مطالعه می کنیم

نخست دینامیک دورانی یک ذره و سپس سیستم ذرات و در آخر دینامیک دورانی جسم صلب حول محور دوران ثابت را بررسی می کنیم

فصل ۱۰ : گشتاور نیروی وارد بر ذره

در حرکت انتقالی نیرو را به شتاب خطی جسم وابسته می کنیم . در حرکت دورانی چه کمیتی را به شتاب زاویه ای وابسته کنیم ؟

این کمیت تنها نیرو نیست ، مثلا نیروی یکسان واقع بر نقاط مختلف یک درب شتاب های زاویه ای مختلفی به آن می دهد.

در دوران کمیت متناظر نیرو را گشتاور نیرو می نامند

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



فصل ۱۰ : گشتاور نیروی وارد بر ذره

ابتدا به تعریف گشتاور نیرو برای حالت خاص یک ذره منفرد که از یک چارچوب مرجع لخت ملاحظه می شود می پردازیم.

اگر نیرویی به ذره منفردی که موضع آن نسبت به مبداء است ، اثر کند ، گشتاور نیروی وارد بر ذره به صورت زیر تعریف می شود .

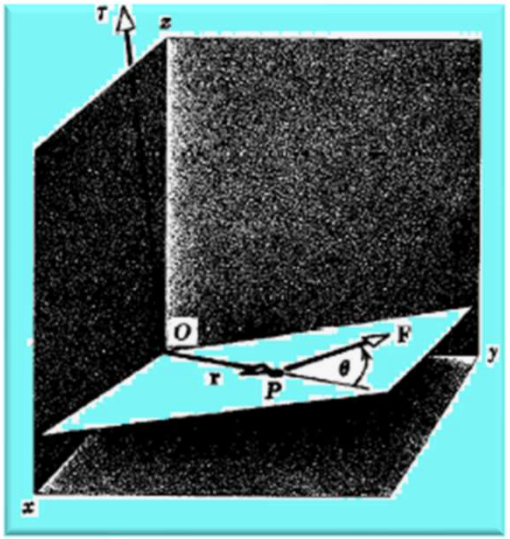
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

فصل ۱۰ : گشتاور نیروی وارد بر ذره

گشتاور نیرو یک بردار است که بزرگی آن برابر است با :

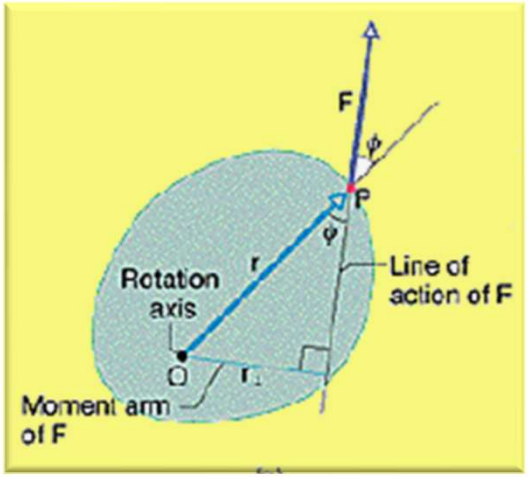
$$\tau = rF\sin\theta$$

راستای گشتاور بر صفحه عمود است و جهت آن از قاعده دست راست بدست می آید



فصل ۱۰ : گشتاور نیروی وارد بر ذره

بزرگی گشتاور نیرو را می توان از ضرب بازوی گشتاور دربزرگی نیرو مطابق شکل زیر نیز بدست آورد.

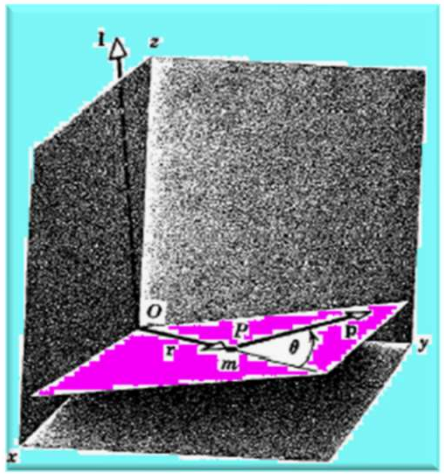


$$\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_t$$
$$\tau = (r \sin \phi)(F) = r_\perp F,$$

فصل ۱۰ : تکانه زاویه ای

$$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

اگر P تکانه خطی ذره ای به جرم m در موضع o نسبت به یک چارچوب مرجع باشد تکانه زاویه ای این ذره نسبت به نقطه به صورت مقابل تعریف می شود :



تکانه زاویه ای بردار است و بزرگی آن :

$$l=rp\sin\theta$$

جهت آن در راستای عمود بر صفحه است و از قاعده دست راست تعیین می گردد:

فصل ۱۰ : تکانه زاویه ای یک ذره

به دست آوردن رابطه بین گشتاور نیرو و تکانه زاویه ای :

می‌دانیم که برای یک ذره $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt$

اگر دوطرف این معادله را به‌صورت برداری در $\mathbf{r}$ ضرب کنیم، داریم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

فصل ۱۰ : تکانه زاویه ای یک ذره

ادامه رابطه بین گشتاور نیرو و تکانه زاویه ای :

اما $d\mathbf{r}$ جابه‌جایی برداری ذره در زمان dt و در نتیجه $d\mathbf{r}/dt$ برابر $\mathbf{v}$ سرعت لحظه‌ای آن است. همچنین، $\mathbf{p}$ با $m\mathbf{v}$ مساوی است، در نتیجه معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت‌زیر نوشت

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v}\times m\mathbf{v}) + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

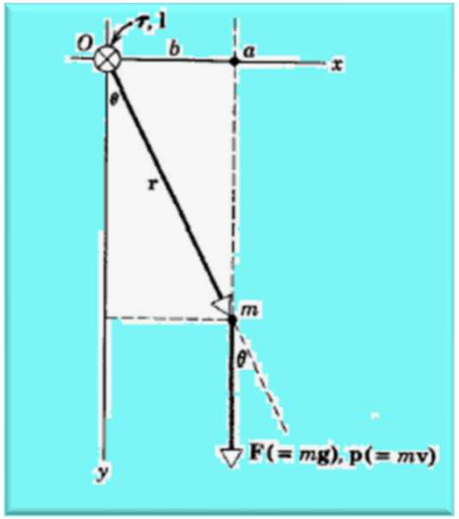
اما $\mathbf{v}\times m\mathbf{v} = 0$، زیرا حاصلضرب برداری دوبردار موازی برابر صفر است. بنابراین

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

فصل ۱۰ : تکانه زاویه ای یک ذره

مثال:

ذره‌ای به‌جرم m از حالت سکون از نقطهٔ a رها می‌شود و به‌موازات محور y (قائم) سقوط می‌کند. (الف) گشتاور نیروی وارد بر m را در لحظهٔ t (ب) تکانهٔ زاویه‌ای m را در لحظهٔ t نسبت به‌مبدأ O تعیین کنید.



فصل ۱۰ : تکانه زاویه ای یک ذره

حل:

(الف) گشتاور نیرو

$$\tau = rF\sin\theta$$

دراین مثال، $r\sin\theta = b$ و $F = mg$. درنتیجه

$$\tau = mgb = \text{const.}$$

τ برشکل عمود وجهتش به‌طرف داخل است

(ب) تکانهٔ زاویه‌ای

$$l = rp\sin\theta$$

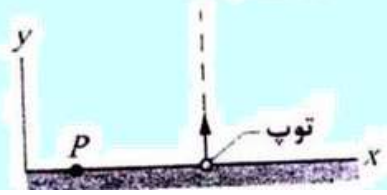
دراین مثال $r\sin\theta = b$ و $p = mv = m(gt)$.

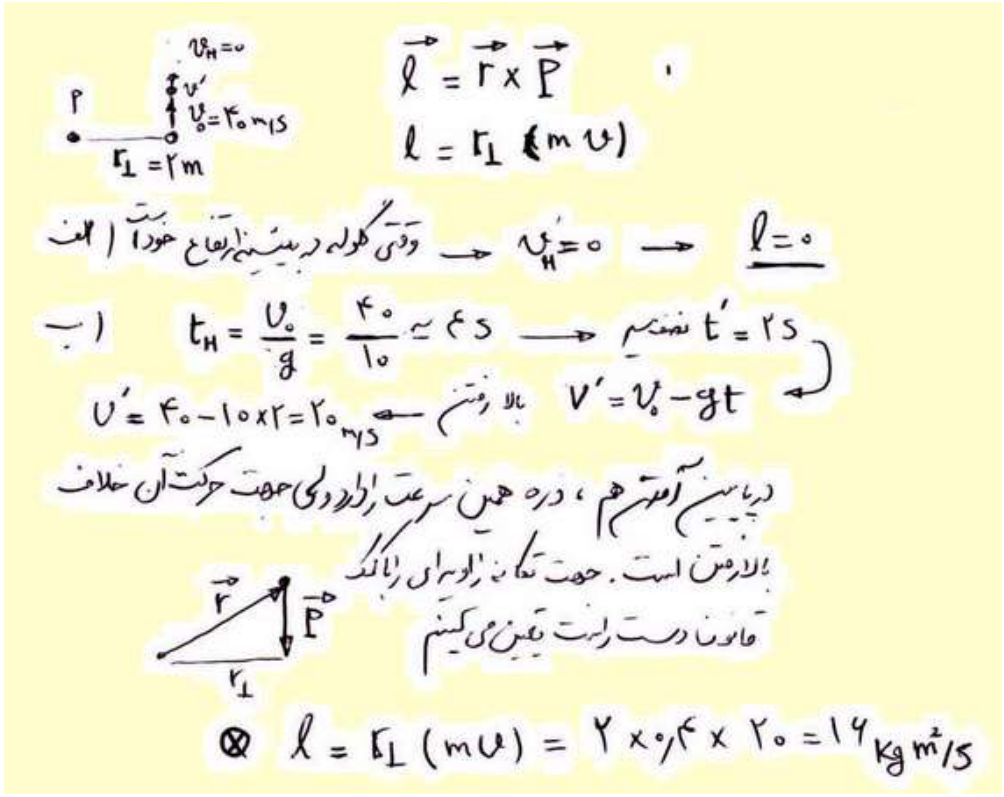
$$l = mgbt$$

$\mathbf{l}$ عمود برشکل وجهتش به‌طرف داخل است،

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

در شکل یک گلولهٔ ۰/۴۰۰kg را مستقیماً به طرف بالا با تندی اولیهٔ ۴۰/۰m/s پرتاب می‌کنیم. اندازه حرکت زاویه‌ای گلوله نسبت به نقطهٔ P را که به فاصلهٔ افقی ۲/۰۰m از نقطهٔ پرتاب قرار دارد در دو حالت زیر به دست ورید. (الف) وقتی گلوله در بیشینهٔ ارتفاع خود است و (ب) قتی گلوله از وسط راه به زمین بر می‌گردد. گشتاور نیروی ارد بر گلوله را نسبت به نقطهٔ P بر اثر نیروی گرانشی به دست ورید در صورتی که (پ) گلوله در بیشینهٔ ارتفاع خود و (ت) ز نیمهٔ مسیر برگشت به زمین باشد.





تکانه زاویه ای کل یک دستگاه ذرات برابر جمع تکانه زاویه ای هر یک از ذرات است:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2 + \boldsymbol{\ell}_3 + \cdots + \boldsymbol{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\ell}_i,$$

با گذشت زمان تکانه زاویه ای به علت گشتاور نیروهای خارجی وارد بر ذرات دستگاه تغییر می کند:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\boldsymbol{\ell}_i}{dt}.$$

اگر قانون سوم نیوتن کاملا صادق باشد مجموع گشتاورهای نیروهای داخلی صفر است پس می توان نوشت :

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$$

رابطه فوق در صورتی صادق است که L و τ نسبت به یک مبداء چارچوب لخت اندازه گیری شود . در غیر این صورت صادق نیست.

اگر نقطه مرجع ، مر کز جرم دستگاه انتخاب شود ، حتی اگر مر کز جرم در چار چوب مرجع ثابت نباشد معادله فوق باز هم صادق است.

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

مورد جسم صلب که در آن محور دوران در چارچوب مر جع لخت ثابت است در نظر می گیریم:

انرژی جنبشی کل جسم صلب دارای حرکت دورانی محض:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots$$
$$= \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2 = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2.$$

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

مجموع حاصلضربهای جرم ذرات در مجذور فاصله نسبی آنها از محور دوران را لختی دورانی نامند.

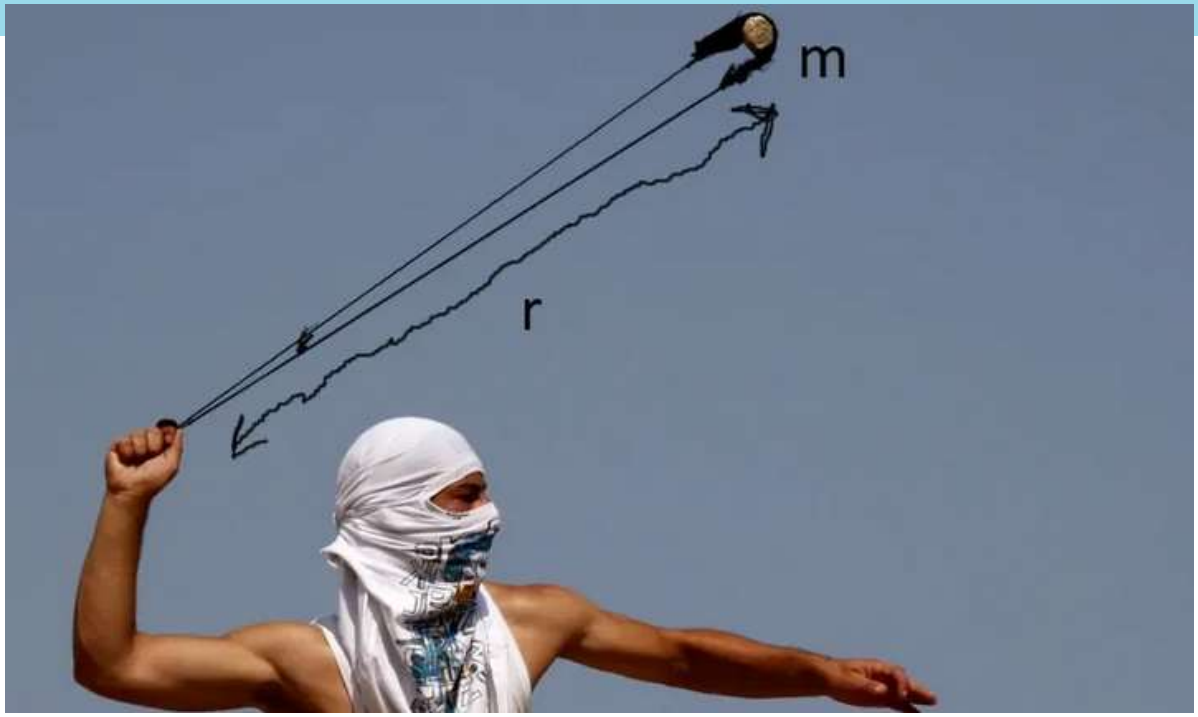
$$I = \sum m_i r_i^2$$

پس انرژی جنبشی بر حسب لختی دورانی عبارت است از :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

لختی دورانی چیست؟

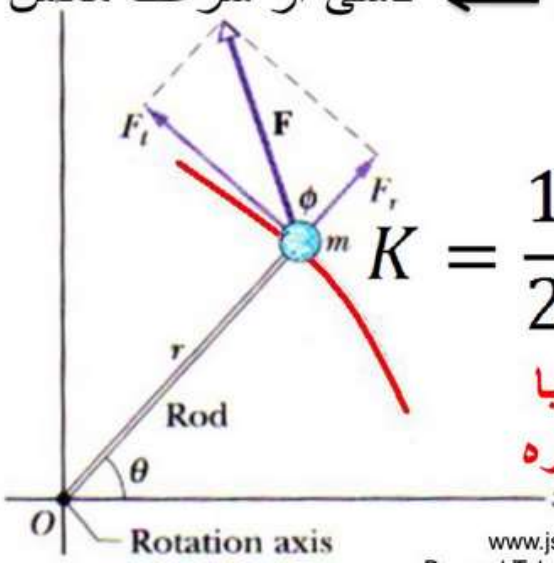
به توانایی اجسام مختلف در دوران، «لَختی دورانی» (Rotational Inertia) یا «ممان اینرسی» (Moment of Inertia) گفته می‌شود. این مقدار یک عدد اسکالر است که قابلیت یک جسم در تغییر سرعت دورانش حول یک محور خاص را نشان می‌دهد. لختی دورانی نقشی مشابه با جرم را در مکانیک دورانی ایفا می‌کند. این ویژگی به دو عامل جرم و شکل توزیع آن حول محور مد نظر وابسته است.



انرژی جنبشی ذره در حال دوران

اگر جلوی ذره در حال دوران را سد کنیم می تواند ضربه بزند
پس انرژی جنبشی دارد

انرژی جنبشی در حرکت انتقالی ⟵ ناشی از سرعت مماس بر مسیر حرکت **(v=rω)**



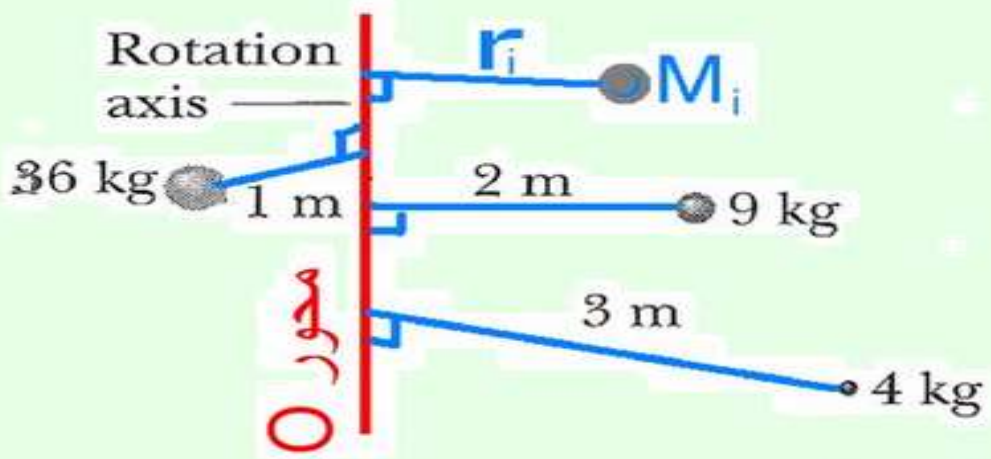
$$K = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} M(r\omega)^2$$

ممان اینرسی یا لختی دورانی ذره

$$I = Mr^2$$

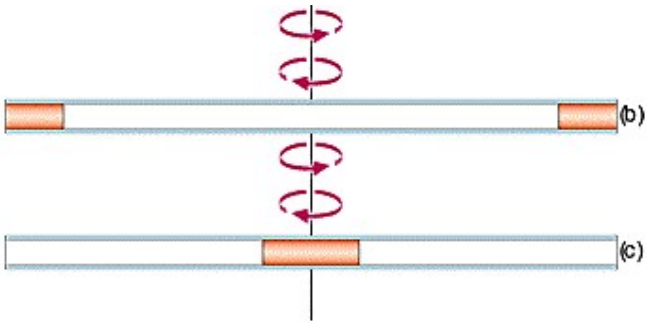
لختی دورانی سیستم N ذره ای حول محور ثابت

$$(I_i)_o = M_i r_i^2 \longrightarrow I_0 = \sum_{i=1}^{N} (I_i)_o$$



$$I_0 = \sum_{i=1}^{N} M_i r_i^2$$

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

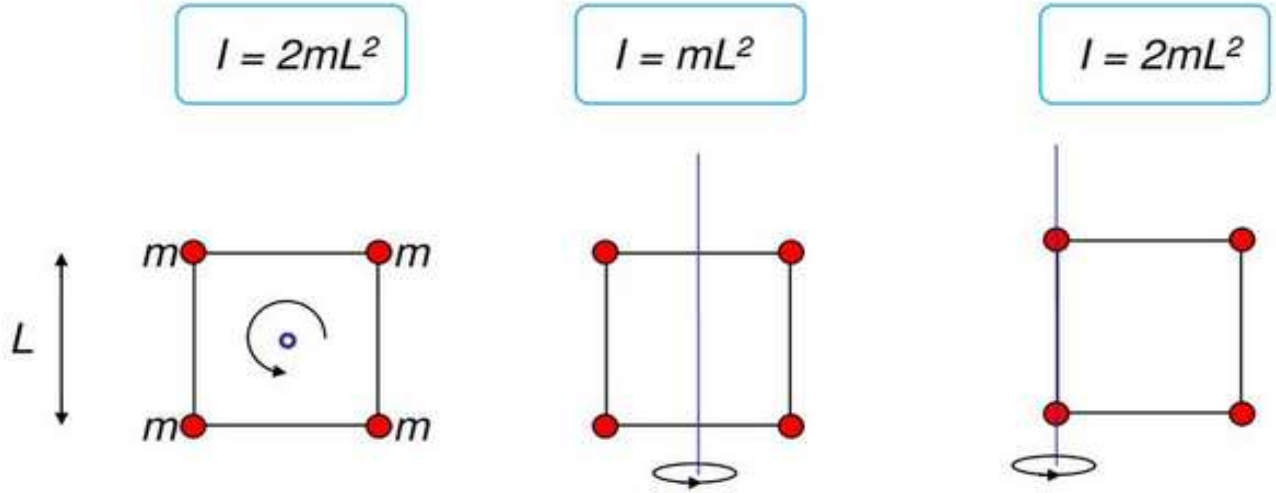


لختی دورانی هر جسم به محور دوران و شکل جسم و نحوه توزیع جرم آن بستگی دارد .

در شکل فوق m و ω یکسان است ولی لختی ها متفاوت است.
چرا؟

مثال- محاسبه ممان اینرسی سیستم ذرات

- ممان اینرسی برای یک ذره به وضوح به فاصله آن از محور دوران وابسته است.



مثال- بررسی نقش محور دوران در محاسبه ممان اینرسی سیستم ذرات

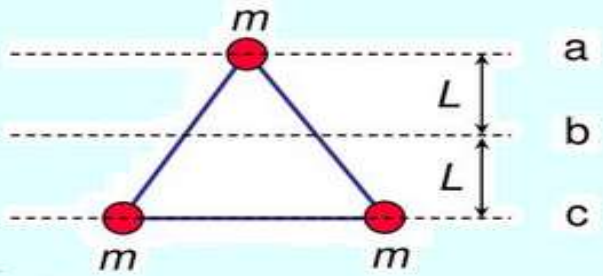
بر روی سه راس مثلث شکل سه توپ با ابعاد یکسان و جرم یکی را با کمک میله های صلب بدون جرمی به هم متصل کرده ایم.

کدام عبارت در مورد ممان اینرسی حول محورهای a، b و c صادق است.

(1) $I_a > I_b > I_c$

(2) $I_a > I_c > I_b$

(3) $I_b > I_a > I_c$



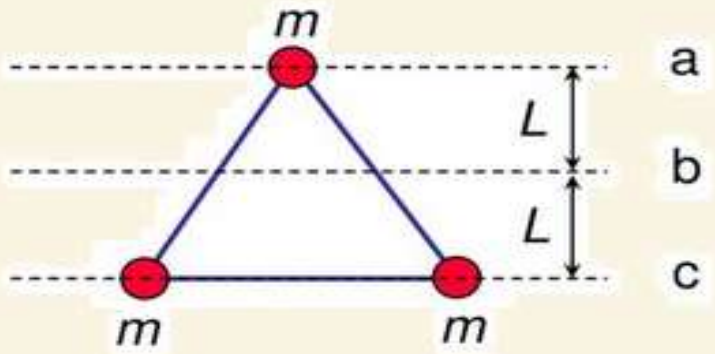
... نقش محور دوران ...

محاسبه ممان اینرسی

$$I_a = m(2L)^2 + m(2L)^2 = 8mL^2$$

$$I_b = mL^2 + mL^2 + mL^2 = 3mL^2$$

$$I_c = m(2L)^2 = 4mL^2$$



پس 2 درست است: $I_a > I_c > I_b$

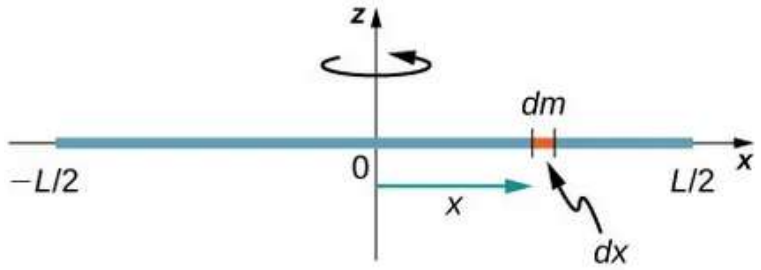
فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

چون جسم صلب دارای توزیع پیوسته جرم است عمل جمع به انتگرالگیری تبدیل می شود و لختی دورانی :

$$I = \int r^2 \, dm$$

m عنصر جرم و r فاصله آن تا محور دوران است.

روش محاسبه لختی دورانی برخی اجسام پیوسته



در شکل بالا محور میله در مرکز آن قرار گرفته است. برای محاسبه لختی دورانی این جسم از چگالی خطی جرم یعنی λ استفاده می‌کنیم.

در این حالت $\lambda = \frac{m}{l}$ یا $m = \lambda l$ است. با گرفتن دیفرانسیل از دو طرف رابطه داریم:

$$dm = \lambda dx$$

حال اگر جزء طول را dx و فاصله هر جزء جرم را تا محور، x در نظر بگیریم با استفاده از رابطه لختی دورانی اجسام پیوسته داریم:

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx$$

روش محاسبه لختی دورانی برخی اجسام پیوسته

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx$$

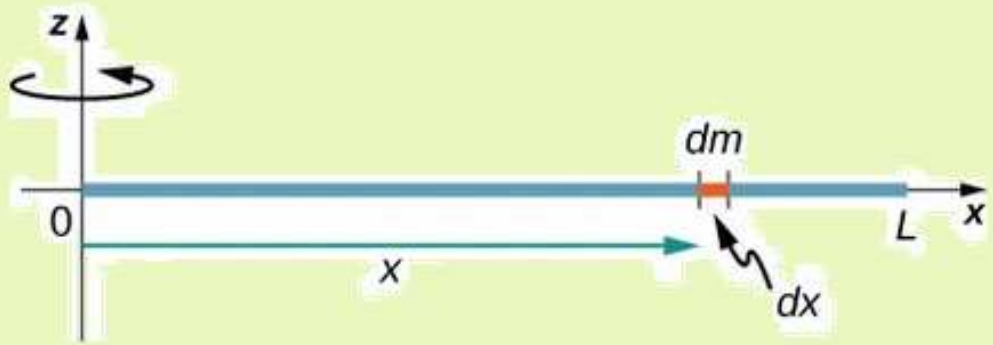
با توجه به اینکه محور در مرکز میله قرار دارد پس حد انتگرال گیری بین $-\frac{L}{2}$ تا $\frac{L}{2}$ است. در نتیجه داریم:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \lambda \left(\frac{1}{3}\right)\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{L}{2}\right)^3\right]_0$$

$$= \lambda \left(\frac{1}{3}\right)\frac{L^3}{8}(2) = \frac{M}{L}\left(\frac{1}{3}\right)\frac{L^3}{8}(2) = \frac{1}{12}ML^2$$

روش محاسبه لختی دورانی برخی اجسام پیوسته

همین حالت برای زمانی که محور مانند شکل زیر در ابتدای میله است، به صورت زیر تغییر می‌کند:

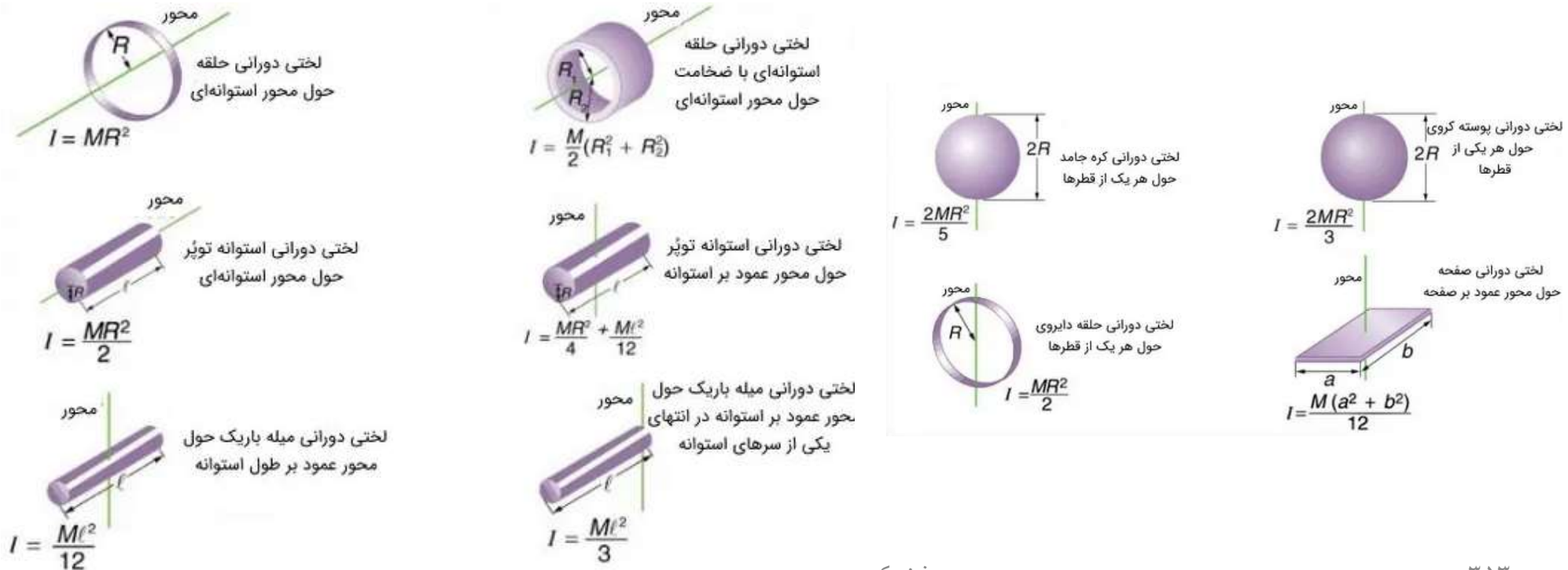


$$I = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \lambda \left(\frac{1}{3}\right)\left[(L)^3 - (0)^3\right]$$
$$= \lambda \left(\frac{1}{3}\right) L^3 = \frac{M}{L}\left(\frac{1}{3}\right) L^3 = \frac{1}{3} ML^2$$

همان طور که می‌بینید محل محور در مقدار نهایی لختی دورانی جسم موثر است.

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

لختی دورانی بعضی از اجسام جامد معمولی نسبت به محور های دوران درجدول زیر آمده است:

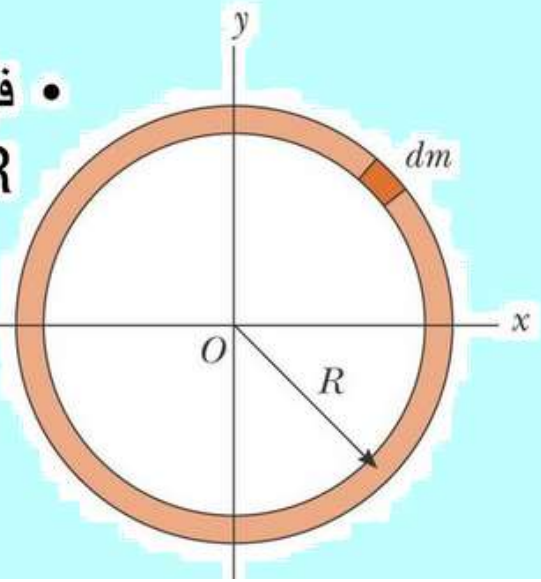


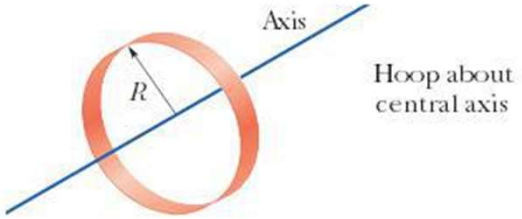
فصل ۱۰ : لختی دورانی حلقه

- فرض کنید r ثابت و مساوی Rاست.

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm$$

$$I = MR^2$$





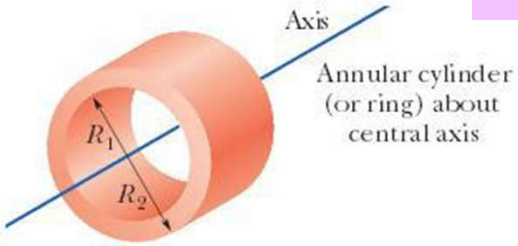
$I = MR^2$ (a)

$$dI = r^2 dm$$

$$I = \int dI = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی حلقه

به عنوان مثال گشتاور لختی یک حلقه استوانه ای شکل به شعاع داخلی و شعاع خارجی را محاسبه می کنیم:



$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)

$$dI = r^2 dm \quad , \quad dm = \frac{M}{V} dv \quad , \quad dv = 2\pi r L dr$$

$$I = \int dI = \int r^2 \frac{M}{V} 2\pi r L dr = \frac{M}{V}(2\pi L)\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)L}(2\pi L)\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$I = \frac{2M(R_2^4 - R_1^4)}{4(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{M(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)}{2(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$$

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

اگر شعاع داخلی استوانه صفر باشد یک استوانه توپر خواهیم داشت که لختی دورانی آن:

$$I=\frac{۱}{۲}MR^{۲}$$

اگر $R_1 \approx R_2 \approx R$ باشد حلقه استوانه ای داریم که لختی دورانی آن برابراست :

$$I=MR^{۲}$$

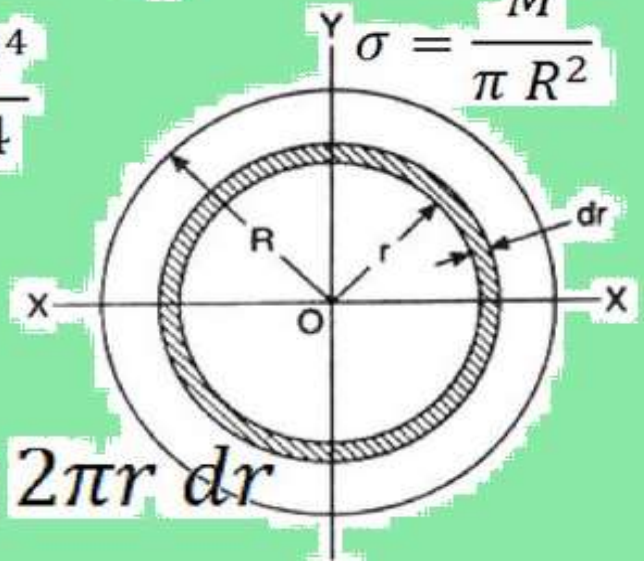
فصل ۱۰ : لختی دورانی قرص

مثال- ممان اینرسی قرص دایره ای تخت و استوانه

$$I_z = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 (\sigma ds) = \sigma \int_0^R r^2 (2\pi r\, dr)$$

$$I_z = 2\pi\,\sigma \int_0^R r^3\, dr = 2\pi\,\sigma \times \frac{R^4}{4}$$

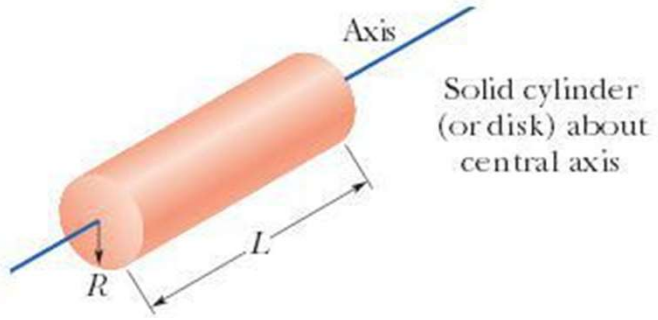
$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$



$$I_z = \frac{1}{2} M R^2$$

$$ds = 2\pi r\, dr$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی استوانه حول محور



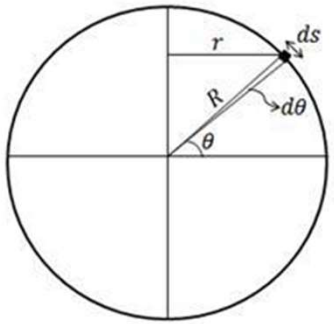
$I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)

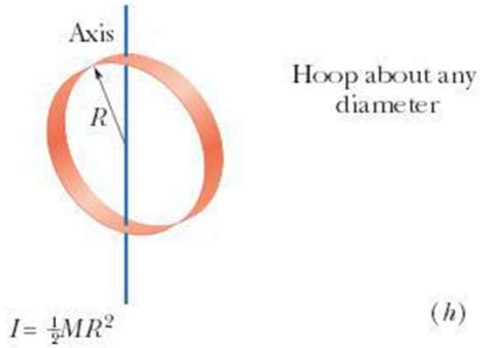
$$dI = r^2 dm \ , \ dm = \frac{M}{V} dv \ , \ dv = 2\pi r L dr$$

$$I = \int dI = \int r^2 \frac{M}{V} 2\pi r L dr = \frac{M}{\pi R^2 L}(2\pi L)\int_0^R r^3 \, dr = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$I = \frac{2MR^4}{4R^2} = \frac{1}{2}MR^2$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی حلقه حول قطر





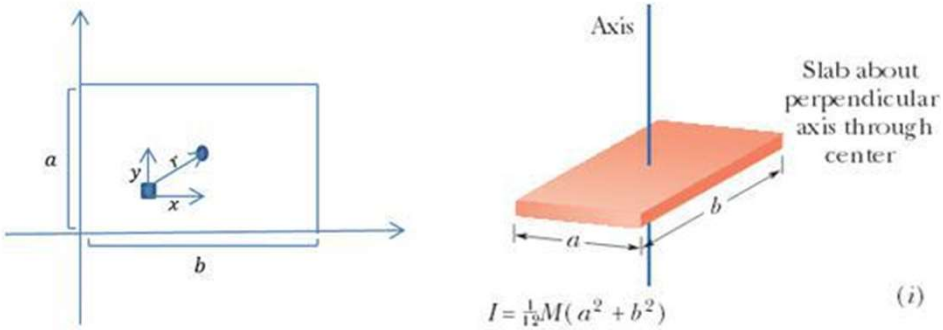
$$dI = r^2 dm \ , \ dm = \frac{M}{L} ds \ , \ ds = Rd\theta \ , \ r = R\cos\theta$$

$$I = \int dI = \int (R\cos\theta)^2 \frac{M}{L} Rd\theta = \frac{MR^3}{2\pi R} * 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{MR^2}{2\pi} 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} MR^2$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی مستطیل



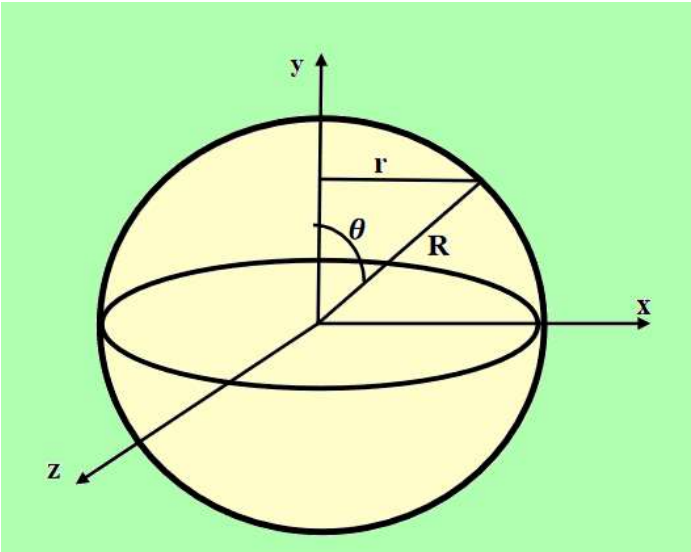
$$dI = r^2 dm \ , \ dm = \frac{M}{A} dA \ , \ dA = dxdy \ , \ r^2 = x^2 + y^2$$

$$I = \int dI = \iint (x^2 + y^2) \frac{M}{A} dxdy = \frac{M}{A} * 4 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dxdy$$

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^{\frac{b}{2}} dy = \frac{b^3}{24} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \frac{a^3}{24} = \frac{ba(a^2 + b^2)}{48}$$

$$I = \frac{4M}{ab} \frac{ba(a^2 + b^2)}{48} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی یک پوسته کروی



$$I = \int r^2 \, dm$$

از آنجا که منظور از r فاصله تا محور دوران می باشد پس r را بر حسب شعاع و زاویه θ می نویسیم. که می شه :

$$r = R\sin\theta$$

هم چنین می دانیم چگالی جرمی یکنواخت است و روی پوسته کره پخش شده پس داریم:

$$\sigma = \frac{m}{4\pi R^2} = \frac{dm}{ds} \Rightarrow dm = \frac{M}{4\pi R^2} \, ds$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی یک پوسته کروی

$$I = \int (R sin\theta)^{۲} \frac{M}{۴\pi R^{۲}} ds$$

همچنین برای یک پوسته کروی در دستگاه مختصات کروی المان سطحی ds به صورت زیر می‌باشد:

$$ds = R^{۲} sin\theta \, d\theta \; d\phi$$

و می دانیم زاویه ϕ چون زاویه سمت است از صفر تا ۲π تغییر می کند و زاویه θ چون زاویه ارتفاع می باشد از صفر تا π تغییر می کند. حال با جایگزاری داریم:

$$I = \frac{MR^{۲}}{۴\pi} \int_{\theta=۰}^{\pi} \int_{\phi=۰}^{۲\pi} \sin^{۲}\theta \, sin\theta \, d\theta \; d\phi \Rightarrow$$

$$\frac{MR^2}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^2\theta\,\sin\theta\,d\theta\int_{0}^{2\pi}d\phi=\frac{MR^2}{4\pi}\,2\times\pi\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^2\theta\,\sin\theta\,d\theta$$

حال می مونه جواب این انتگرال رو به دست بیارم که به صورت زیر به دست می آد:

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^2\theta\,\sin\theta\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi}(1-\cos^2\theta)\,\sin\theta\,d\theta\;\Rightarrow$$

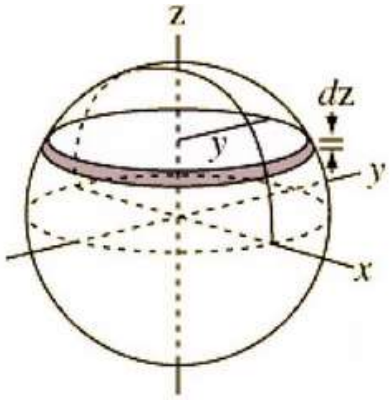
$$\int_{\theta=0}^{\pi}(\sin\theta-\cos^2\theta\,\sin\theta)\;d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi}(\sin\theta)\;d\theta-\int_{\theta=0}^{\pi}(\cos^2\theta\,\sin\theta)\;d\theta\;\Rightarrow$$

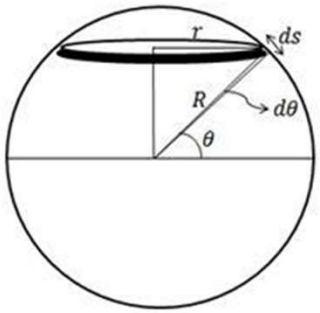
$$-\cos\theta\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)+\frac{1}{3}(-1-1)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

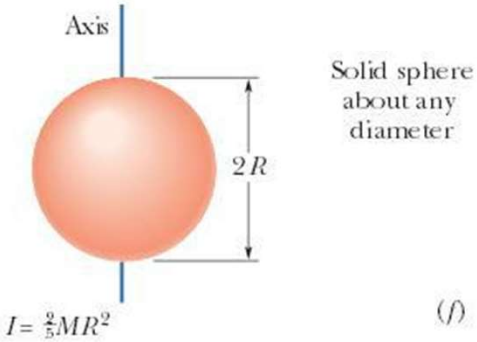
$$I=\frac{MR^2}{4\pi}\,2\times\pi\times\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$I=\frac{2}{3}MR^2$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی کره حول قطر







$$dI = r^2 dm \quad , \quad dm = \frac{M}{V} dv \quad , \quad dv = \pi r^2 ds \quad , \quad ds = R d\theta \quad , \quad r = R\cos\theta$$

$$I = \int dI = \int (R\cos\theta)^2 \frac{M}{V} \pi (R\cos\theta)^2 R d\theta = \frac{3M\pi R^5}{4\pi R^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$$

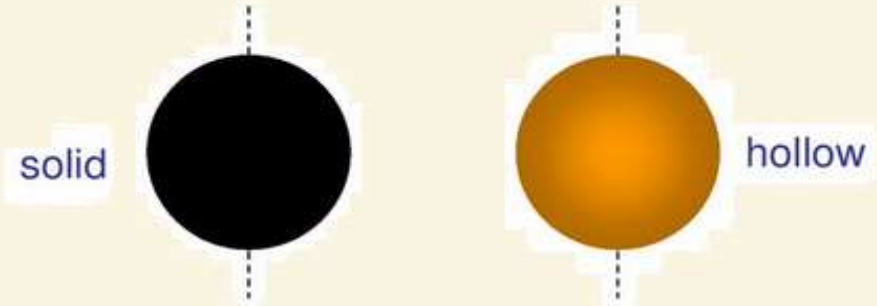
$$I = \frac{3M\pi R^5}{4\pi R^3} * \frac{8}{15} = \frac{2}{5} MR^2$$

مثال های ممان اینرسی

دو کره زیر هر دو جرم برابر یکدیگر M و شعاع مساوی یکدیگر R دارند.
کره طلایی پوسته و کره سیاه رنگ توپر است. لختی دورانی آنها حول قطر را با یکدیگر مقایسه کنید.

چون کره توخالی بیشتر جرم آن روی شعاع یعنی در فواصل دورتری از محور دوران توزیع شده است، پس لختی دورانی بیشتری دارد.

$$I_{SOLID} < I_{SHELL}$$



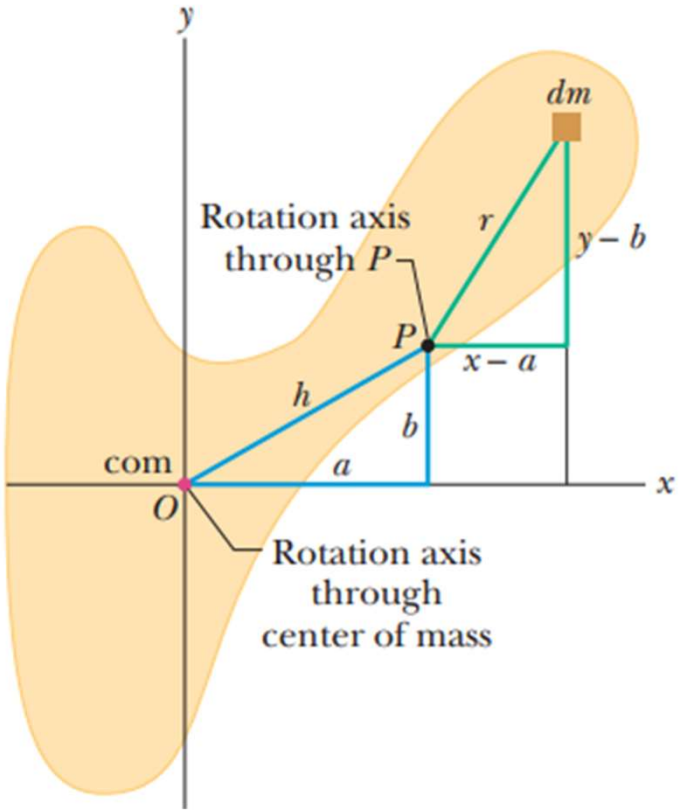
فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

قضیه محورهای موازی :

لختی دورانی هر جسم حول یک محور برابر است لختی دورانی نسبت به محوری که از مرکز جرم می گذرد و با محور مفروض موازی است بعلاوه حاصلضرب جرم جسم د رفاصله دومحور.

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی



اثبات قضیه محورهای موازی:

فرض می کنیم که مبداء بر مر کز جرم منطبق باشد و x, y مطابق شکل مختصات عنصر جرم dm باشد:

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

اثبات قضیه محورهای موازی:

لختی دورانی جسم حول نقطه :

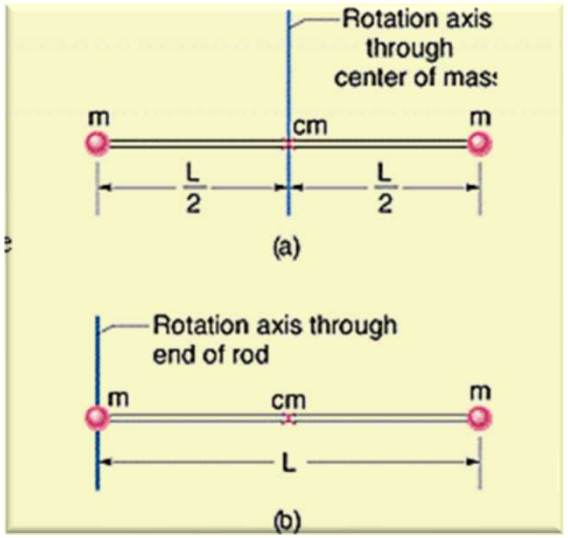
$$I = \int r^2\,dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\,dm,$$

$$I = \int (x^2 + y^2)\,dm - 2a\int x\,dm - 2b\int y\,dm + \int (a^2 + b^2)\,dm.$$

با توجه به تعریف مرکز جرم انتگرالهای دوم و سوم مختصات مرکز جرم است که صفر فرض شده

بنابراین قضیه اثبات است.

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی



مثال : *دو جسم با جرم یکسان توسط میله سبکی به طول L (از جرم میله صرف نظر می کنیم) به هم وصل است مطلوب است گشتاور لختی جسم نسبت به محور دورانی که از مرکز جرم و از یک انتهای میله می گذرد*

حل:

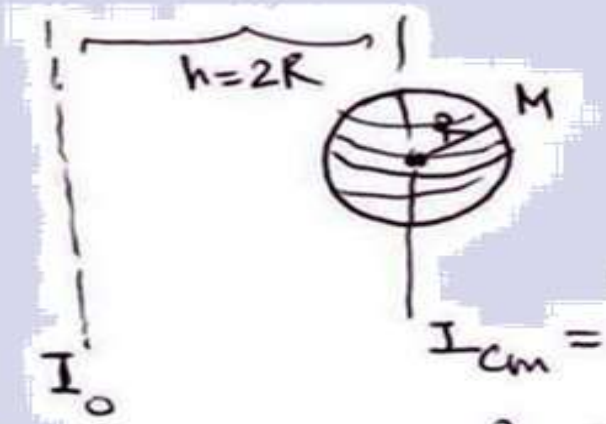
$$I_{cm} = \sum m r_i^2 = m(\frac{L}{2})^2 + m(\frac{L}{2})^2 = m\frac{L^2}{2}$$

$$I = I_{cm} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = mL^2.$$

قضیه محورهای موازی

- اگر لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم جسمی به جرم M برابر با I_{CM} باشد، لختی دورانی حول محوری موازی با و در فاصله h از محور گذرنده از مرکز جرم اینطور محاسبه میشود:

$$I = I_{CM} + M h^2$$



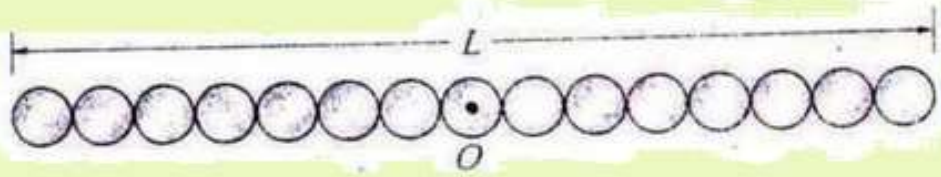
$$I_o = \frac{2}{5} MR^2 + M(2R)^2 = \frac{22}{5} MR^2$$

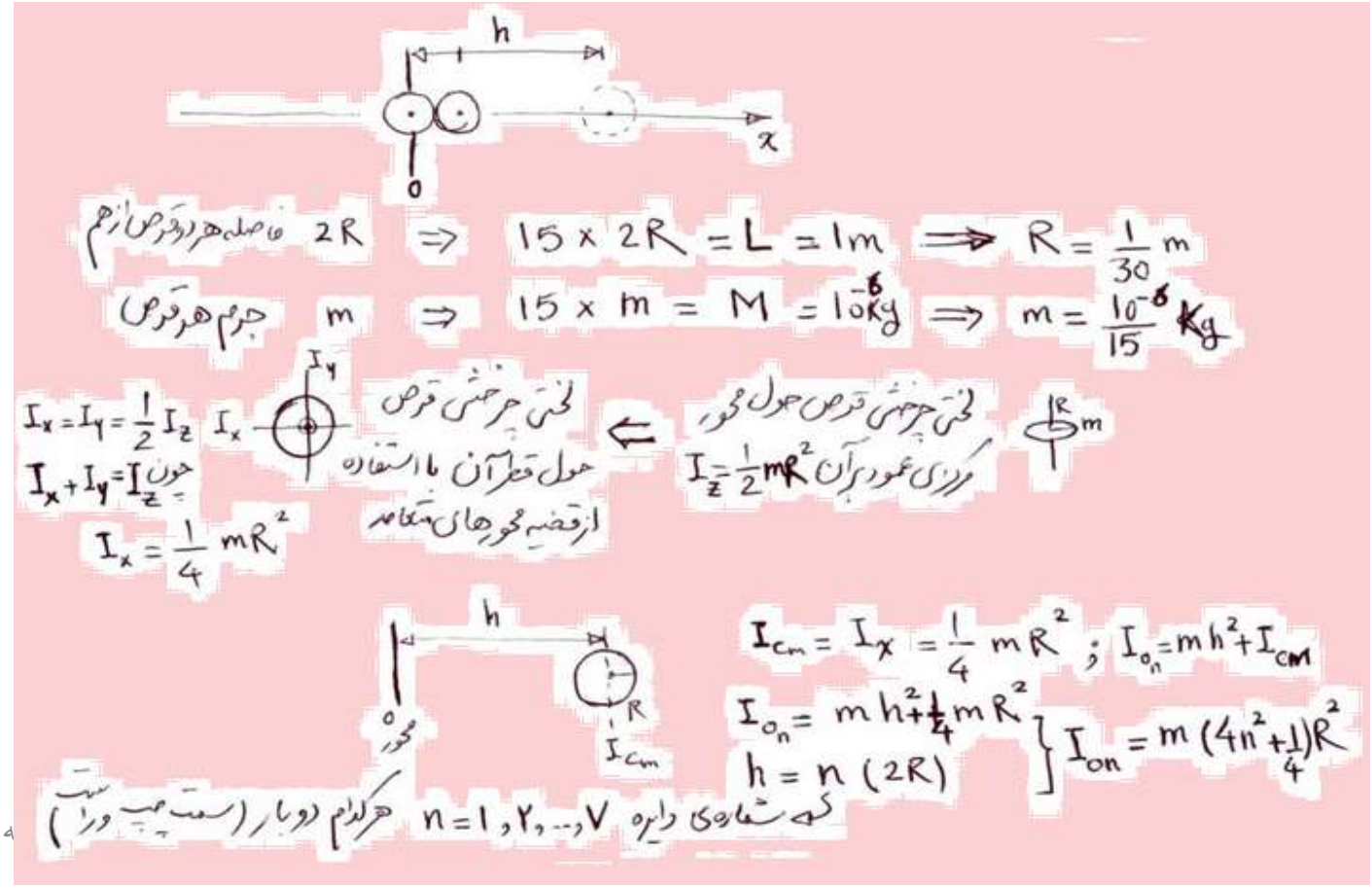
فصل ۱۰ : لختی دورانی

شکل آرایه‌ای از ۱۵ قرص مشابه را نشان می‌دهد که به صورت میله‌ای به طول $L = 1/0000\,m$ و جرم (کل) $M = 100/0\,mg$ به یکدیگر چسبیده‌اند. این آرایه می‌تواند حول محور عمودی که از نقطهٔ O در قرص مرکزی می‌گذرد بچرخد.

(الف) لختی چرخشی این آرایه حول این محور چقدر است؟

(ب) اگر فرض کنیم که این آرایه به صورت میلهٔ یکنواختی به جرم M و طول L باشد، و اگر از رابطهٔ جدول ۱۰-۲ ث برای محاسبهٔ لختی چرخشی استفاده کنیم، تا چند درصد خطا خواهیم داشت؟




h
x
O
فاصله هر دو قرص از هم 2R ⇒ 15 × 2R = L = 1m ⇒ R = 1/30 m
جرم هر قرص m ⇒ 15 × m = M = 10^-6 kg ⇒ m = 10^-6/15 kg
لختی چرخشی قرص حول محور گذرا بر مرکز عمود بر آن
I_z = 1/2 mR^2
لختی چرخشی قرص حول قطر آن با استفاده از قضیه محورهای متعامد
I_x = I_y = 1/2 I_z
I_x + I_y = I_z چون
I_x = 1/4 mR^2
I_cm = I_x = 1/4 mR^2 ; I_on = mh^2 + I_cm
I_on = mh^2 + 1/4 mR^2
h = n(2R)
I_on = m(4n^2 + 1/4)R^2
محور
I_cm
هرکدام دوبار (سمت چپ و راست) n = 1, 2, ... V که شعاعی دایره

$$I_{\text{کل}} = I_{Cm} + 2\sum_{n=1}^{7} I_{on}$$

که برای وسطی

$$I_{\text{کل}} = \frac{1}{4}mR^2 + 2\sum_{n=1}^{7} m(4n^2+\tfrac{1}{4})R^2 = mR^2\left[\frac{1}{4} + 2\sum_{n=1}^{7}(4n^2+\tfrac{1}{4})\right]$$

$$I_{\text{کل}} = mR^2\left[\frac{1}{4} + \frac{7}{2} + 8\underbrace{\sum_{n=1}^{7} n^2}_{140}\right] = 1123.75\, mR^2$$

حاگذاری ←

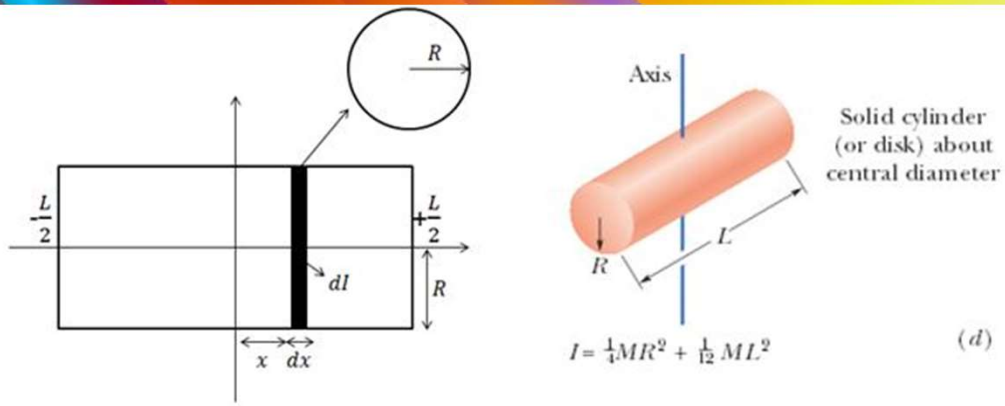
$$I_{\text{کل}} = 8.32\times10^{-8}\ \text{kg m}^2$$

تقریبا مثل یکنواخت $I'_0 = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}\times10^{-6}\times(1)^2 = 8.33\times10^{-6}\ \text{kg m}^2$

$$\text{درصد خطای نسبی} = \frac{|I_{\text{کل}} - I'_0|}{I_{\text{کل}}}\times100 = \frac{10^{-8}\times|8.32-8.33|}{10^{-8}\times 8.32}\times100 = 0.12\%$$

خطا کمتر از 0.2 درصد است.

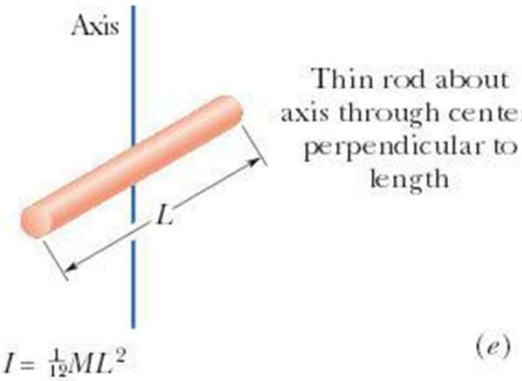
فصل ۱۰ : لختی دورانی استوانه



$$dI = \frac{1}{4}dmR^2 + dmx^2 \quad , \quad dm = \frac{M}{V}dv \quad , \quad dv = (\pi R^2)dx$$

$$I = \int dI = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{4}\frac{M}{V}(\pi R^2)R^2dx + \frac{M}{V}(\pi R^2)x^2dx = \frac{M}{V}(\pi R^2)\left(\frac{R^2}{4}x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$I = \frac{M}{\pi R^2 L}(\pi R^2)\left(\frac{R^2L}{2} + \frac{L^3}{12}\right) = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

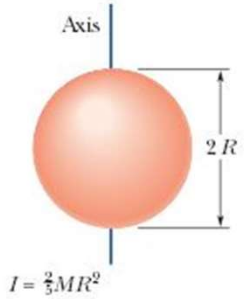


$$dI = r^2 dm \ , \ dm = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int dI = \int r^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \, dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

فصل ۱۰ : لختی دورانی کره توپر



Solid sphere about any diameter

(f)

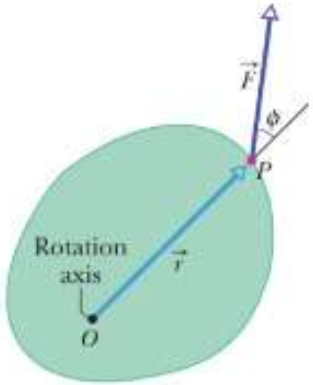
$$dI = r^2\,dm \quad , \quad dm = \frac{M}{V}dv \quad , \quad dv = p^2 \sin\theta\, dp d\varphi d\theta \quad , \quad r = p\cos\theta$$

$$I = \int dI = \iiint_{0\,0\,0}^{2\pi\,\pi\,R} \frac{M}{V} p^4 \sin^2\theta \sin\theta\, dp d\theta d\varphi = \frac{M}{V} \iint_{0\,0}^{2\pi\,\pi} \frac{p^5}{5}(1-\cos^2\theta)\sin\theta \Big\{_0^R d\theta d\varphi$$

$$I = \frac{M}{V}\int_0^{2\pi} \frac{R^5}{5}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Big\{_0^{\pi} d\theta = \frac{M}{V}\left(\frac{R^5}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right)(2\pi)$$

$$I = \frac{6M\pi}{4\pi R^3}\left(\frac{R^5}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{5}MR^2$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب



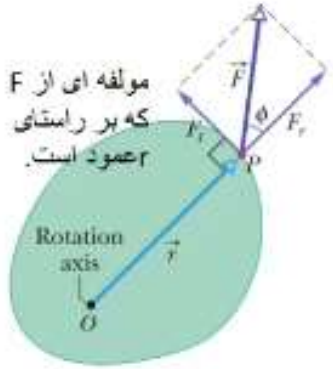
چون ذرات جسم صلب نسبت به یکدیگر ثابت اند بنابراین گشتاور نیروی وارد بر هر نقطه آن به تمام جسم صلب وارد می شود.

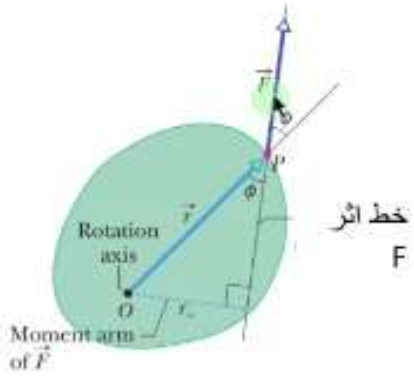
گشتاور نیروی وارد بر جسم صلب هم به نقطه اثر نیرو و جهت نیرو و مقدار نیرو بستگی دارد و با رابطه برداری زیر بیان می شود :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

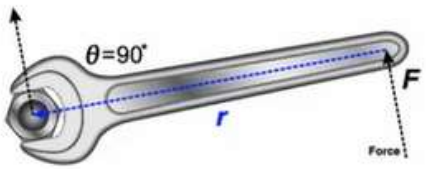
$$\tau = (r)(F \sin \phi)$$

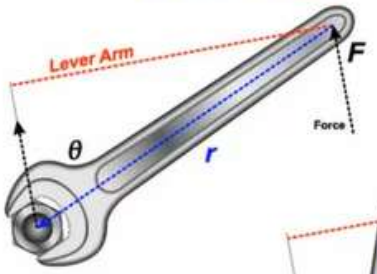
فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب





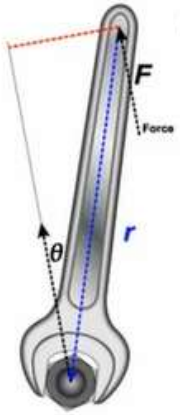
دینامیک دورانی



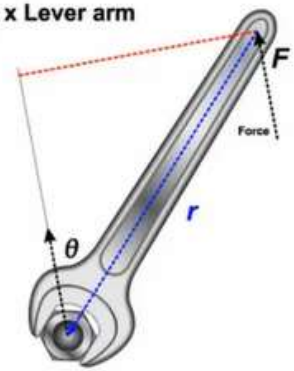


$$\tau = (r)(F\sin\phi) = rF_t$$

$$\tau = (r\sin\phi)(F) = r_\perp F$$



Torque = Force x Lever arm



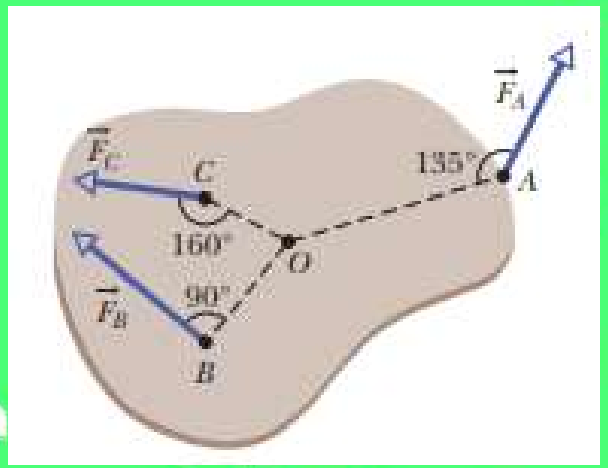
ذره‌ای که در دستگاه مختصات xyz حرکت می‌کند به نیرو وارد می‌شود. وقتی ذره دارای بردار مکان $\vec{r} = (۲/۰۰\,\mathrm{m})\hat{i}$ است نیرو برابر است با $\vec{F} = F_x\hat{i} - (۳/۰۰\,\mathrm{m})\hat{j} + (۲/۰۰\,\mathrm{m})\hat{k}$ و گشتاور نیروی مربوط نسبت به مبدأ برابر است با $\vec{\tau} = (۴/۰۰\,\mathrm{N.m})\hat{i} + (۲/۰۰\,\mathrm{N.m})\hat{j} - (۱/۰۰\,\mathrm{N.m})\hat{k}$. مقدار F_x + $(۷/۰۰\,\mathrm{N})\hat{j} - (۶/۰۰\,\mathrm{N})\hat{k}$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases} \vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \quad (m) \\ \vec{F} = F_x\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k} \quad (N) \end{cases} \rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \quad (N.m)$$

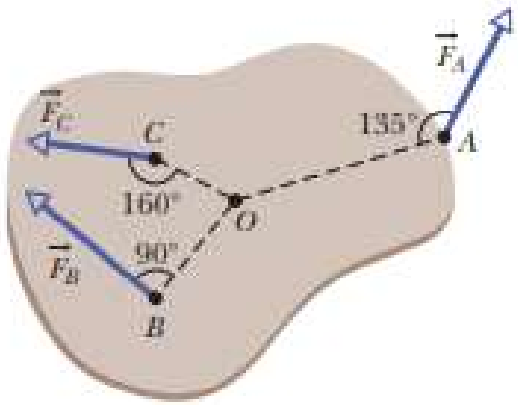
$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ F_x & 7 & -6 \end{vmatrix} = \hat{i}(\underbrace{18-14}_{4}) + \hat{j}(\underbrace{2F_x+12}_{2}) + \hat{k}(\underbrace{14+3F_x}_{-1})$$

$$\therefore \begin{cases} 2F_x + 12 = 2 \rightarrow F_x = -5 \\ 14 + 3F_x = -1 \rightarrow F_x = -5 \end{cases} \Rightarrow \underline{F_x = -5\ N}$$

جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۹ می‌تواند حول نقطهٔ O بچرخد، سه نیروی وارد برآن عبارت‌اند از: $F_A = ۱۰\,N$ در نقطهٔ A به فاصلهٔ $۸/۰\,m$ از نقطهٔ O ؛ $F_B = ۱۶\,N$ در نقطهٔ B به فاصلهٔ $۴/۰\,m$ از نقطهٔ O، $F_C = ۱۹\,N$ در نقطهٔ C به فاصلهٔ $۳/۰\,m$ از نقطهٔ O. گشتاور نیروی خالص حول نقطهٔ O چقدر است؟



فصل ۱۰ : لختی دورانی



$r_A = 8m$

$\odot \quad \tau_A = r_A F_A \sin 135^\circ = 8 \times 10 \times 0.707 \simeq 56.57 \ N.m$ (با قانون دست راست)

$r_C = 3m$

$\odot \quad \tau_C = r_C F_C \sin 19^\circ = 3 \times 19 \times 0.326 \simeq 19.4 \ N.m$

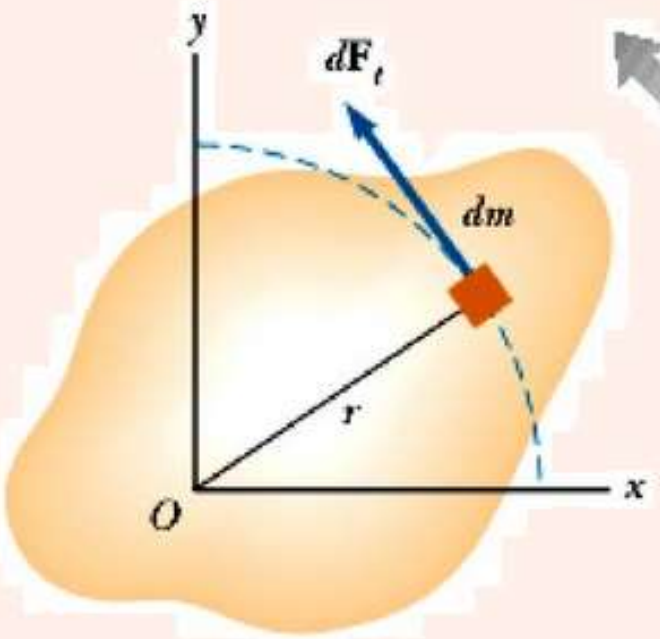
$r_B = 4m$

$\otimes \quad \tau_B = r_B F_B \sin 90^\circ = 4 \times 17 \times 1 = 68 \ N.m$

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_{i=A,B,C} \vec{\tau}_i \xrightarrow{\text{بردارها}} \odot \ \tau_{ext} = \tau_A + \tau_C - \tau_B$$

$$\therefore \odot \ \tau_{ext} = 12.06 \ N.m$$

رابطه بین گشتاور و شتاب زاویه ای



$$\tau = F_t r = (m a_t) r$$

$$\tau = (m r \alpha) r = (m r^2) \alpha$$

$$\vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

$$\sum \tau = I\alpha$$

اندازه و جهت گشتاور نیروی وارد بر جسم صلب همانند گشتاور نیروی وارد بر ذره است که تعریف شد.

رابطه گشتاور نیرو و شتاب زاویه ای به صورت زیر است .

فصل ۱۰ : انرژی جنبشی دوران و لختی دورانی

مفهوم فیزیکی لختی دورانی

جرم: با توجه به اینرسی معیاری از مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت انتقالی ذره است. نیرو عامل تغییر سرعت خطی است.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow \vec{F} = m\,\vec{a}$$

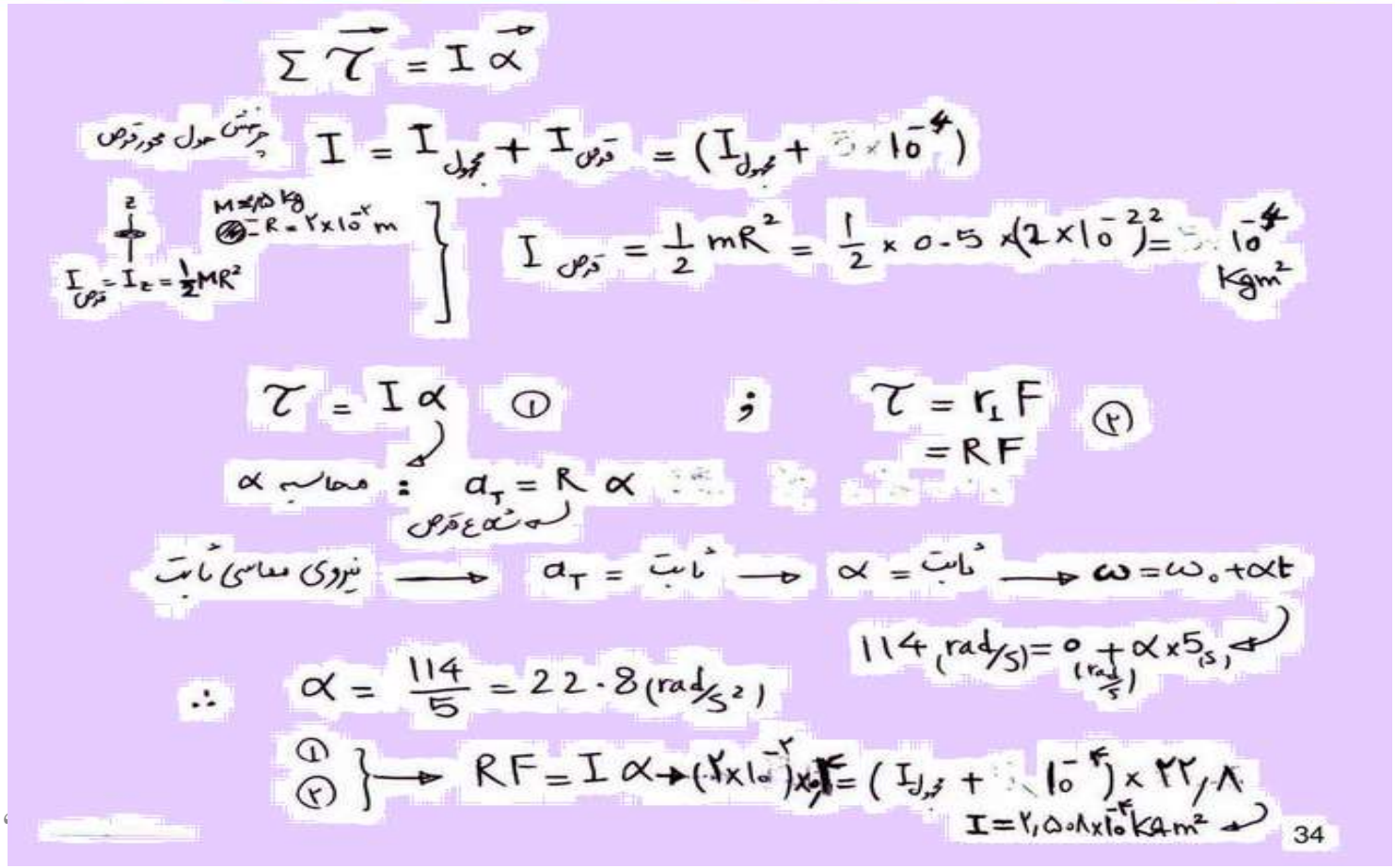
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \longrightarrow \vec{\tau} = I\,\vec{\alpha}$$

لختی دورانی: معیاری از مقاومت جسم در مقابل تغییر سرعت زاویه ای ذره است. گشتاور عامل تغییر سرعت زاویه ای است.

فصل ۱۰ : لختی دورانی

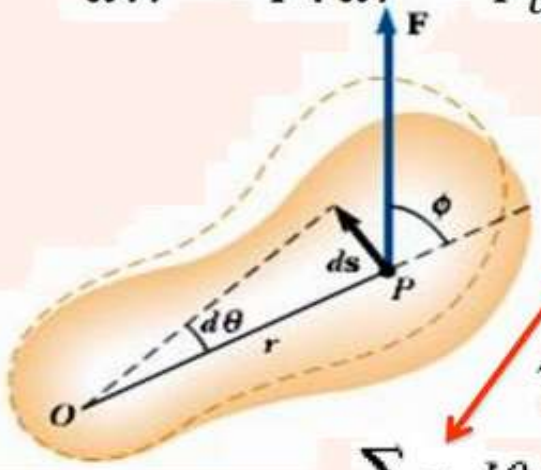
در شکل الف یک صفحهٔ پلاستیکی با شکل نامنظم و با ضخامت و چگالی (جرم در یکای حجم) یکنواخت را حول محوری که عمود بر صفحه است و از نقطهٔ O می‌گذرد بچرخش در می‌آوریم. لختی چرخشی صفحه حول این محور با روش زیر اندازه‌گیری می‌شود. یک قرص دایره‌ای به جرم $0/500kg$ و شعاع $2/00cm$ را به این صفحه می‌چسبانند، به طوری که مرکز آن با نقطهٔ O بر هم قرار گیرند (شکل ۱۰-۴۵ ب). ریسمانی را به دور لبهٔ این قرص مثل ریسمانی که دور فرفره‌ای پیچانده می‌شود می‌پیچانند. سپس نخ به مدت $5/00s$ کشیده می‌شود. در نتیجه، قرص و صفحه با نیروی ثابتی برابر $0/400N$ که مماس بر لبهٔ قرص است به‌چرخش در می‌آیند. تندی زاویه‌ای حاصل برابر $114 rad/s$ است. لختی چرخشی صفحه حول این محور چقدر است؟




$\Sigma \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$
چرخش حول محور قرص
$I = I_{\text{محور}} + I_{\text{قرص}} = (I_{\text{محور}} + \cdots \times 10^{-4})$
$M = 0.5\ kg$
$R = 2 \times 10^{-2}\ m$
$I_{\text{قرص}} = I_z = \frac{1}{2} MR^2$
$I_{\text{قرص}} = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times (2 \times 10^{-2})^2 = \cdots \times 10^{-4}\ kgm^2$
$\tau = I\alpha$ ①
$\tau = r_\perp F = RF$ ②
α محاسبه : $a_T = R\alpha$ شتاب مرکز قرص
نیروی مماسی ثابت ← a_T = ثابت ← α = ثابت ← $\omega = \omega_0 + \alpha t$
$114\ (rad/s) = 0\ (rad/s) + \alpha \times 5\ (s)$
$\therefore \alpha = \frac{114}{5} = 22.8\ (rad/s^2)$
① ② ← $RF = I\alpha \rightarrow (2 \times 10^{-2}) \times \cdots = (I_{\text{محور}} + \cdots \times 10^{-4}) \times 22.8$
$I = 2.08 \times 10^{-4}\ kg.m^2$
34

کار و انرژی جنبشی در حرکت دورانی

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = F_t\, dS + F_r\, dr == \underbrace{(F\ \sin\varphi)r}\, d\theta$$



$$dW = \tau\, d\theta$$

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

$$P = \tau\, \omega$$

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\,\omega$$

$$\sum \tau\, d\theta = dW = I\omega\, d\omega$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sum \tau\, d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^{\,2} - \frac{1}{2}I\omega_i^{\,2}$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

کمیتها و روابط سینماتیک و دینامیک در دو حرکت انتقالی و دورانی محض در جدول زیر آمده است. آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

Table 10-3 Some Corresponding Relations for Translational and Rotational Motion

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{net} = ma$	Newton's second law	$\tau_{net} = I\alpha$
Work	$W = \int F\,dx$	Work	$W = \int \tau\,d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

مثال ۳-

رابطهٔ $L=I\omega$ را که در جدول ۱۲ـ۲ آمده است، برای تکانهٔ زاویه‌ای جسم صلبی که حول محور ثابتی می‌چرخد به‌دست آورید.

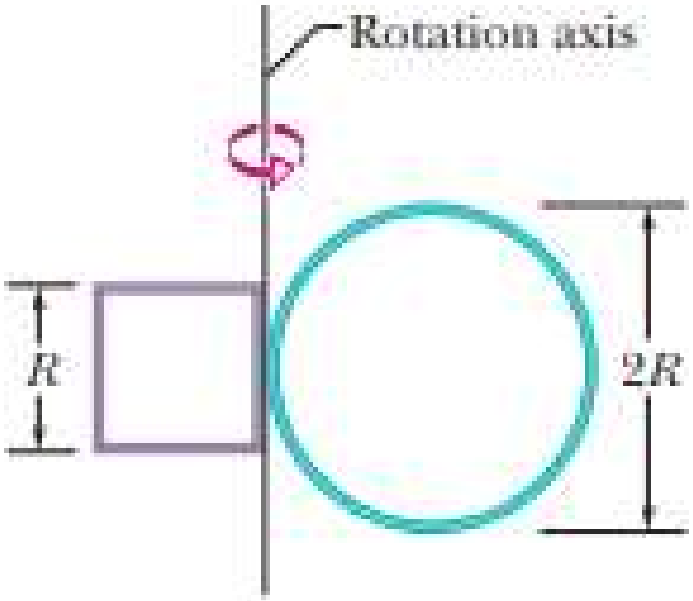
با استفاده از رابطهٔ نرده‌ای $\tau=I\alpha$ و از تعریف α (مساوی با $d\omega/dt$) می‌توانیم بنویسیم

$$\tau=I\alpha=I\left(\frac{d\omega}{dt}\right)=\frac{d(I\omega)}{dt}$$

$$\tau=\frac{dL}{dt}$$

با مقایسهٔ دو معادلهٔ بالا، رابطهٔ مورد نظر به‌راحتی به‌دست می‌آید

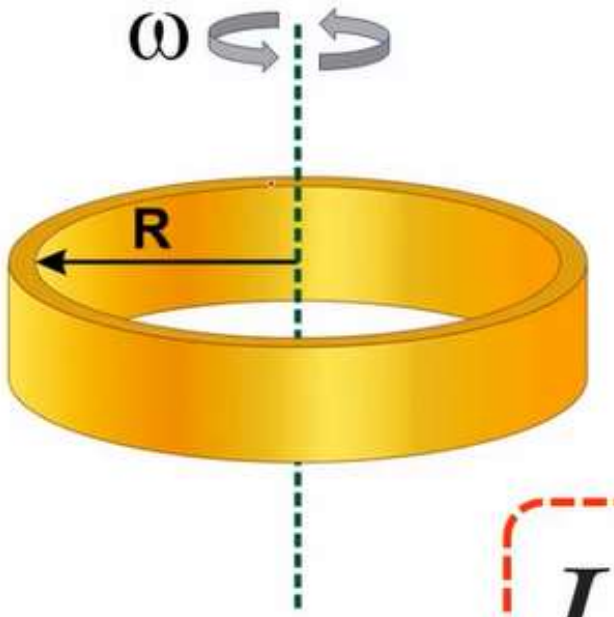
فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

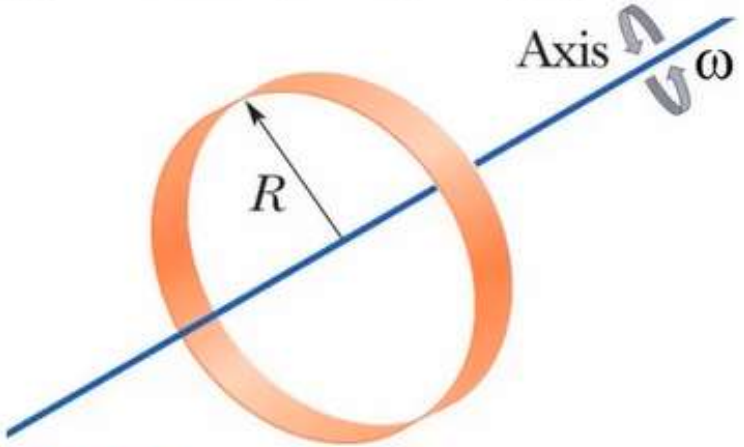


شکل ساختار صلبی شامل یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع R و جرم m و یک مربع به ضلع R و جرم m را که از چهار میلهٔ باریک ساخته شده است نشان می‌دهد. این ساختار صلب با تندی ثابتی حول محور قائم با دورهٔ متناوب $2/5\,s$ می‌چرخد. با فرض اینکه $R = 0/50\,m$ و $m = 2/0\,kg$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ (الف) لختی چرخشی این ساختار نسبت به محور چرخش و (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای آن نسبت به همان محور.

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

- لختی دورانی حلقه ای به شعاع R نسبت به محور گذرنده از مرکز حلقه

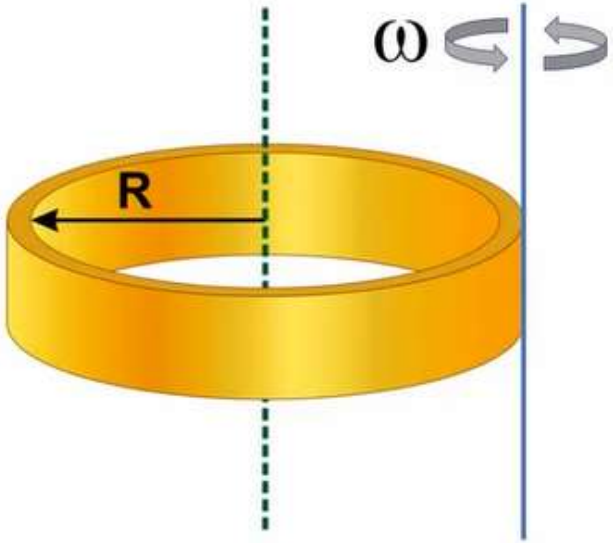




$$I = MR^2$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

- لختی دورانی حلقه ای به شعاع R نسبت به محوری که موازی با محور گذرنده از مرکز حلقه است و بر محیط حلقه مماس است.



(قضیه محور های موازی)

$$I = I_{com} + Mh^2$$

$$I = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

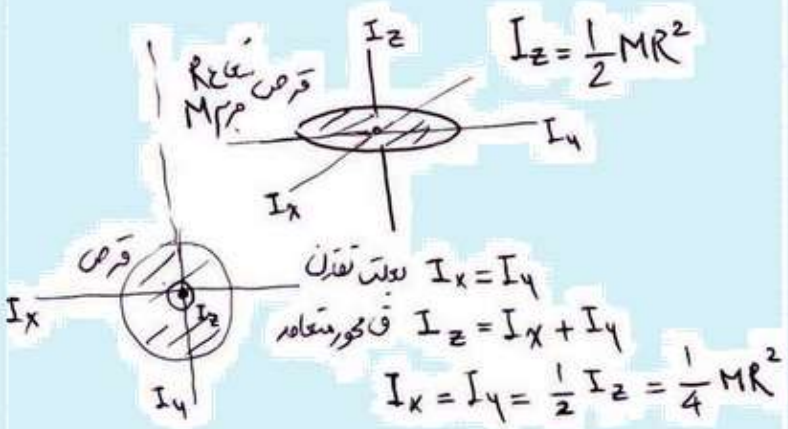
قضیه محورهای متعامد در محاسبه لختی دورانی

- برای هر سه محور دوراز دوبه دو عمود بر هم، مجموع لختی دورانی حول دو محور کوچکتر یا مساوی لختی دورانی حول محور سوم است.

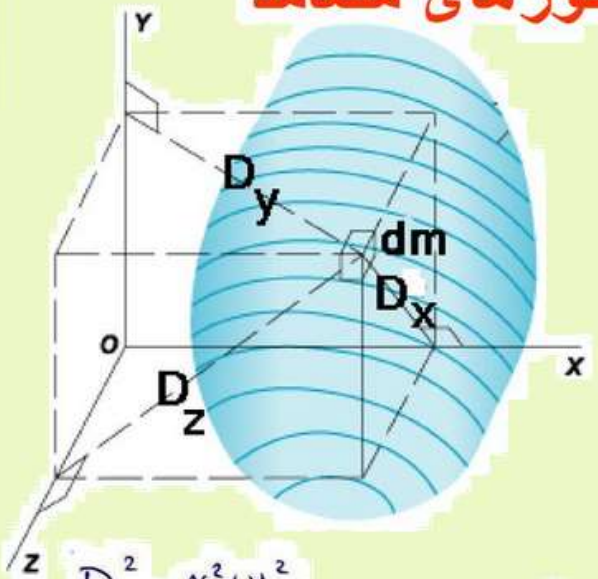
$$I_x + I_y \geq I_z$$

- اگر جسم در صفحه X-Y باشد:

$$I_x + I_y = I_z$$



اثبات قضیه محورهای متعامد



$$I_z = \int (dm)\, D_z^2$$

$$I_z = \int dm\,(x^2+y^2) = \int dm\,(x^2+z^2) + \int dm\,(y^2+z^2) + \int (-2z^2)\,dm$$

$$I_z = \int D_y^2\,dm + \int D_x^2\,dm - 2\int z^2\,dm$$

$$I_z + 2\int z^2\,dm = I_y + I_x$$

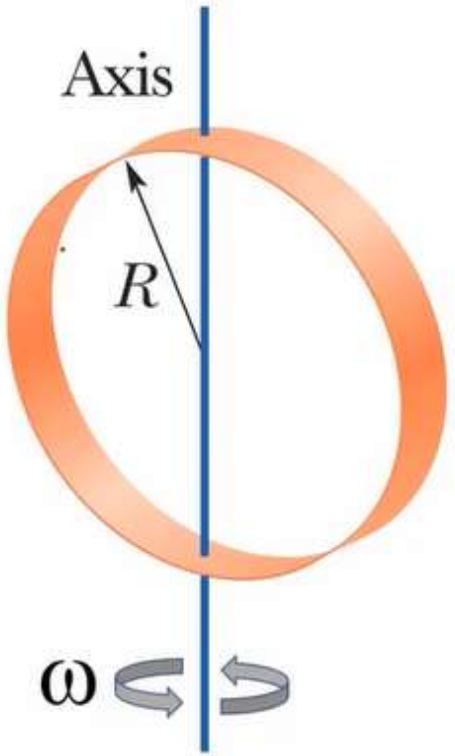
$$D_z^2 = x^2+y^2$$

$$D_x^2 = y^2+z^2$$

$$D_y^2 = x^2+z^2$$

$$\therefore I_z \le I_x + I_y \xrightarrow{\text{جسم تخت}} \begin{cases} z=0 \\ \text{صفحه } x\text{-}y \end{cases} \rightarrow I_z = I_x + I_y$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب



- لختی دورانی حلقه ای به شعاع R نسبت به یکی از قطر های آن

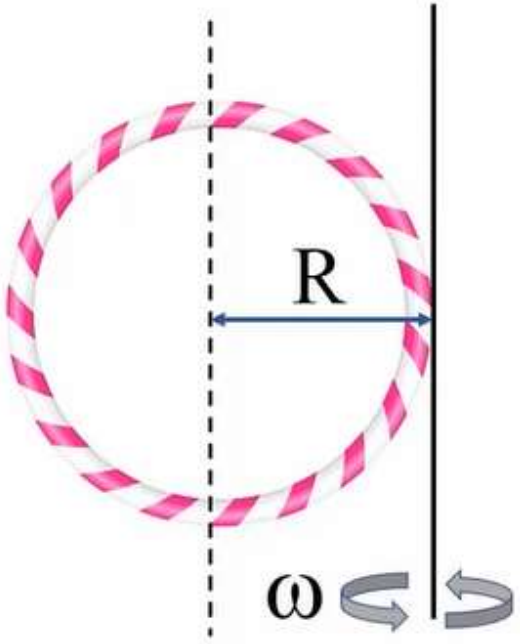
(قضیه محور های عمودی)

$$I_Z = I_X + I_Y$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

❑ لختی دورانی حلقه ای به شعاع R نسبت به محور موازی مماس بر محیط حلقه که با یکی از قطر های حلقه موازی است.

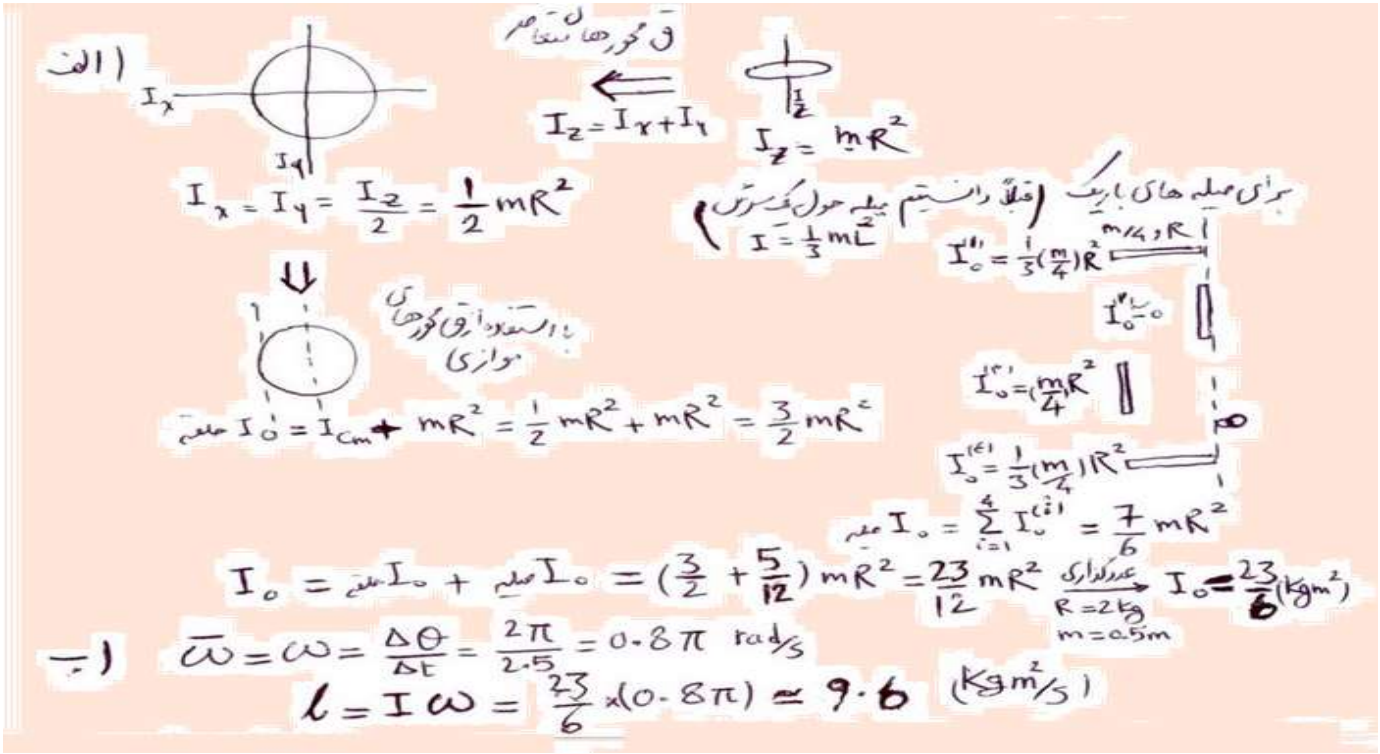


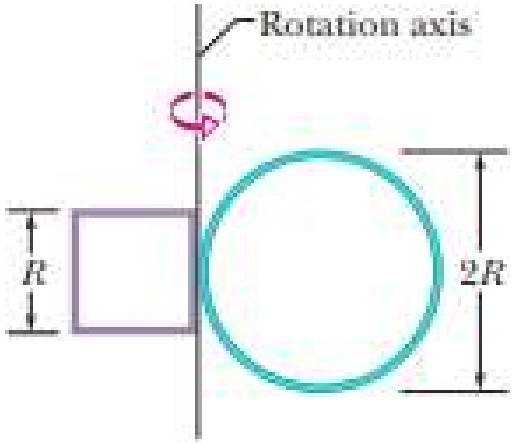
(قضیه محور های موازی)

$$I = I_{com} + Mh^2$$

$$I = \frac{۱}{۲}MR^۲ + MR^۲ = \frac{۳}{۲}MR^۲$$

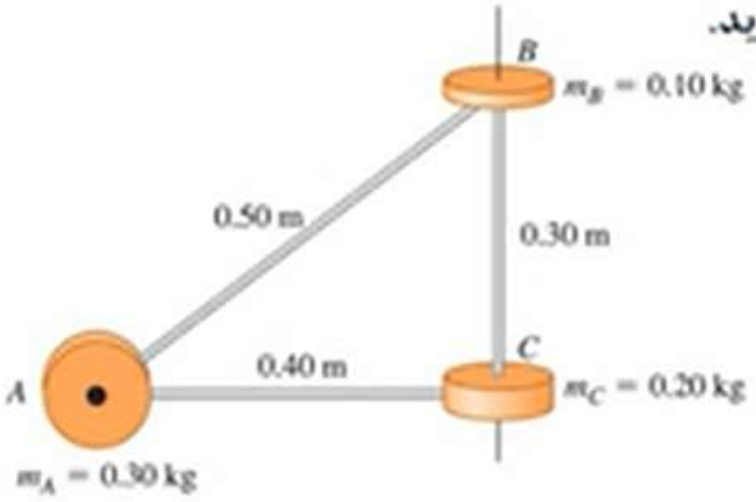
فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب





فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

یک قطعه ماشینی شامل ۳ دیسک است که از طریق ریل‌های سبک بهم متصل شده اند. لختی دورانی سیستم حول محوری که از مرکز دیسک A می گذرد را حساب کنید. حال اگر مجموعه با سرعت زاویه ای 4 rad/s حول محوری که از A می‌گذرد دوران کند انرژی جنبشی مجموعه را بدست آورید.



- حل : برای محاسبه لختی دورانی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

- چون محور دوران از نقطه A می‌گذرد بنابراین فاصله جسم A تا محور صفر است یعنی:
- داریم:

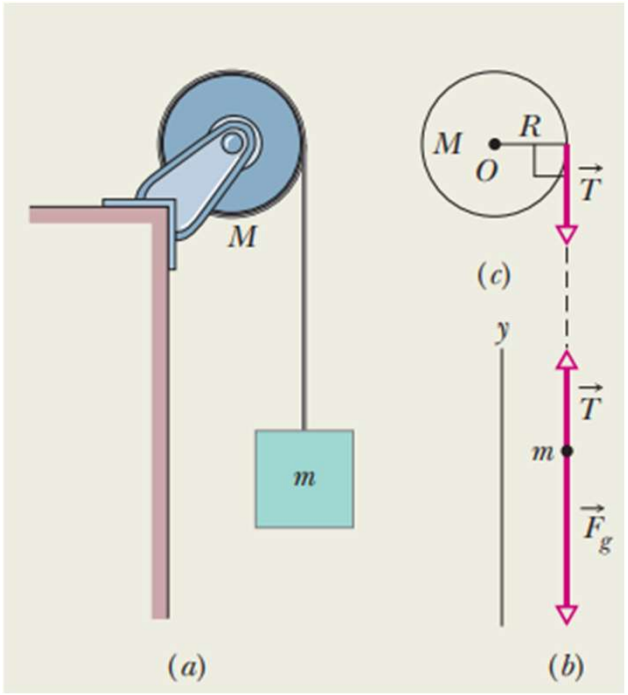
$$r_A = 0$$

$$I = m_B r_B^2 + m_C r_C^2 = (0.1)\times(0.5)^2 + (0.2)\times(0.4)^2 = 0.057\, kg.m^2$$

- اگر $\omega = 4\ \text{rad/s}$ باشد خواهیم داشت:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{1}{2} \times (0.057) \times (0.4)^2 = 0.46 J$$

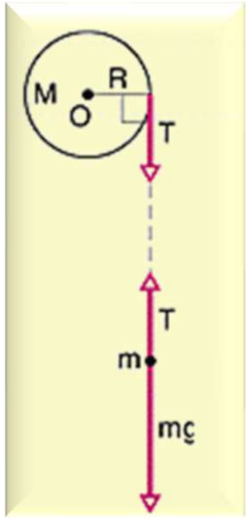
فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب



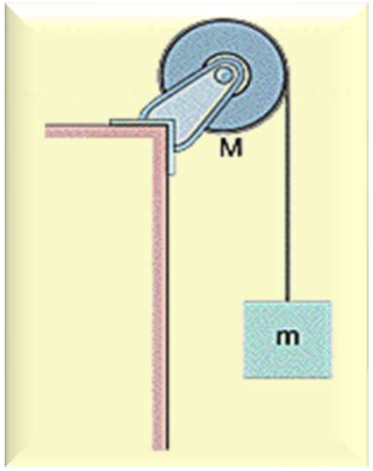
مثال: قرص یکنواختی به شعاع $R=20\ cm$ و جرم $M=2.5\ kg$ روی محوری شکل توسط ریسمان سبکی به جرم $m=1.2kg$ وصل است . ریسمان مطابق به دور چرخ پیچیده شده است و شتاب زاویه ای چرخ و شتاب مماسی نقطه ای از کناره آن و کشش طناب را بدست آورید.

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

حل:



$$T - mg = ma.$$
$$-TR = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha.$$
$$T = -\tfrac{1}{2}Ma.$$
$$a = -g\frac{2m}{M+2m} = -(9.8\ \text{m/s}^2)\frac{(2)(1.2\ \text{kg})}{2.5\ \text{kg} + (2)(1.2\ \text{kg})}$$
$$= -4.8\ \text{m/s}^2.$$
$$T = -\tfrac{1}{2}Ma = -\tfrac{1}{2}(2.5\ \text{kg})(-4.8\ \text{m/s}^2)$$
$$= 6.0\ \text{N}.$$
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4.8\ \text{m/s}^2}{0.20\ \text{m}} = -24\ \text{rad/s}^2.$$



مثال ۲- *نشان دهید که اصل پابستگی انرژی برای مثال ۱ برقرار است.*

حل:

انرژی پتانسیل جسم آویخته هنگام پایین رفتن به‌اندازهٔ U کم می‌شود

$$U = mgy$$

انرژی جنبشی به‌دست‌آمده برابر است با

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

که در آن v سرعت خطی جرم آویخته است. پس، باید ثابت کنیم که

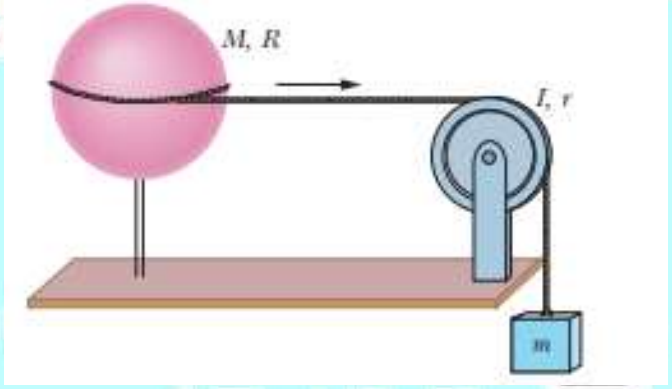
$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

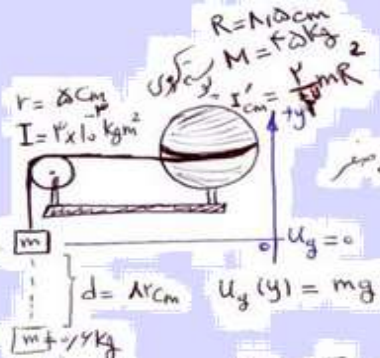
درحرکت خطی، که ازحالت سکون شروع می‌شود، داریم $v^2 = 2ay$. ازمثال $a = 2mg/(M+2m)$ به‌دست می‌آید. درنتیجه، داریم

$$mgy = \frac{mgv^2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{g}{a}\right) = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{M+2m}{2m}\right) = \frac{1}{4}(M+2m)v^2$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

پوستهٔ کروی یکنواختی به جرم $M = 45\ \text{kg}$ و شعاع $R = 8/5\ \text{cm}$ می‌تواند حول محوری قائم که روی یاتاقان بدون اصطکاکی (شکل ۱۰-۴۷) قرار دارد بچرخد. ریسمان بدون جرمی به دور استوای پوستهٔ کروی پیچیده شده و پس از عبور از روی قرقره‌ای با لختی چرخشی $I = 3/0\times10^{-3}\ \text{kg.m}^2$ و شعاع $r = 5/0\ \text{cm}$ به جسم کوچکی به جرم $m = 0/60\ \text{kg}$ متصل شده است. محور قرقره اصطکاک ندارد و ریسمان روی قرقره نمی‌لغزد. تندی جسم را وقتی به اندازهٔ $82\ \text{cm}$ از حالت سکون پایین آمد به دست آورید. از پایستگی انرژی استفاده کنید.





اگر محل اولیه قرار گرفتن جسم m را سطح انرژی پتانسیل صفر فرض کنیم با استفاده از پایستگی انرژی داریم:

$$E_i = E_f \rightarrow 0 = \left[\frac{1}{2}mv + U_g(-d)\right] + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}I'\omega'^2$$

$$(*)\quad 0 = -mgd + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

چون کره و استوانه را به دوران وا می‌دارد، سرعت خطی نقاط روی استوای کره با سرعت خطی نقاط لبه‌ی قرقره یکسان است:

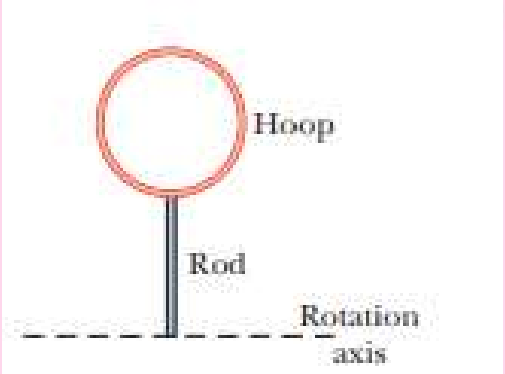
$$v = v' \rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{v}{r} \\ \omega' = \frac{v}{R} \end{cases} \quad r\omega = R\omega'$$

$$\begin{cases} d = 0/82\ \text{m} \\ R = 0/085\ \text{m} \\ r = 0/005\ \text{m} \\ I = 3\times10^{-3}\ \text{kgm}^2 \\ M = 45\ \text{kg} \\ m = 0/6\ \text{kg} \end{cases} \quad g = 10\ \text{m/s}^2$$

$$v = \sqrt{\frac{mgd}{\frac{I}{2r^2} + \frac{M}{3} + \frac{m}{2}}} \simeq 0.556\ \text{m/s}$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

مجموعهٔ صلبی شامل یک حلقهٔ نازک (به جرم m و شعاع $R = ۰/۱۵\ \text{m}$) و میلهٔ شعاعی نازکی (به جرم m و طول $L = ۲/۰۰R$) را نشان می‌دهد. این مجموعه به حالت قائم است، اما اگر ضربهٔ کوچکی به آن وارد کنیم می‌تواند حول محوری افقی در صفحهٔ میله و حلقه از انتهای پایین آن بچرخد. فرض کنید انرژی داده شده به این مجموعه در ضربهٔ اولیه ناچیز باشد، تندی زاویه‌ای این مجموعه حول محور چرخش وقتی از سمتگیری معکوس می‌گذرد چقدر است؟



$I_{حلقه} = mR^2$ — گشتاورهای متقاطع — $I_{Cm} = I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2}mR^2$

$I_{میله} = \frac{1}{12}mL^2$ — گشتاورهای موازی — $I_{O'} = \frac{1}{3}mL^2$

$h = 3R$, $L = 2R$

$$\begin{cases} I_{O'}^{حلقه} = I_{cm} + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m(3R)^2 = \frac{19}{2}mR^2 \\ I_{O'}^{میله} = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3}m(2R)^2 = \frac{4}{3}mR^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow I_{O'} = I_{O'}^{میله} + I_{O'}^{حلقه} = \frac{65}{6}mR^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$F_R = mg$ — نیروی وارد بر مرکز جرم حلقه — $\rightarrow \otimes\ \tau_R = hF_R \sin\theta = 3Rmg\sin\theta$

$F_B = mg$ — نیروی وارد بر مرکز جرم میله — $\rightarrow \otimes\ \tau_B = RF_B \sin\theta = Rmg\sin\theta$

(کسر افزایش θ)

$$\otimes\ \tau = \tau_R + \tau_B = 4mgR\sin\theta$$

فصل ۱۰: دینامیک دورانی جسم صلب

$$\otimes \quad \tau = \tau_R + \tau_B = 4mgR \sin\theta$$

$$\Delta K = W \Rightarrow \frac{1}{2} I_{o'} \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_{o'} \omega_i^2 = \int_{\theta_i=0}^{\theta_f=\theta} \tau \, d\theta$$

$$\frac{1}{2} I_{o'} \omega(\theta) = \int_0^{\theta} (4mgR) \sin\theta \, d\theta = 4mgR \left(-\cos\theta\Big|_0^{\theta}\right)$$

$$\omega(\theta) = \frac{8mgR}{I_{o'}} (1 - \cos\theta) = \frac{48}{65} \frac{g}{R} (1 - \cos\theta)$$

$$\xrightarrow[R=0.15\,m]{g \simeq 10\,m/s^2} \omega(\pi) = \frac{48}{65} \times \frac{10}{0.15} \times 2 = 98.46 \ rad/s$$



فصل ۱۱: دینامیک دورانی
جسم صلب ۲

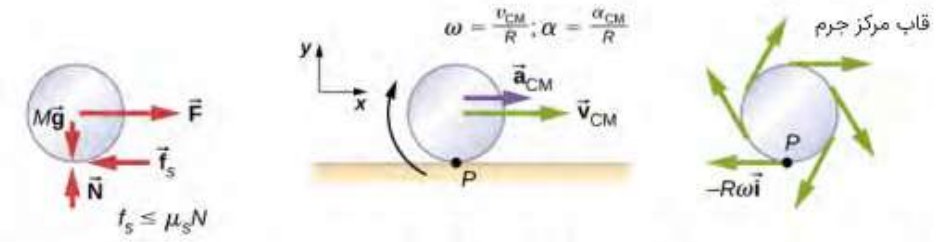
فصل ۱۱: جسم غلتان



اتومبیلی را روی سطح یک جاده در نظر بگیرید. هنگامی که راننده گاز را تا انتها فشار می‌دهد، به گونه‌ای که چرخ‌ها بدون اینکه اتومبیل به جلو حرکت کند بچرخند، بین چرخ‌ها و سطح جاده **اصطکاک** جنبشی به وجود می‌آید. اگر راننده گاز را آهسته فشار دهد و موجب حرکت اتومبیل به سمت جلو شود، آن‌گاه چرخ‌ها بدون لغزش می‌غلتند. در حقیقت، پایین چرخ نسبت به کف زمین ساکن است که نشان‌دهنده وجود اصطکاک ایستایی بین چرخ‌ها و سطح جاده خواهد بود.

فصل ۱۱: جسم غلتان

شکل زیر یک چرخ در حال حرکت را نشان می‌دهد. پایین چرخ‌ها اندکی تغییر شکل می‌دهند، اما نمی‌لغزند و نسبت به سطح جاده به ازای یک بازه زمانی ساکن هستند. بنابراین، باید بین چرخ و سطح جاده اصطکاک ایستایی وجود داشته باشد.



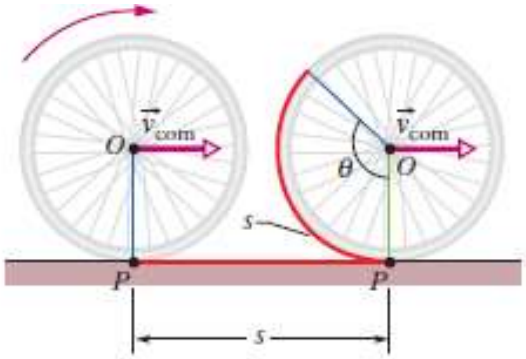
(الف) نیروهای وارد بر چرخ

(ب) غلتش بدون لغزش

(ج) نقطه P نسبت به مرکز جرم چرخ دارای سرعت برداری منفی است.

جسم غلتان

چرخ توسط نیروی $\vec{F}$ روی یک سطح افقی می‌غلتد. برای اینکه از لغزش چرخ جلوگیری شود، نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ ($|\vec{f}_s| \leq \mu_s N$) باید به اندازه کافی بزرگ باشد. بردارهای سرعت و شتاب خطی مرکز جرم هم‌جهت‌اند و نقطه P نسبت به سطح ساکن است. سرعت خطی در نقطه P نسبت به قاب مرکز جرم (CM) برابر است با $-R\omega\hat{i}$ که در آن، R شعاع چرخ و ω **سرعت زاویه‌ای** چرخ حول محور آن است.



جسم غلتان

از آن‌جایی که چرخ در حال غلتش است، سرعت نقطه P نسبت به سطح برابر است با سرعت آن نسبت به مرکز جرم به علاوه سرعت مرکز جرم نسبت به سطح:

$$\vec{v}_P = -R\omega\hat{i} + v_{CM}\hat{i}.$$

سرعت نقطه P نسبت به سطح برابر با صفر است ($v_p = 0$). از این رو، داریم:

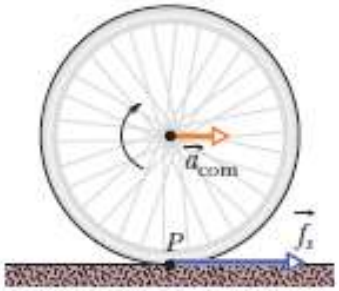
$$v_{CM} = R\omega.$$

رابطه (۱)

بنابراین، سرعت مرکز جرم چرخ برابر است با شعاع چرخ در **سرعت زاویه‌ای** حول محور آن. این رابطه ارتباط بین متغیر خطی (طرف چپ) و متغیر زاویه‌ای (طرف راست) را نشان می‌دهد.

بنابراین، سرعت مرکز جرم چرخ برابر است با شعاع چرخ در **سرعت زاویه‌ای** حول محور آن. این رابطه ارتباط بین متغیر خطی (طرف چپ) و متغیر زاویه‌ای (طرف راست) را نشان می‌دهد.

اگر از رابطه (۱) نسبت به زمان **مشتق** بگیریم، شتاب خطی مرکز جرم به دست می‌آید. R یک ثابت است و از آن‌جایی که $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$، داریم:



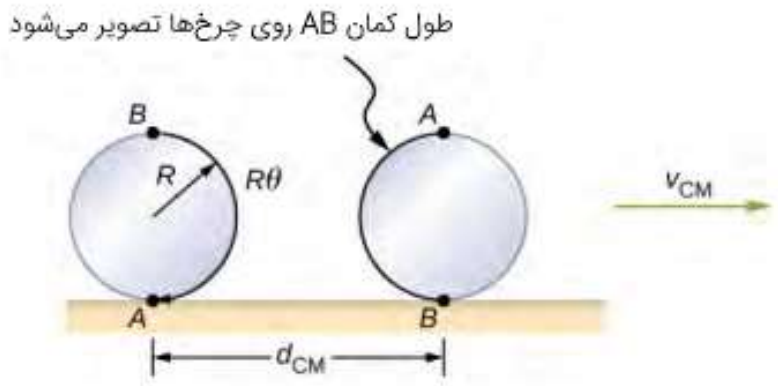
$$a_{CM} = R\alpha.$$

رابطه (۲)

مسافت پیموده شده توسط چرخ را می‌توان با استفاده از شکل زیر برحسب متغیرهای زاویه‌ای به دست آورد. هنگامی که چرخ از نقطه A تا نقطه B می‌غلتد، سطح بیرونی آن دقیقاً همان مسافتی که پیموده شده است را روی زمین تصویر می‌کند که برابر است با d_{CM}. از طرف دیگر، طول سطح بیرونی (کمان AB) برابر با $R\theta$ است. بنابراین، خواهیم داشت:

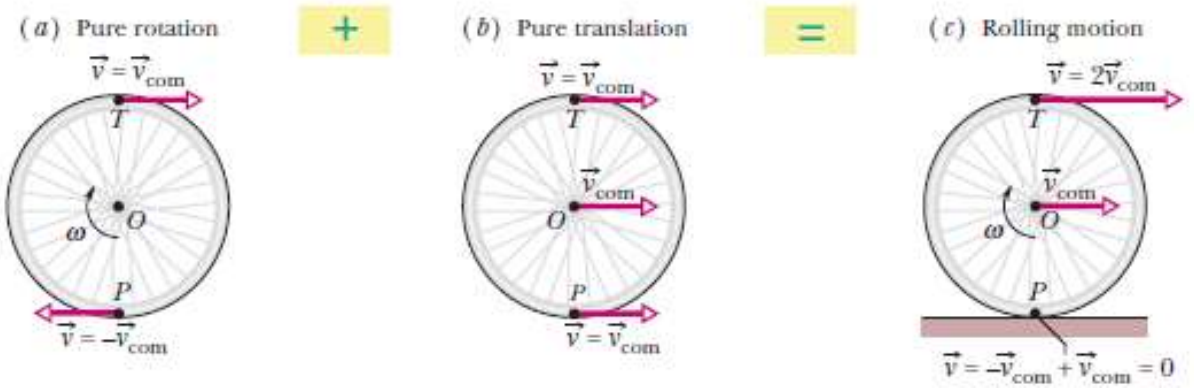
$$d_{CM} = R\theta.$$

رابطه (۳)

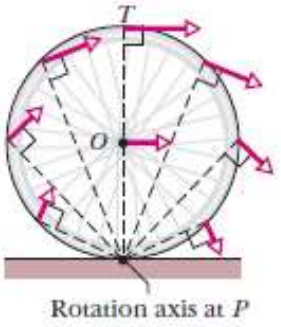


فصل ۱۱: دینامیک دورانی جسم صلب ۲

حرکت یک جسم غلتان می توان به صورت ترکیبی از حرکت انتقالی مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم در نظر گرفت



جسم غلتان



$$v_{top} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{com},$$

در حرکت غلتشی انرژی جنبشی کل برابر است با انرژی جنبشی نسبت به مرکز جرم +انرژی جنبشی مرکز جرم

$$I_P = I_{\text{com}} + MR^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2 + \tfrac{1}{2}MR^2\omega^2$$

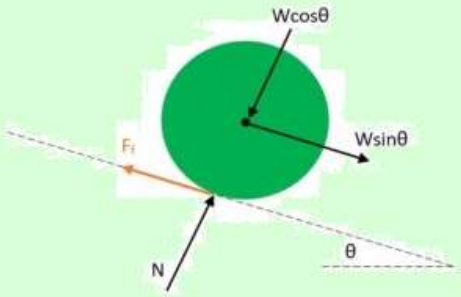
$$K = \tfrac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2.$$

تفاوت اصطکاک لغزشی و اصطکاک غلتشی

تعاریف مرسوم همگی مربوط به اصطکاک لغزشی است، یعنی هنگامی که جسمی روی یک سطح در حال لغزیدن است. در حالی که نوع دیگری از اصطکاک هم وجود دارد که در هنگام حرکت غلتشی یک جسم به وجود می‌آید که آن را اصطکاک غلتشی می‌نامند.

به طور کلی تفاوت‌های اصلی دو نیروی اصطکاک لغزشی و غلتشی بدین صورت است:

- ✓ اصطکاک لغزشی در اثر لغزش دو سطح روی یکدیگر به وجود می‌آید، در حالی که اصطکاک غلتشی در حین غلتش یک سطح به وجود می‌آید.
- ✓ منشأ اصطکاک لغزشی پستی و بلندی‌های میکروسکوپی سطح است، اما منشأ اصطکاک غلتشی تغییر شکل سطوح حین غلتش است.



دیاگرام جسم آزاد برای حرکت غلتشی یک دیسک روی سطح شیبدار

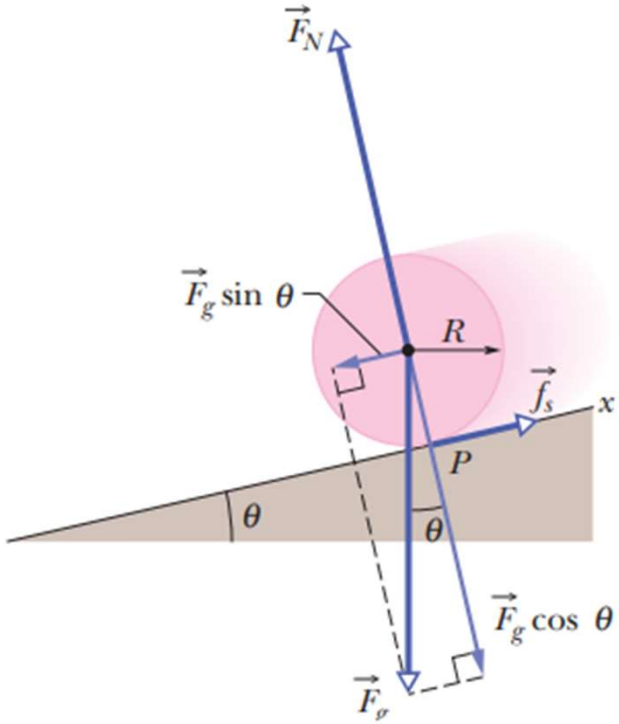
ضریب اصطکاک لغزشی خیلی به عوامل خارجی وابسته نیست و عموماً به ویژگی‌های سطح بستگی دارد (و به همین دلیل معمولاً آن را ثابت در نظر می‌گیرند)، اما ضریب اصطکاک غلتشی به عواملی چون شعاع جسم در حال غلتش، میزان فرورفتگی دو جسم، سختی سطح و بسیاری عوامل دیگر وابسته است.

با توجه به موارد فوق، می‌توان دریافت که الزاماً نمی‌توان رابطه ریاضی ساده‌ای همانند اصطکاک لغزشی برای اصطکاک غلتشی نیز ارائه داد. لذا عموماً در مکانیک کلاسیک نیوتنی برای محاسبه نیروی اصطکاک غلتشی به طور غیرمستقیم و از طریق نوشتن قوانین نیوتن استفاده می‌شود.

تفاوت اصطکاک لغزشی و اصطکاک غلتشی

البته نکته بسیار مهم و جالب این است که برای یک وزن مشخص، نیروی اصطکاک غلتشی به مراتب کمتر از نیروی اصطکاک لغزشی است. به همین دلیل است که به طور مثال اگر بخواهیم یک جعبه را روی سطح زمین جابجا کنیم، حرکت دادن آن وقتی بر روی یک گاری قرار دارد به مراتب راحت تر از حالتی است که مستقیماً بخواهیم آن را هل بدهیم! در واقع فهم تجربی همین مسئله بود که باعث اختراع چرخ توسط اجداد ما شد، که یک اختراع بسیار تأثیرگذار در تاریخ بشریت بود.





مثال: *استوانه تو پری از یک سطح شیب دار به پایین می غلتد سرعت مرکز جرم را در پایین سطح شیبدار پیدا کنید.*

(الف) شتاب این استوانه چقدر است؟ (ب) برای اینکه استوانه نلغزد، ضریب اصطکاک ایستایی باید در چه شرطی صدق کند؟

حل:

برای حل این مسئله می‌توان از اصل پایستگی انرژی استفاده کرد

$$Mgh=\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2}Mv^2$$

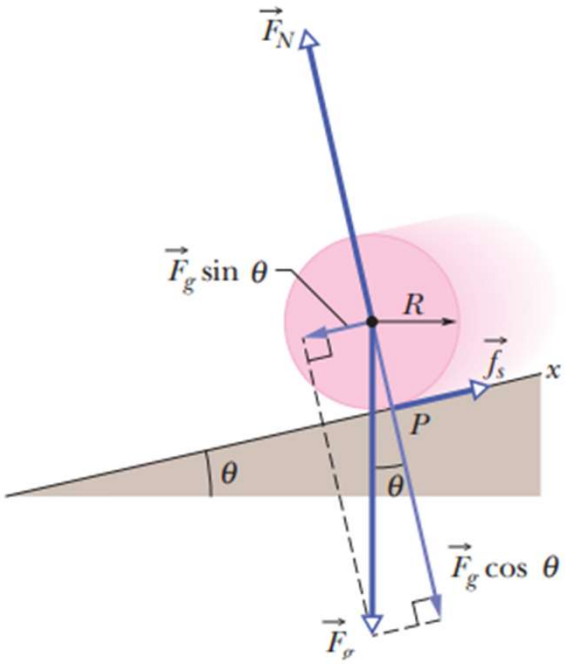
که در آن v سرعت خطی مرکز جرم و ω سرعت زاویه‌ای حول مرکز جرم در پایین سطح شیبدار است.

$$\omega=\frac{v}{R} \quad و \quad I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$$

$$Mgh=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{2}Mv^2=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)Mv^2$$

$$v^2=\frac{4}{3}gh \Longrightarrow v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

مثال قبل را با استفاده از روش انرژی حل کردیم
.اکنون آن را با استفاده از روش دینامیکی حل کنید



حل:

حرکت انتقالی یك جسم با این فرض‌که تمام نیروهای خارجی به‌مرکز جرم آن وارد می‌شوند به‌دست می‌آید. با استفاده ازقانون دوم نیوتون، داریم

برای حرکت عمود برسطح شیبدار $N - Mg\cos\theta = 0$

برای حرکت درامتداد سطح شیبدار $Mg\sin\theta - f = Ma$

حرکت دورانی حول مرکز جرم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tau = I_{cm}\alpha$$

$\mathbf{N}$ و Mg، هیچکدام نمی‌توانند موجب حرکت دورانی جسم حول C شوند، زیرا امتداد آنها از C می‌گذرد و بازوی‌گشتاورآنها صفراست. بازوی گشتاورنیروی اصطکاك نسبت به C برابر است با R، بنابراین داریم

حل:

$$fR = I_{cm}\alpha \quad \alpha = \frac{a}{R} \quad و \quad I_{cm} = \frac{۱}{۲}MR^{۲}$$

$$f = \frac{I_{cm}\alpha}{R} = \frac{Ma}{۲}$$ در نتیجه

با قراردادن این مقدار درمعادلهٔ دوم حرکت انتقالی، داریم

$$a = \frac{۲}{۳}g\sin\theta$$

ادامه حل:

مرکز جرم با شتاب خطی ثابت حرکت می‌کند. برای به‌دست‌آوردن سرعت مرکز جرم، که از حالت سکون شروع به‌حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم

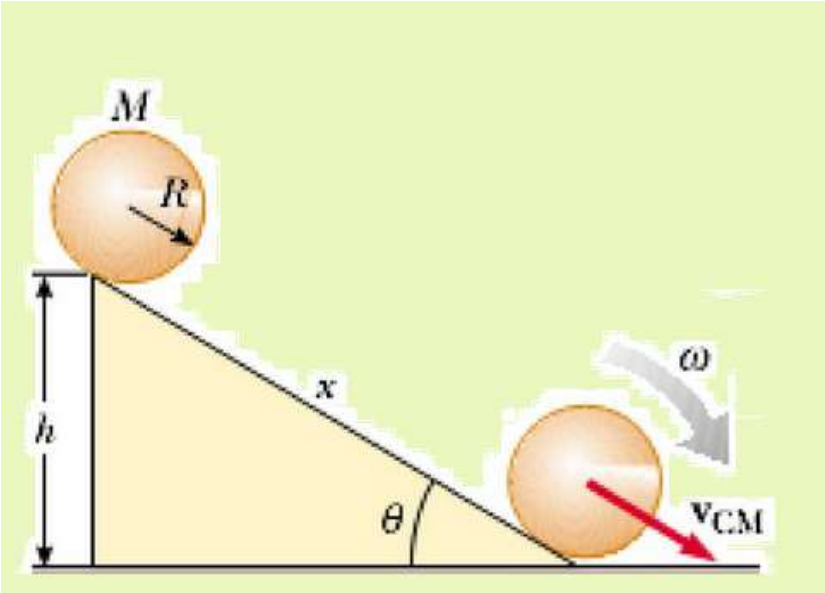
$$v^2 = 2as$$

پس

$$v^2 = 2\left(\frac{2}{3} g \sin\theta\right)s = \frac{4}{3} g \frac{h}{s} s = \frac{4}{3} gh$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

جسم غلتنده بر روی سطح شیبدار



$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \left(\frac{v_{CM}}{R} \right)^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2$$

$v_{CM} = R\omega$ for pure rolling motion

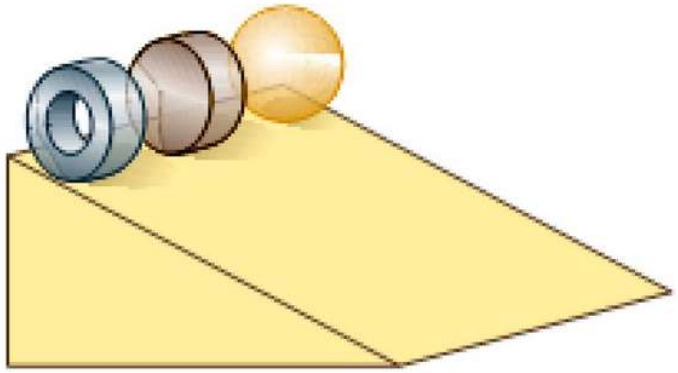
$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2 = Mgh$$

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + I_{CM}/MR^2} \right)^{1/2}$$

$$h = x \sin\theta \; ; \; V_{cm}^{\;2} = 2 a_{CM} \, x$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin\theta}{\left(1 + \dfrac{I_{CM}}{MR^2} \right)}$$

یك كره ویك استوانه، كه جرم وشعاع آنها مساوی است، ازحالت سكون شروع به‌حركت می‌كنند و ازیك سطح شیبدار به‌پایین می‌غلتند. كدام یك زودتر به‌پایین سطح می‌رسد؟



$$a_{CM} = \frac{g \sin\theta}{\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right)}$$

حل:

$$a_{com,x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{com}/MR^2}.$$

I_{cm} برای کره مساوی با $(۲/۵)MR^۲$ است. با استفاده ازروش دینامیکی داریم

حرکت انتقالی مرکز جرم $Mg\sin\theta - f = Ma$

حرکت دورانی حول مرکز جرم $fR = I_{cm}\alpha = \left(\frac{۲}{۵}MR^۲\right)\left(\frac{a}{R}\right)$

و ازآنجا برای کره داریم

$$a = \frac{۵}{۷}g\sin\theta \quad و \quad f = \frac{۲}{۵}Ma$$

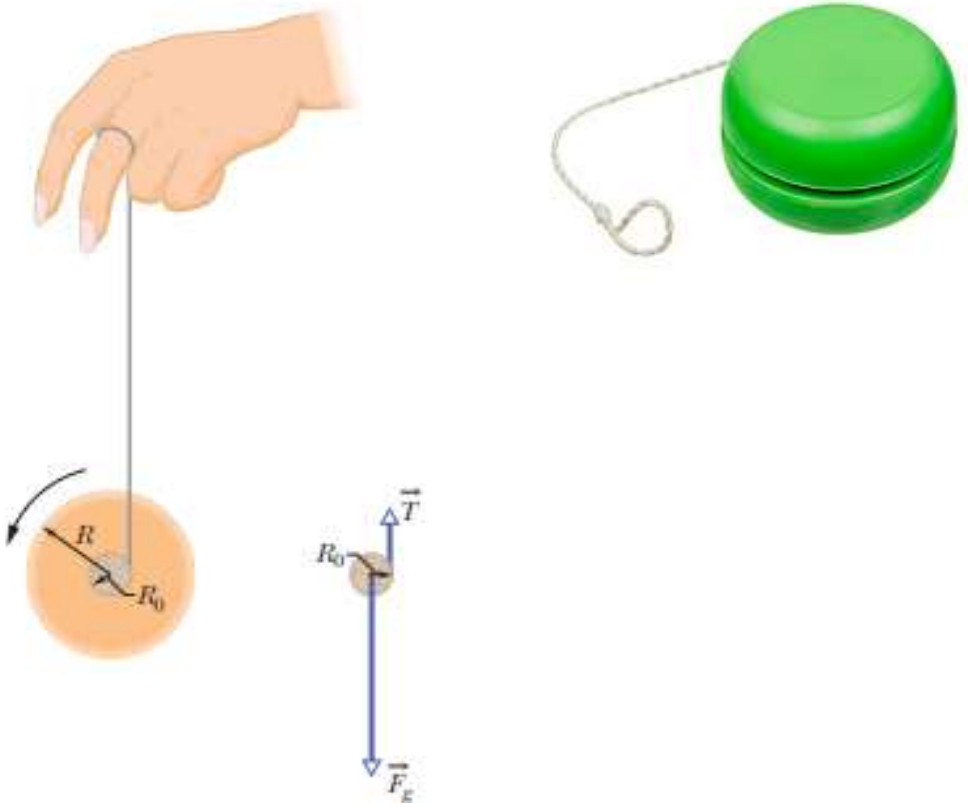
و برای استوانه، داریم

$$a = \frac{۲}{۳}g\sin\theta$$

پس شتاب مرکز جرم کره درتمام لحظات ازشتاب مرکز جرم استوانه بیشتر است. چون هر دوجسم ازحالت سکون و به‌طور همزمان شروع به‌حرکت می کنند، کره زودتر به‌پایین سطح می‌رسد.

فصل ۱۱ - یو یو

شتاب مرکز جرم یک یو یو را بدست آورید؟



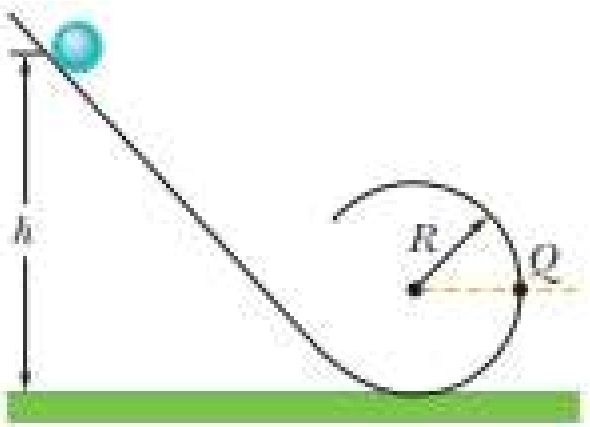
$$\sum F_y : ma = mg - T$$

$$\sum \tau_{cm} : I_{cm}\alpha = mr_0 T$$

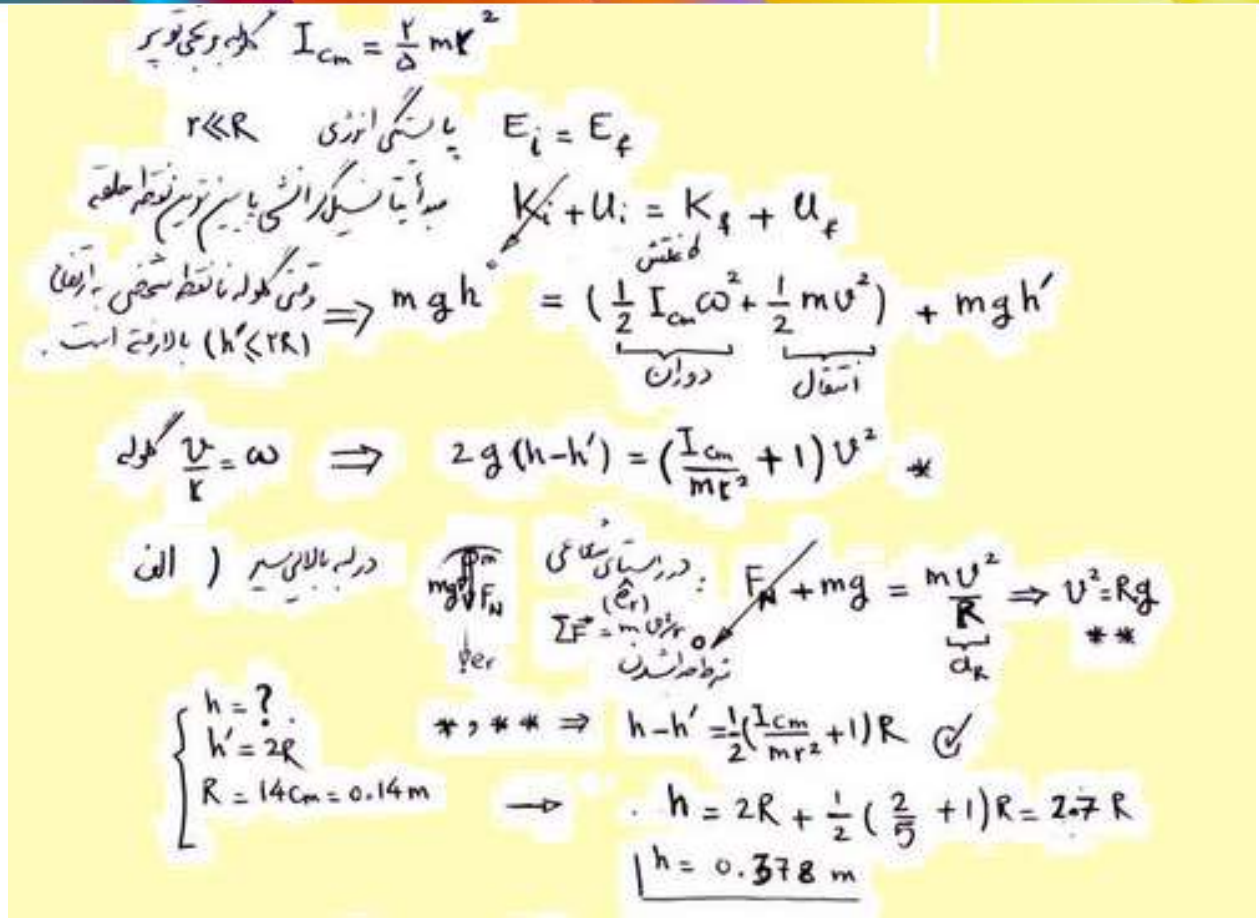
$$\alpha = \frac{a}{r_0}$$

$$a = \left(\frac{1}{1 + I_{cm}/mr_0^2}\right) g$$

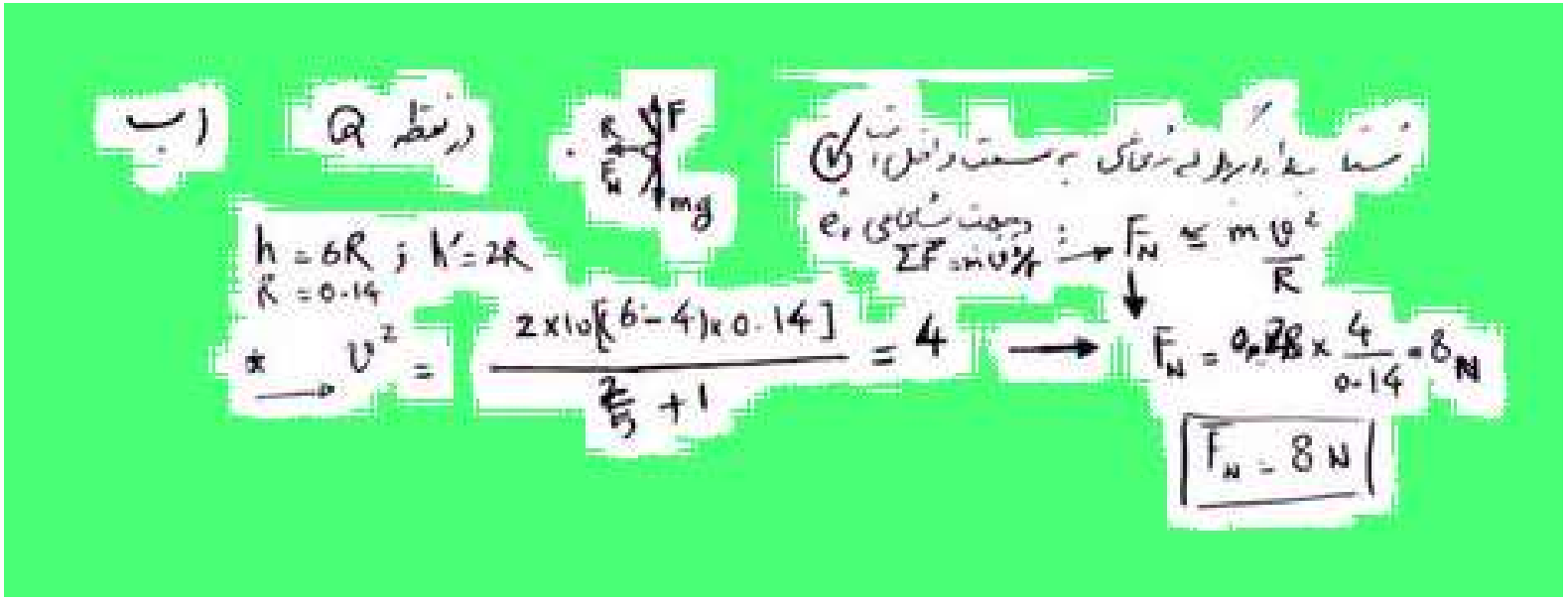
$$T = \left(\frac{I_{cm}/mr_0^2}{1 + I_{cm}/mr_0^2}\right) mg$$



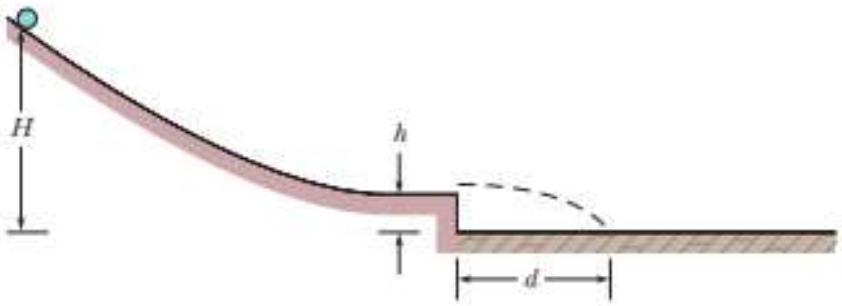
در شکل یک گلولهٔ برنجی توپر به جرم $0/280\,g$ از حال سکون در طول یک مسیر مستقیم رها می‌شود و به طور هموار در یک مسیر مارپیچ مانند می‌غلتد. شعاع این مارپیچ دایره‌ای برابر $R = 14/0\,cm$ و شعاع گلوله $r \ll R$ است. (الف) در صورتی که گلوله به لبهٔ بالایی مسیر دایره‌ای برسد و سپس از آن جدا شود مقدار h را به دست آورید. اگر گلوله از ارتفاع $h = 6/00R$ رها شود، مطلوب است محاسبهٔ (ب) بزرگی و (پ) جهت مؤلفهٔ نیروی افقی وارد بر گلوله در نقطهٔ Q؟


$I_{cm} = \frac{2}{5} mr^2$
$r \ll R$
$E_i = E_f$
$K_i + U_i = K_f + U_f$
$mgh = (\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2) + mgh'$
$\frac{v}{r} = \omega \Rightarrow 2g(h-h') = (\frac{I_{cm}}{mr^2} + 1)v^2$ *
$F_N + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = Rg$ **
$h = ?$
$h' = 2R$
$R = 14cm = 0.14m$
$h - h' = \frac{1}{2}(\frac{I_{cm}}{mr^2} + 1)R$
$h = 2R + \frac{1}{2}(\frac{2}{5} + 1)R = 2.7R$
$h = 0.378\ m$

فصل ۱۱: ترکیب حرکتهای انتقالی ودورانی یک جسم صلب

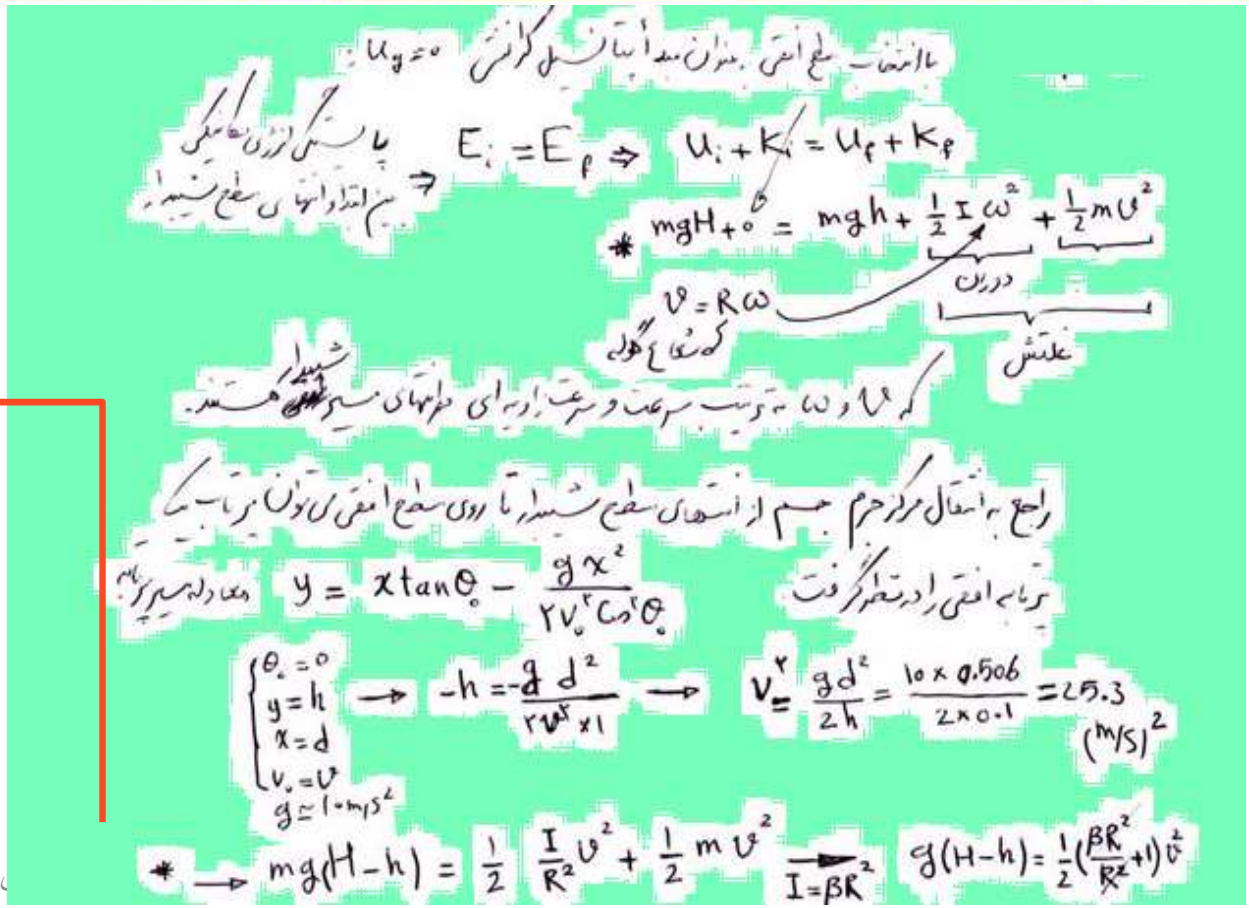


فصل ۱۱: ترکیب حرکتهای انتقالی ودورانی یک جسم صلب



جسم استوانه‌ای غیر یکنواخت. در شکل ۱۱-۳۸ جسمی به شکل استوانه به جرم M و شعاع R به طور هموار از حال سکون به طرف پایین سطح شیبداری می‌غلتد. سپس از سطح شیبدار جدا و وارد یک سطح افقی می‌شود و روی این سطح مسافت افقی $d = ۰/۵۰۶\,\mathrm{m}$ را نسبت به انتهای سطح شیبدار می‌پیماید. ارتفاع اولیهٔ جسم $H = ۰/۹۰\,\mathrm{m}$ است و انتهای سطح شیبدار در ارتفاع $h = ۰/۱۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد. این جسم تشکیل شده از یک پوستهٔ استوانه‌ای خارجی (با چگالی یکنواخت و معین) که به یک استوانه مرکزی (با چگالی یکنواخت ولی متفاوت) چسبیده است. لختی چرخشی جسم را می‌توان به صورت کلی $I = \beta M R^2$ نشان داد ولی β در اینجا همانند استوانه‌ای با چگالی یکنواخت برابر ۰/۵ نیست. β را حساب کنید.

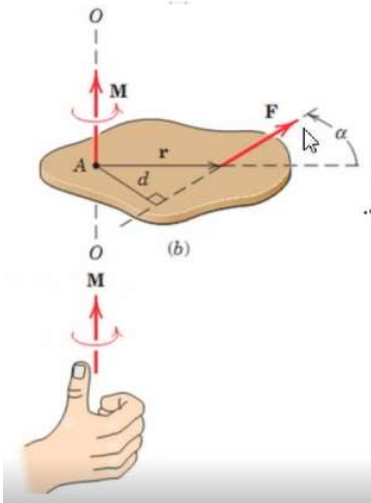
فصل ۱۱: ترکیب حرکتهای انتقالی ودورانی یک جسم صلب



$$\beta = \frac{2g(H-h)}{v^2} - 1 \Rightarrow \beta = \frac{2 \times 10 \times (0.9 - 0.1)}{25.3} \simeq 0.63$$

$$\boxed{\beta \simeq 0.63}$$

فصل ۱۱: مروری بر مفهوم گشتاور نیرو در سه بعد



ضرب برداری

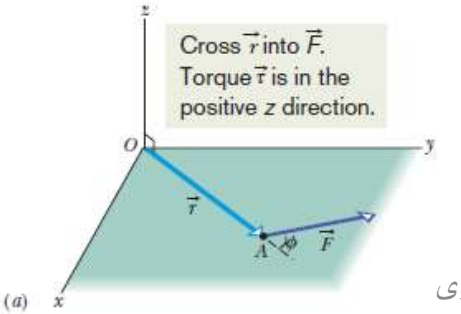
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

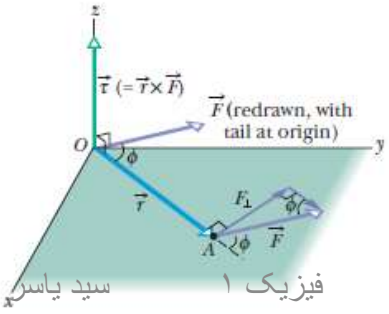
r برداری است که نقطه مرجع A را به نقطه دلخواهی از خط اثر نیروی F متصل می کند.

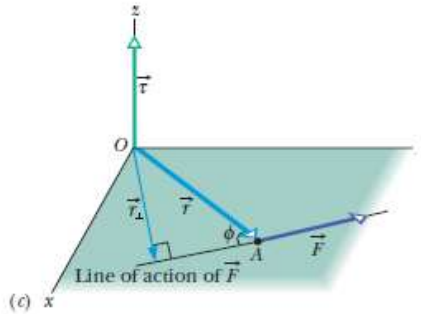
مقدار حاصلضرب خارجی برابر است با:

$$\tau = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F$$

در تعیین گشتاور نیروها، تصمیم گیری برای انتخاب یکی از دو روش ضرب اسکالر و یا ضرب برداری، بیشتر منوط به وضعیت هندسی مساله است.

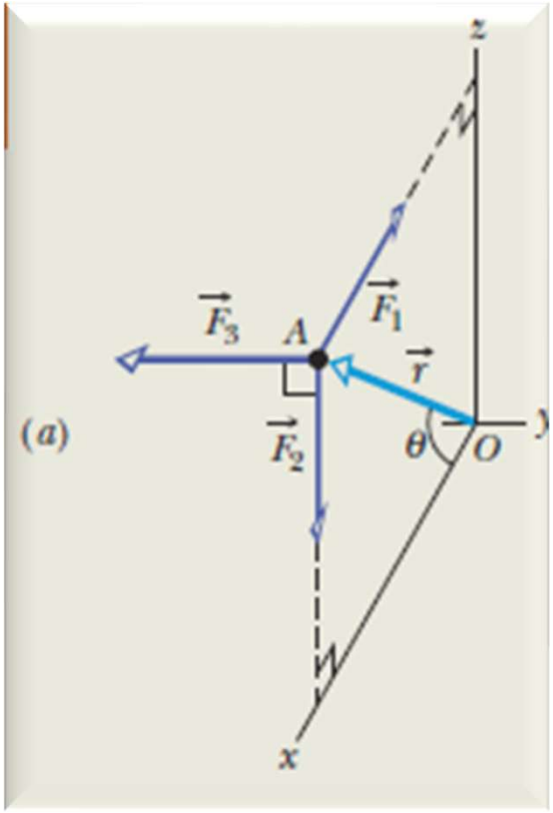






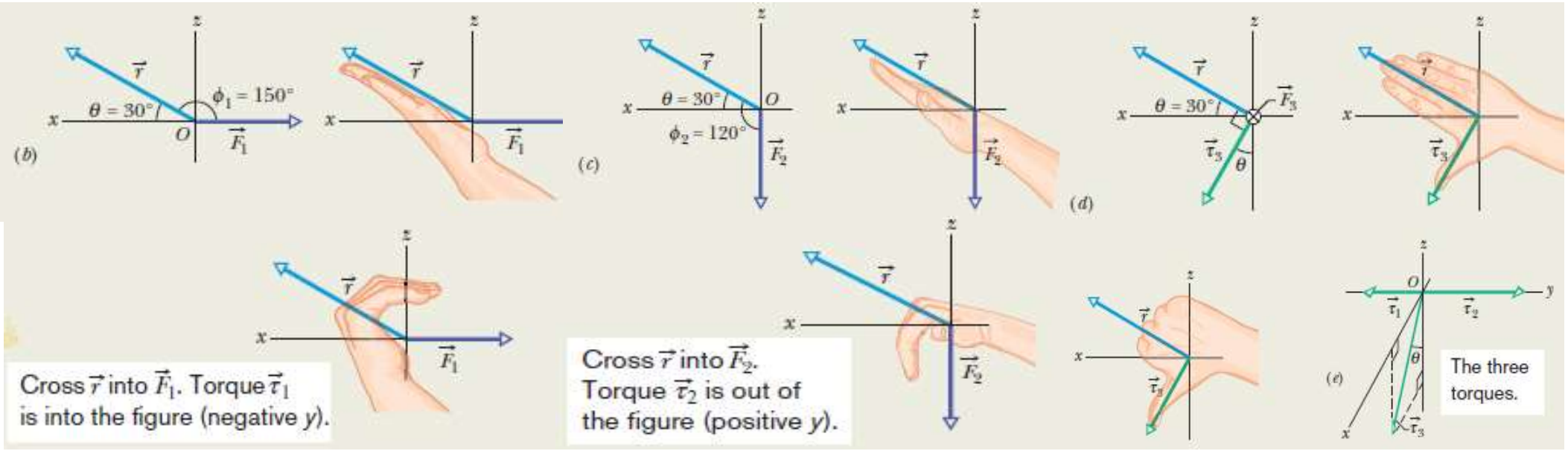
فصل ۱۱: مروری بر مفهوم گشتاور نیرو در سه بعد

مثال) در شکل مقابل گشتاور نیرو را برای هر یک سه نیرو بدست آورید؟

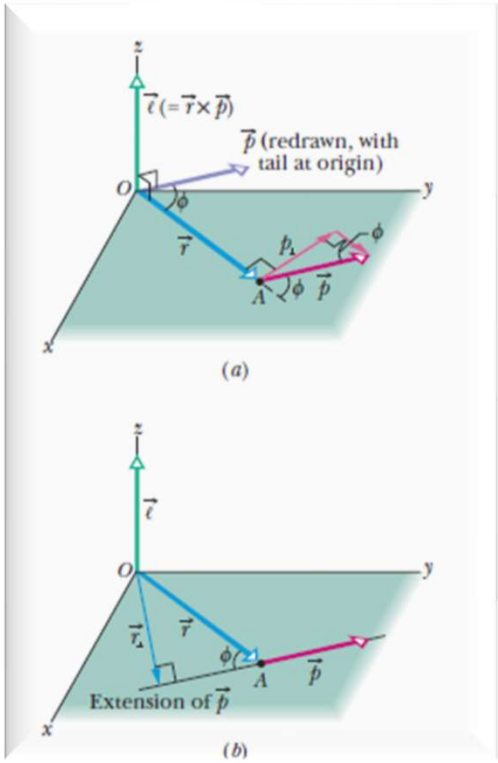


$$\tau_1 = rF_1 \sin\phi_1 = (3.0\,\text{m})(2.0\,\text{N})(\sin 150°) = 3.0\,\text{N}\cdot\text{m},$$
$$\tau_2 = rF_2 \sin\phi_2 = (3.0\,\text{m})(2.0\,\text{N})(\sin 120°) = 5.2\,\text{N}\cdot\text{m},$$
$$\tau_3 = rF_3 \sin\phi_3 = (3.0\,\text{m})(2.0\,\text{N})(\sin 90°)$$
$$= 6.0\,\text{N}\cdot\text{m}.$$

فصل ۱۱- مروری بر مفهوم گشتاور نیرو در سه بعد



فصل ۱۱- تکانه زاویه ای



$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\ell = rmv \sin \phi$$

$$\ell = rp_\perp = rmv_\perp$$

$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv$$

فصل ۱۱ - قانون دوم نیوتن در دوران

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(single particle)}$$

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad \text{(single particle).}$$

اثبات

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}_{net} = \sum(\vec{r} \times \vec{F})$$

فصل ۱۱: مروری بر مفهوم گشتاور نیرو در سه بعد

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\tau = (r)(F \sin \phi)$$

دست راست در جهت r قرار می دهیم سپس چهار انگشت را به سمت Fخم می کنیم نهایتا شست جهت گشتاور را نشان می دهد.

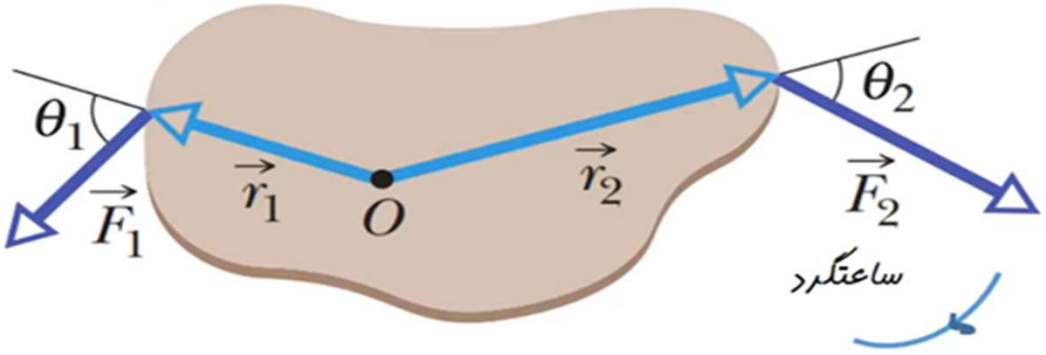
جسم شکل زیر می تواند حول نقطه o بچرخد و دو نیرو مطابق شکل بر آن وارد می شود اگر r_1=1.3 m و r_2=2.15 m و F_1=4.2 N و F_2=4.9 N و θ_1=75 وθ_2=60 باشد گشتاور نیروی خالص نسبت به این نقطه چقدر است

$$\tau_1 = 1.3 \times 4.2 \times \sin(75°) = 5.27\ N.m \quad +$$

$$\tau_2 = 2.15 \times 4.9 \times \sin(60°) = 9.12\ N.m \quad -$$

$$\tau_1 - \tau_2 = 5.27 - 9.12 = -3.85\ N.m$$

قرارداد:اگر جسم پادساعتگرد بچرخد،گشتاور نیرو مثبت است و اگر ساعتگرد بچرخد،گشتاور نیرو،منفی است.



تکانه زاویه ای سیستم ذرات

تکانه زاویه ای سیستم ذرات:

$$\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots + \ell_n = \sum_{i=1}^{n} \ell_i,$$

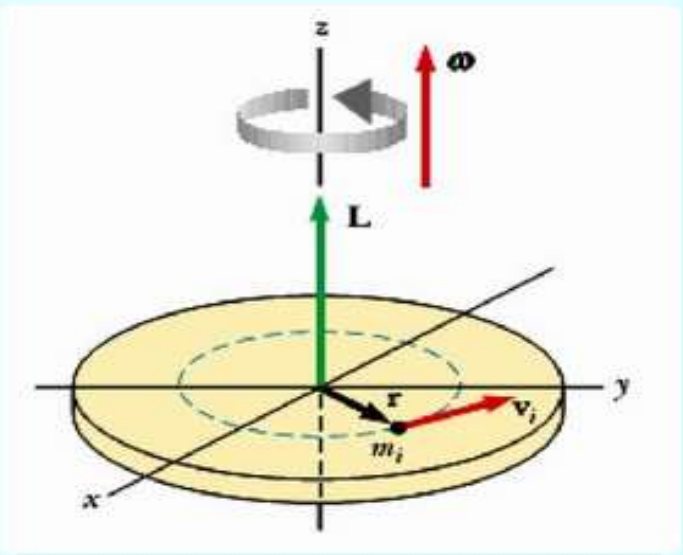
تغییر در تکانه زاویه ای کل برابر برایند گشتاور نیروهای خارجی وارد بر سیستم است:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(single particle)}$$

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

قانون دوم نیوتن برای کمیت های دورانی

$$v_i = r_i\omega \qquad L_i = m_i r_i^2 \omega$$



$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

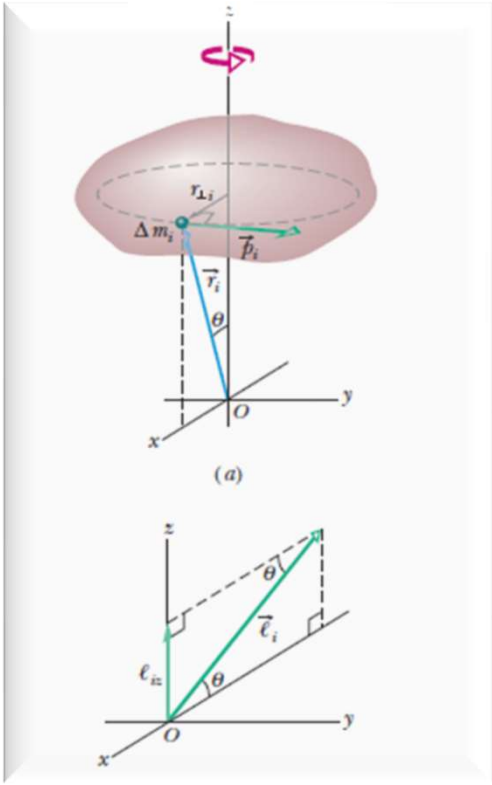
$$L_z = I\omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha$$

تکانه زاویه ای اجسام صلب

در این فصل دوران ذرات و اجسام صلب حول محور ثابت را مطالعه می کنیم .



$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90°) = (r_i)(\Delta m_i\, v_i).$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i(\omega r_{\perp i}) r_{\perp i}$$
$$= \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, r_{\perp i}^2\right).$$

$$L = I\omega \quad \text{(rigid body, fixed axis).}$$

مقایسه دوران و انتقال

Translational		Rotational	
Force	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}\ (=\vec{r}\times\vec{F})$
Linear momentum	$\vec{p}$	Angular momentum	$\vec{\ell}\ (=\vec{r}\times\vec{p})$
Linear momentum[b]	$\vec{P}\ (=\Sigma\vec{p}_i)$	Angular momentum[b]	$\vec{L}\ (=\Sigma\vec{\ell}_i)$
Linear momentum[b]	$\vec{P}=M\vec{v}_{\text{com}}$	Angular momentum[c]	$L=I\omega$
Newton's second law[b]	$\vec{F}_{\text{net}}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law[b]	$\vec{\tau}_{\text{net}}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law[d]	$\vec{P}=$ a constant	Conservation law[d]	$\vec{L}=$ a constant

●●۳۳- در لحظهٔ t، مکان یک ذرهٔ ۳/۰ کیلوگرمی را نسبت به مبدأ دستگاه مختصات xy به دست می‌دهد ($\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است). (الف) عبارتی برای گشتاور نیروی وارد بر ذره نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) آیا بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به مبدأ افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

$\vec{r}(t) = 4t^2\,\hat{i} - (2t+6t^2)\,\hat{j}$

$\Downarrow$

$\vec{v}(t) = 8t\,\hat{i} - (2+12t)\,\hat{j} \Rightarrow \vec{a}(t) = 8\,\hat{i} - 12\,\hat{j} = \vec{a}$ (m/s^2)

$\therefore \vec{F} = m\vec{a} = 3 \times (8\hat{i} - 12\hat{j}) = (24\,\hat{i} - 36\,\hat{j})$ (N)

الف) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}$

$$\vec{\tau}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4t^2 & -(2t+6t^2) & 0 \\ 24 & -36 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left[-144t^2 + (2t+6t^2)\times 24\right]$$

$144t^2$

$\vec{\tau}(t) = \hat{k}\,(48t)$

ب) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای افزایش می‌یابد

پایستگی تکانه زاویه ای

پایستگی تکانه زاویه ای :

هرگاه گشتاور نیروی خارجی بر آیند وارد بر یک دستگاه صفر باشد تکانه زاویه کل دستگاه ثابت می ماند. این مطلب بیان پایستگی تکانه زاویه ای است

$$dL/dt = 0,$$
$$L_i = L_f$$

فصل ۱۱- پایستگی تکانه زاویه ای

تکانه زاویه ای یک جسم صلب که حول محور ثابت دوران می کند:

$$L_z = I\omega$$

هرگاه گشتاور نیروی خارجی بر آیند وارد بر جسم صلب صفر باشد:

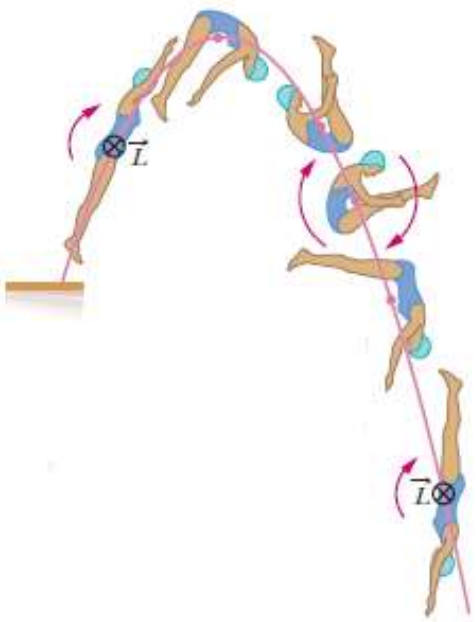
$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

فصل ۱۱- پایستگی تکانه زاویه ای

اگر هیچ گشتاور نیرویی خارجی خالصی بر جسم وارد نشود L_z باید ثابت بماند پس اگر سرعت زاویه ای تغییر کند لختی دورانی باید طوری تغییر کند که تغییر جبران شود.

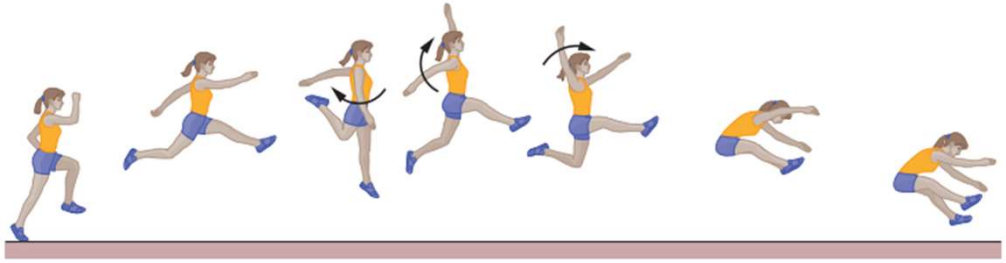
معادله پایستگی نه تنها در مورد دوران حول یک محور ثابت صادق است بلکه در مورد دوران حول محوری که از مرکز جرم می گذرد و در حال حرکت جهت آن تغییر نمی کند نیز صدق می کند

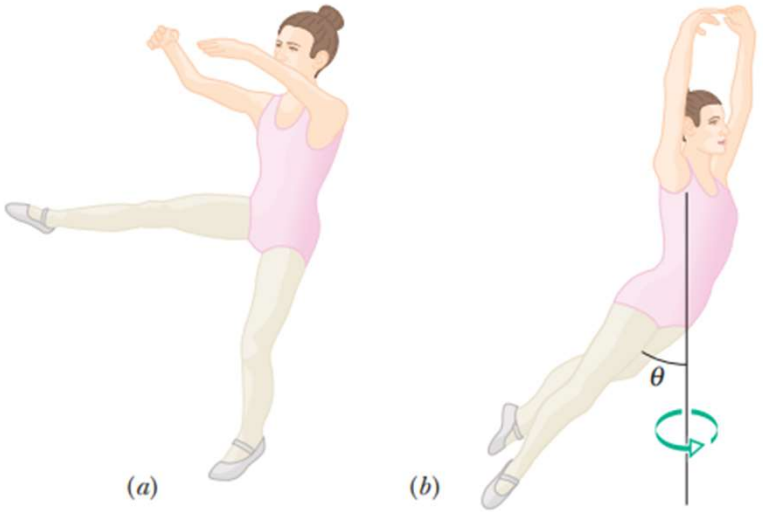
فصل ۱۱- پایستگی تکانه زاویه ای



شیرجه رو از اصل پایستگی تکانه استفاده می کند آیا می توانید توضیح دهید چرا در بالاترین نقطه سرعت زاویه ای زیاد می شود ؟

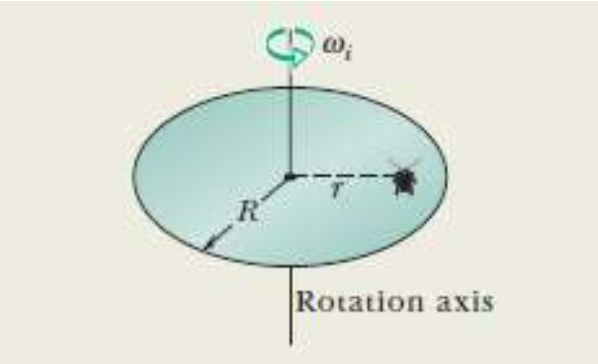
فصل ۱۱- پایستگی تکانه زاویه ای





فصل ۱۱- پایستگی تکانه زاویه ای

مثال) در شکل مقابل چنانچه سوسک از داخل دیسک به سمت نواحی بیرونی تا لبه دیسک حرکت کند، تغییر سرعت زاویه ای دیسک چقدر است؟



$(r = 0.800R)$

$\omega_i = 1.50\ \text{rad/s}.$

$I_d = \frac{1}{2}MR^2 = 3.00mR^2.$

$I_{ci} = 0.64mR^2$

$I_i = I_d + I_{ci} = 3.64mR^2,$

$I_f = I_d + I_{cf} = 4.00mR^2.$

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

$$4.00mR^2\omega_f = 3.64mR^2(1.50\ \text{rad/s}).$$

$$\omega_f = 1.37\ \text{rad/s}.$$

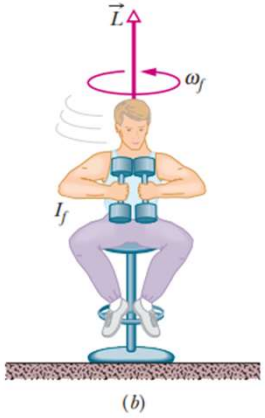
مثال:

دانشجویی روی یك صندلی که آزادانه حول محور قائمی می‌چرخد، نشسته و درحالی‌که درهر دستش یك وزنهٔ ۳٫۰ کیلوگرمی گرفته است، بازوهای خود را افقی و کشیده نگه می‌دارد. مربی صندلی را با سرعت زاویه‌ای ۰٫۵۰ دور برثانیه می‌چرخاند. فرض کنید اصطکاك ناچیز است وهیچ گشتاور نیرویی نسبت به‌محور قائم تولید نمی‌کند. همچنین فرض کنید لختی‌دورانی‌دانشجوهنگامی که دستهایش را جمع می‌کند درمقدار $5.0\,kg.m^2$ ثابت می‌ماند و تغییر لختی دورانی فقط ناشی ازپایین‌آوردن وزنه‌هاست. فاصلهٔ اولیهٔ وزنه‌ها ازمحور دوران را ۰٫۸۰ m و فاصله نهایی آنها را ۰٫۲۰ m بگیرید. سرعت زاویه‌ای نهایی دانشجو را پیداکنید.

فصل ۱۱- پایستگی تکانه زاویه ای

حل: دو وضعیت نشان داده شده است:





حل:

تکانهٔ زاویه‌ای نهایی = تکانهٔ زاویه‌ای اولیه

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

ازطرف دیگر

$$I = I_{\text{دانشجو}} + I_{\text{وزنه‌ها}}$$

$$I_0 = ۵ر۰ + ۲(۳ر۰)(۰ر۸۰)^۲ = ۸ر۸۴\ \text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

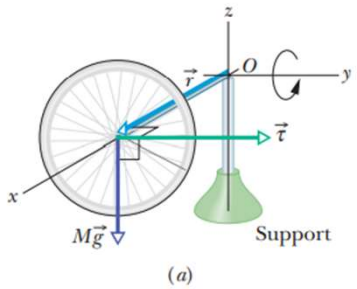
$$I = ۵ر۰ + ۲(۳ر۰)(۰ر۲۰)^۲ = ۵ر۲۴\ \text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

$$\omega_0 = ۰ر۵۰\ \text{rev/s} = \pi\ \text{rad/s}$$

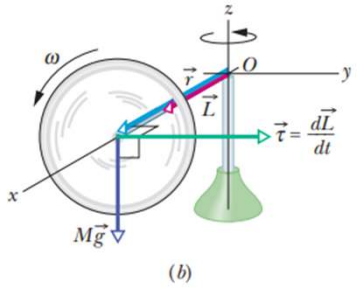
بنابراین

$$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 = \frac{۸ر۸۴}{۵ر۲۴}\pi\ \text{rad/s} = ۱ر۶\pi\ \text{rad/s}$$

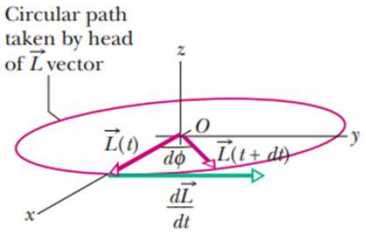
ژیرسکوب(چرخش‌نما)



(a)



(b)



ژیروسکوپ رفتارهایی از جمله حرکت تقدیمی و رقص محوری را نشان می‌دهد.

معادله اساسی که رفتار یک چرخش‌نما را توصیف می‌کند به صورت زیر است

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \tau = Mgr\sin 90^\circ = Mgr$$

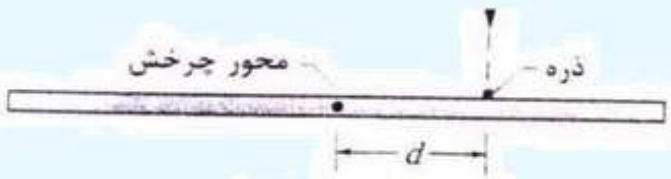
$$dL = \tau\, dt = Mgr\, dt.$$

$$L = I\omega \qquad d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt.$$

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr\, dt}{I\omega}$$

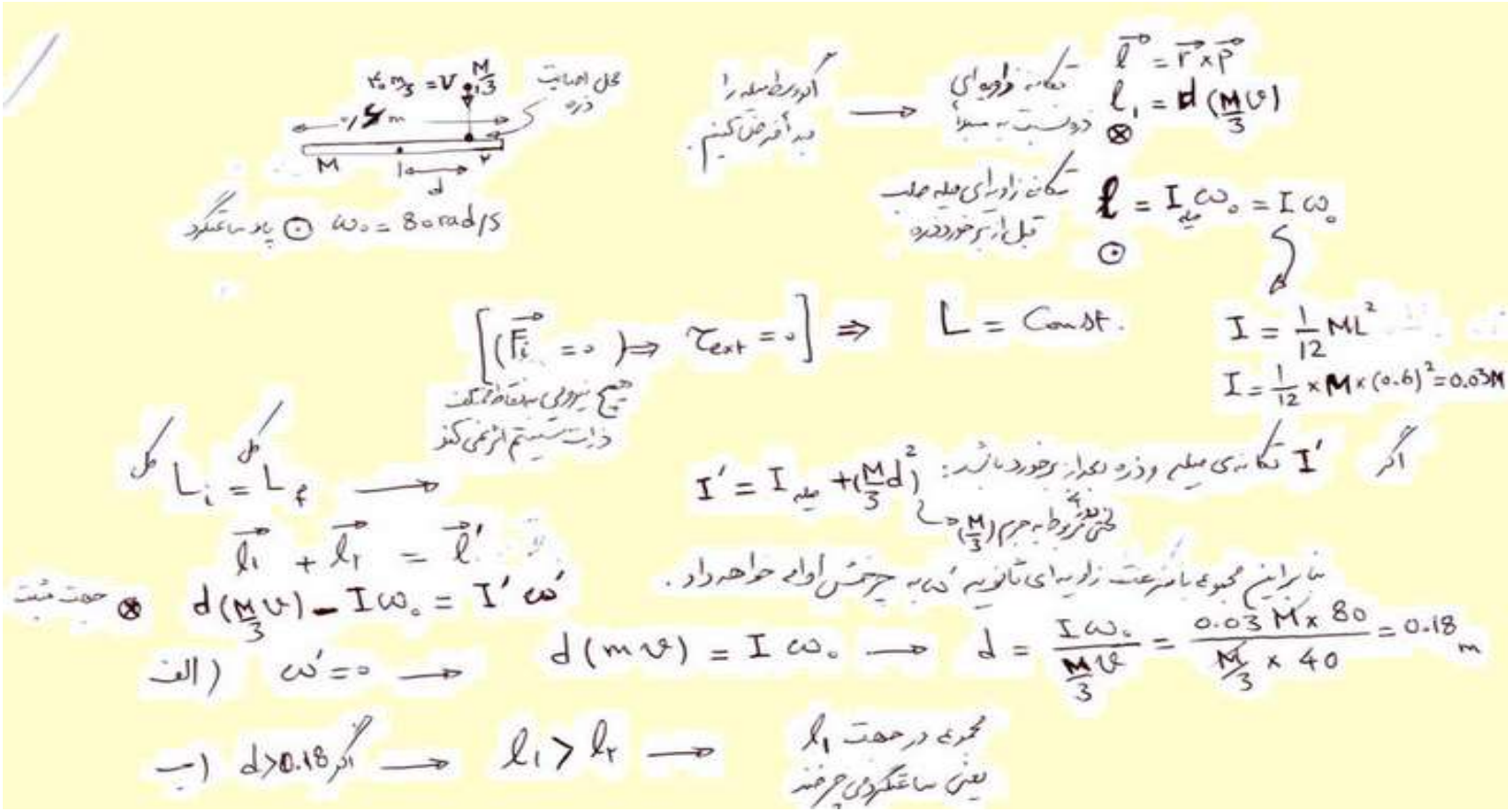
$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad \text{(precession rate).}$$

پایستگی تکانه زاویه ای

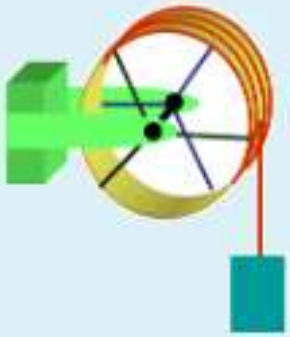


شکل نمای از بالای میلهٔ نازک یکنواختی به طول ۰/۶۰۰m و جرم M را نشان می‌دهد که به طور افقی با ۸۰/۰rad/s به طور پادساعتگرد حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد می‌چرخد. ذره‌ای به جرم $M/3/00$ به طور افقی با تندی ۴۰/۰m/s به این میله برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. مسیر ذره در لحظهٔ برخورد عمود بر میله است و از مرکز میله به اندازهٔ d فاصله دارد. (الف) در چه مقداری از d میله و ذره بعد از برخورد به سکون می‌رسند؟ (ب) اگر d از این مقدار بیشتر باشد، میله و ذره در چه جهتی می‌چرخند؟

پایستگی تکانه زاویه ای

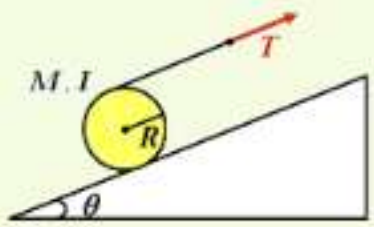


نمونه سوال



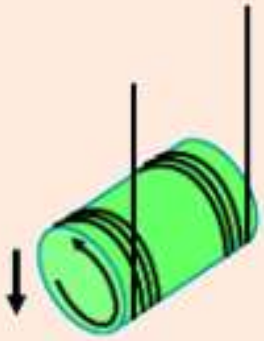
۱- ریسمان بسیار سبکی به دور یک استوانه توخالی به شعاع $r = 12\ cm$ که قادر است آزادانه حول یک محور افقی بدون اصطکاک بچرخد، پیچیده شده است. جسمی به جرم $4.0\ kg$ که به انتهای ریسمان آویخته شده است، شروع به حرکت نموده و طی $2.0\ s$ مسافت $180\ cm$ را می پیماید. جرم استوانه چقدر است؟

نمونه سوال



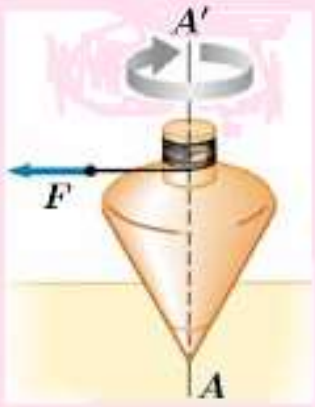
۲- استوانه ای به جرم M ، شعاع R ، و گشتاور لختی I بر روی سطح شیبداری با زاویه شیب θ قرار دارد. ریسمان باریک بسیار سبکی به دور استوانه پیچیده شده و با نیروی ثابت T در امتداد سطح شیبدار کشیده می شود. ضریب اصطکاک ایستایی بین استوانه و سطح μ_s است. نیروی کشش در ریسمان، T ، چقدر باشد تا استوانه در تعادل نگه داشته شود.

نمونه سوال



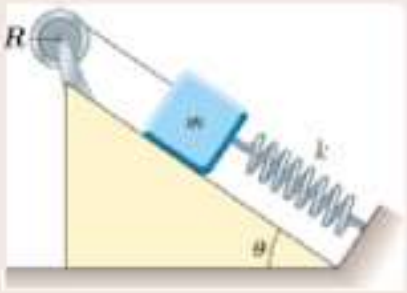
۳- یک استوانه توپر به طول L و شعاع R ، دارای وزن W می باشد. دو ریسمان، نزدیک به دو انتهای استوانه به دور آن بسته شده اند. انتهای دیگر ریسمانها به سقف متصل شده اند. اگر استوانه از حال سکون و در وضعیت افقی رها شود، کشش در ریسمانها و شتاب مرکز جرم استوانه چقدر خواهند بود.

نمونه سوال



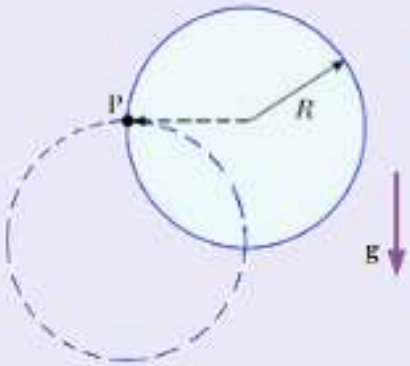
۴- در شکل مقابل گشتاور لختی فرفره $I = 4.00 \times 10^{-4}\ kg.m^2$ است. فرفره ابتدا ساکن بوده و می تواند آزادانه حول محور ثابت AA' بچرخد. ریسمانی که حول دسته فرفره پیچیده شده است، بدون لغزش بر روی دسته فرفره، با نیروی کشش افقی ثابت $F = 5.57\ N$ کشیده می شود. سرعت زاویه ای فرفره را پس از باز شدن $80.0\ cm$ از ریسمان بیابید.

نمونه سوال



۵- در شکل مقابل شعاع قرقره R و گشتاور لختی آن I است. جرم m از یک سو به فنری با ثابت k و از سوی دیگر به ریسمانی سبک متصل است که در انتها به دور قرقره پیچیده شده است. محور قرقره و سطح شیبدار بدون اصطکاک می باشند. اگر قرقره را در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت طوری بچرخانیم که فنر به اندازه d کشیده شده سپس قرقره را از حال سکون رها کنیم، سرعت زاویه ای قرقره را زمانی که فنر طول عادی خود را دارد، محاسبه نمایید.

نمونه سوال



۶- مطابق شکل یک قرص یکنواخت به شعاع R و جرم M می تواند آزادانه حول محور بدون اصطکاک واقع بر لبه خود، P، بچرخد. اگر قرص از حال سکون و از وضعیت نشان داده شده با دایره پُر رها شود، سرعت مرکز جرم آن را در وضعیت نشان داده شده با دایره خط چین به دست آورید. سرعت خطی پائین ترین نقطه قرص در این وضعیت چقدر خواهد بود؟

فصل ۱۲- تعادل و کشسانی



فصل ۱۲: تعادل و کشسانی



Robert Brenner/PhotoEdit

تعادل اجسام صلب

مرکز گرانی

مثالهایی از تعادل

کشسانی

فصل ۱۲: تعادل اجسام صلب

هر جسم در صورتی در حال تعادل مکانیکی است که دارای دو شرط زیر باشد:

الف) نسبت به یک چارچوب مرجع لخت شتاب خطی مرکز جرم آن صفر باشد.

ب) شتاب زاویه ای آن نسبت به هر محور ثابتی در این چارچوب مرجع صفر باشد

در تعریف فوق لازم نیست که جسم نسبت به ناظر در حال سکون باشد بلکه باید شتاب نداشته باشد

فصل ۱۲: تعادل اجسام صلب

شرط اول تعادل معادل با این است که جمع برداری تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم صفر باشد

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$$

شرط دوم تعادل معادل با این است که مجموع بردار ی تمام گشتاور نیروهای خارجی وارد بر جسم در حالت تعادل صفر باشد:

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{ext} = 0$$

فصل ۱۲: تعادل اجسام صلب

در این فصل برای سادگی موارد دو بعدی را در نظر می گیریم یعنی فرض می کنیم که کلیه نیروهای وارد بر جسم در صفحه باشد و همچنین گشتاور نیرو فقط دارای مولفه عمود باشد پس سه رابطه نرده ای برای حل مسائل خواهیم داشت:

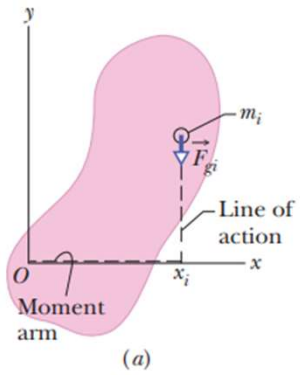
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum \tau_z = 0$$

فصل ۱۲ - مرکز گرانی

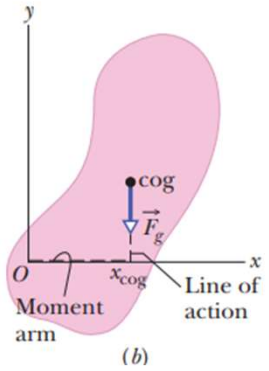
نقطه اثر برآیند نیروی گرانش معادل را مرکز گرانی نامند.

قضیه: ثابت کنید اگر میدان گرانشی برای تمامی ذرات یک جسم یکسان باشد آنگاه مرکز جرم بر گرانیگاه منطبق است.

$$\mathbf{F}+m_1\mathbf{g}+m_2\mathbf{g}+\cdots+m_n\mathbf{g}=0$$
$$\mathbf{F}=-(m_1+m_2+\cdots+m_n)\mathbf{g}=-M\mathbf{g}$$

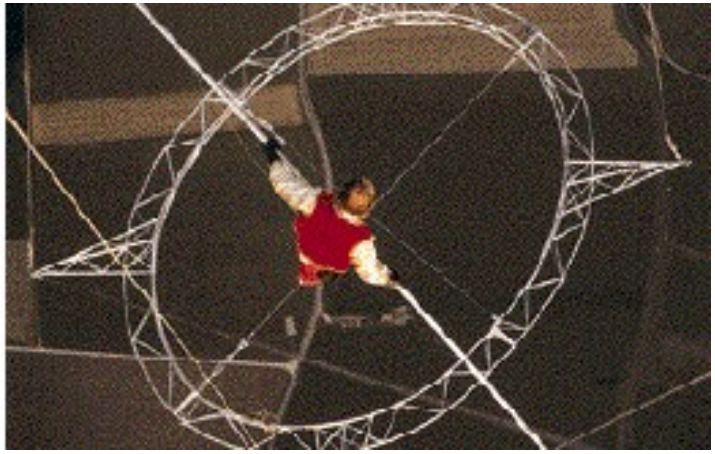


(a)



(b)

فصل ۱۲: مرکز گرانی



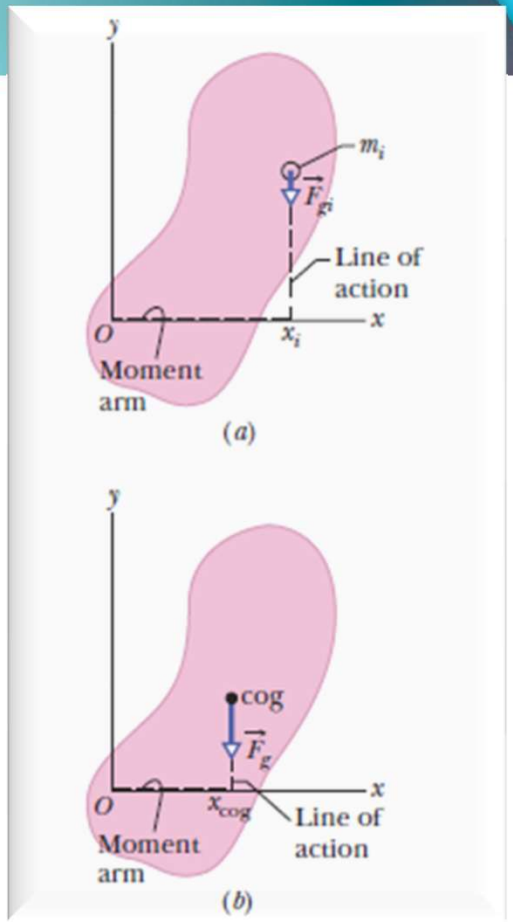
اگر میدان گرانی یکنواخت باشد جسم می تواند با یک تک نیروی

که رو به بالا است و به مرکز جرم وارد می F=-mg شود، در حال تعادل دینامیکی باشد و در این حالت مرکز جرم همان مرکز گرانی است.

اثبات

$$\tau_i = x_i F_{gi} \quad \Rightarrow \quad \tau_{net} = \sum \tau_i = \sum x_i F_{gi}$$

$$\tau = x_{cog} F_g$$



$$\tau = x_{cog} \sum F_{gi} = x_{cog} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi} = x_{cog} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i$$

$$x_{cog} \sum m_i = \sum x_i m_i$$

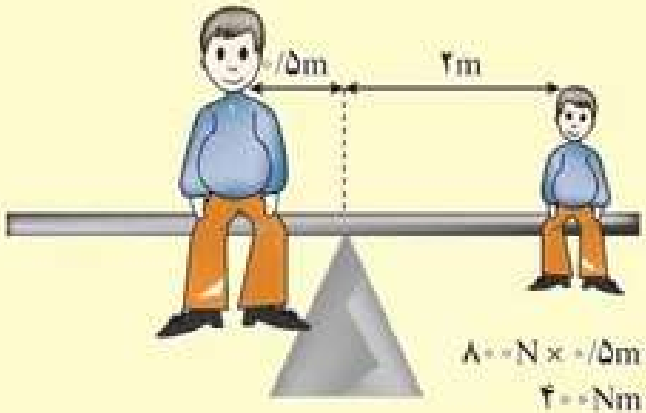
$$x_{cog} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i$$

$$\Rightarrow \quad x_{cog} = x_{com}$$

فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

گشتاور نیروی پاد ساعتگرد=گشتاور نیروی ساعتگرد

$$d_1 \times F_1 = d_2 \times F_2$$



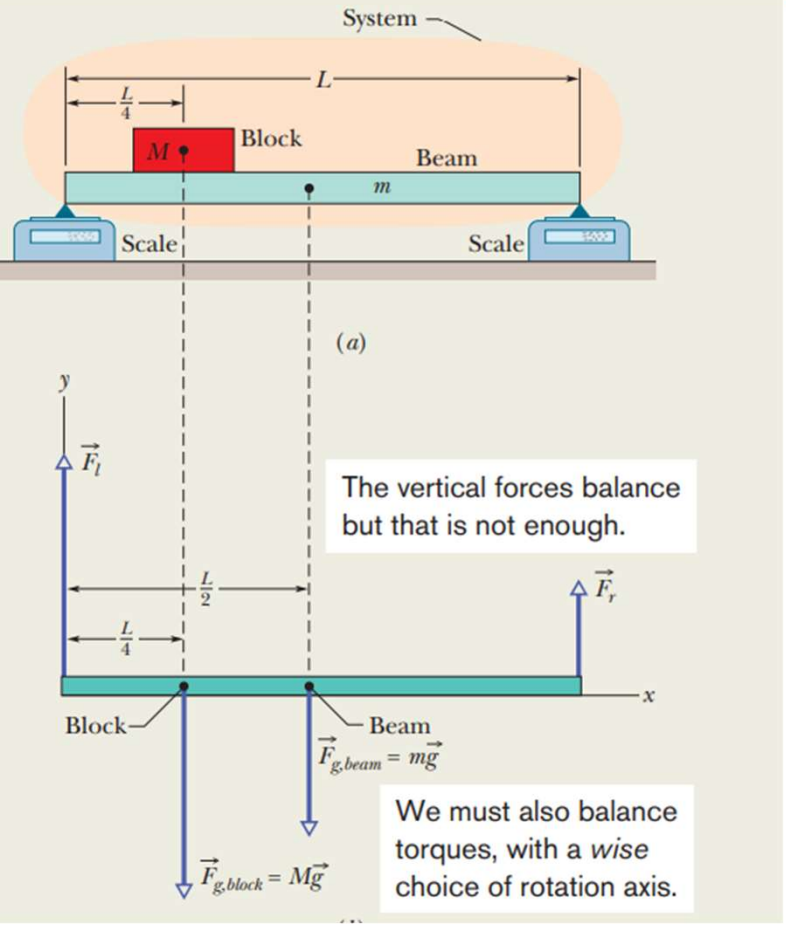
مثال

$$۸۰۰N \times ۰/۵m = ۲۰۰N \times ۲m$$
$$۴۰۰Nm = ۴۰۰Nm$$

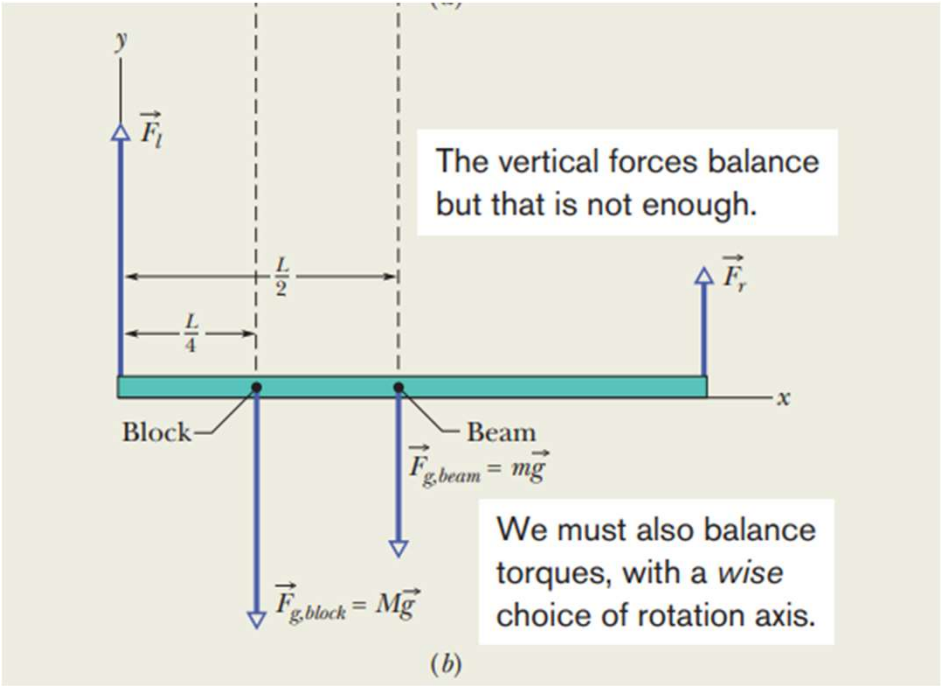
اندازهٔ گشتاور پادساعتگرد پدر برابر با اندازهٔ گشتاور ساعتگرد پسر است

فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

مثال ۱- دو سر یک میله فولادی به جرم m=1.8kg
روی دو ترازو قرار دارد یک وزنه M=2kg در فاصله L/4
روی آن قرار می دهیم ترازوها چه اعدادی را نشان
می دهند



فصل ۱۲ – مثالهایی از تعادل



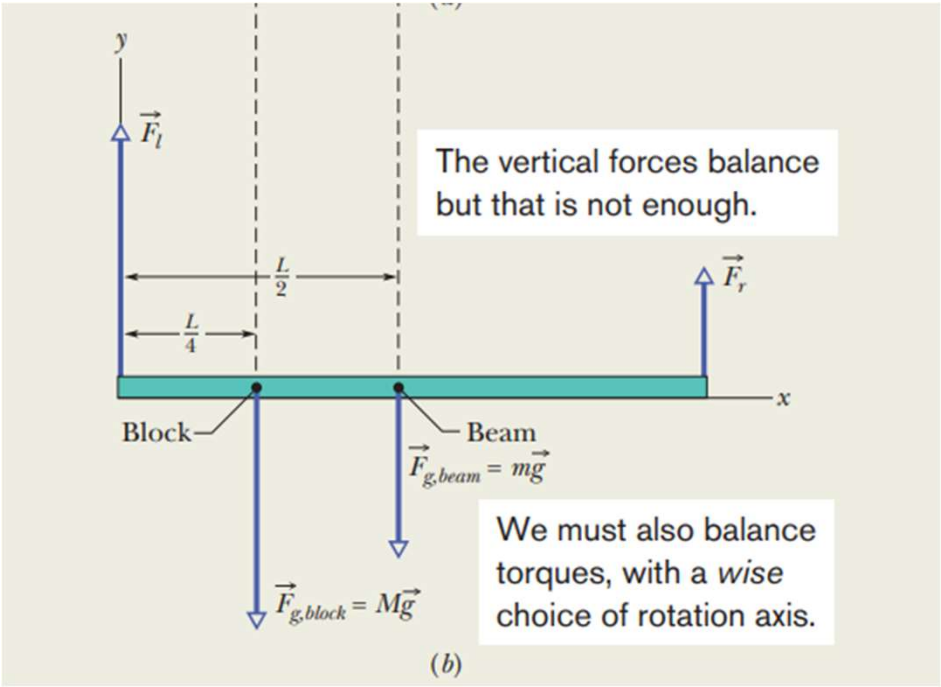
$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0.$$

$$\sum \tau_z = -(F_l)(L) + (Mg)(3L/4) + (mg)(L/2) + (F_r)(0)$$
$$= 0.$$

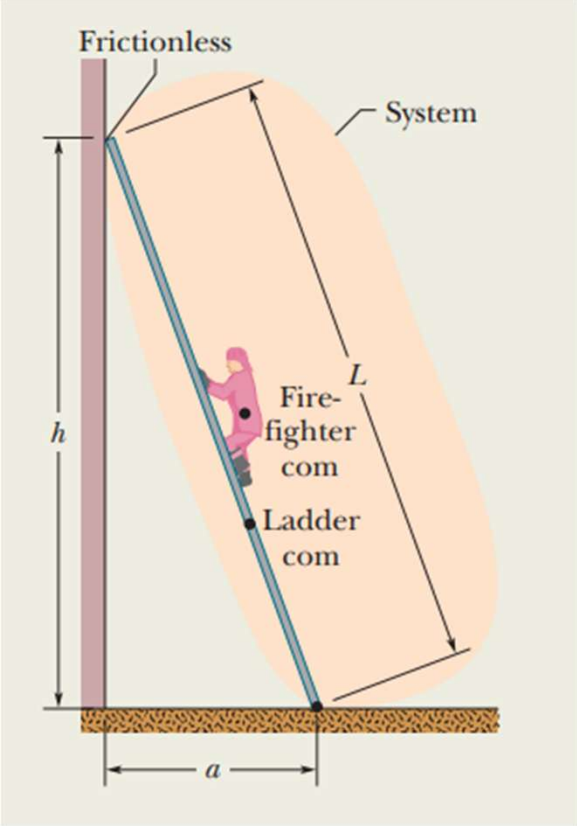
$$F_r = (g/4)(2m + M)$$
$$= (\tfrac{1}{4})(9.8\ \text{m/s}^2)(2 \times 1.8\ \text{kg} + 2.7\ \text{kg}) = 15\ \text{N}.$$

ادامه حل:

$$F_l = (M + m)g - F_r$$
$$= (2.7\ \text{kg} + 1.8\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) - 15\ \text{N}$$
$$= 29\ \text{N}.$$

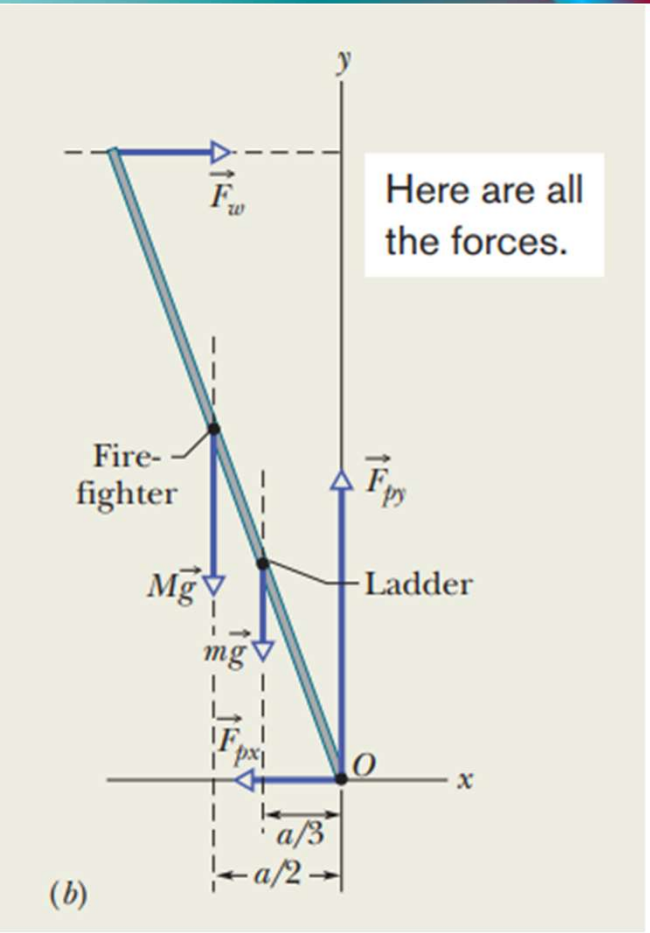


فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل



مثال ۲- نردبانی به طول ۱۲ متر و جرم ۴۵ کیلوگرم در نقطه ای به ارتفاع ۳/۹ متر از زمین ب دیوار تکیه دارد. مرکز گرانی نردبان د رفاصله یک سوم طول آن ازسطح زمین واقع است . شخصی به جرم ۷۲ کیلوگرم تا وسط نردبان بالا می رود.

فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل



الف) با فرض اینکه دیوار (نه زمین) بدون اصطکاک است نیروهای وارد ا ز زمین و دیوار بر نردبان را تعیین کنید.

حل:

$$\sum F_x = F_w - F_{gx} = 0$$

$$\sum F_y = F_{gy} - Mg - mg = 0.$$

$$F_{gy} = g(M + m) = (9.8\ \text{m/s}^2)(72\ \text{kg} + 45\ \text{kg})$$

$$= 1146.6\ \text{N} \approx 1100\ \text{N}.$$

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) = 0.$$

$$F_w = \frac{ga(M/2 + m/3)}{h}$$

$$= \frac{(9.8\ \text{m/s}^2)(7.58\ \text{m})(72/2\ \text{kg} + 45/3\ \text{kg})}{9.3\ \text{m}}$$

$$= 407\ \text{N} \approx 410\ \text{N}.$$

$$F_{gx} = F_w = 410\ \text{N}.$$

فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

ب) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان زمین و نردبان ۰/۵۳ باشد قبل از آنکه نردبان شروع به لغزیدن کند شخص تا چه ارتفاعی بالا میرود؟

حل: فرض کنید که q کسری از طول کل نردبان باشد که شخص می تواند قبل از لغزیدن نردبان ، بالا برود . در شروع لغزش داریم .

$$F_{gx} = \mu_s F_{gy},$$

$$\sum \tau_z = 0.$$

$$F_w = \frac{ga}{h}\left(\tfrac{1}{3}m + Mq\right).$$

ادامه حل:

$$\sum F_x = F_w - F_{gx} = 0.$$
$$F_w = F_{gx} = \mu_s F_{gy}.$$

$$\sum F_y = F_{gy} - Mg - mg = 0.$$
$$F_{gy} = (M + m)g.$$
$$F_w = \mu_s g(M + m).$$

ادامه حل:

$$F_w = \mu_s g(M + m) = \frac{ga}{h}\left(\tfrac{1}{3}m + Mq\right).$$

$$q = \frac{\mu_s h}{a}\frac{(M + m)}{M} - \frac{m}{3M}$$

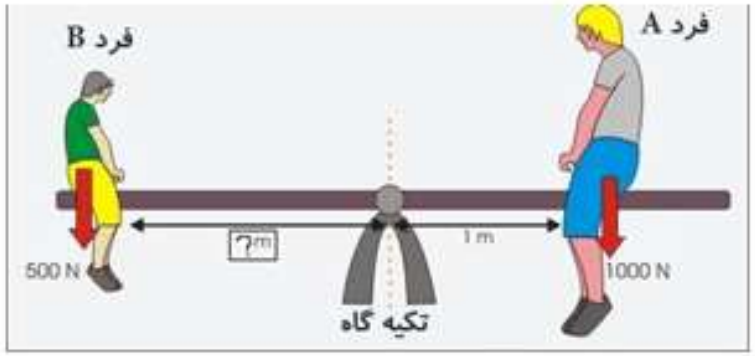
$$= \frac{(0.53)(9.3\ \text{m})}{7.6\ \text{m}}\frac{(72\ \text{kg} + 45\ \text{kg})}{72\ \text{kg}} - \frac{45\ \text{kg}}{(3)(72\ \text{kg})}$$

$$= 0.85.$$

فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

مثال:

در شکل زیر فرد A وزن ۱۰۰۰ N دارد و فرد B وزن ۵۰۰ N. فاصله فرد A از مرکز، ۱m است. فاصله فرد B از مرکز چقدر است؟



از رابطه بالا داریم:

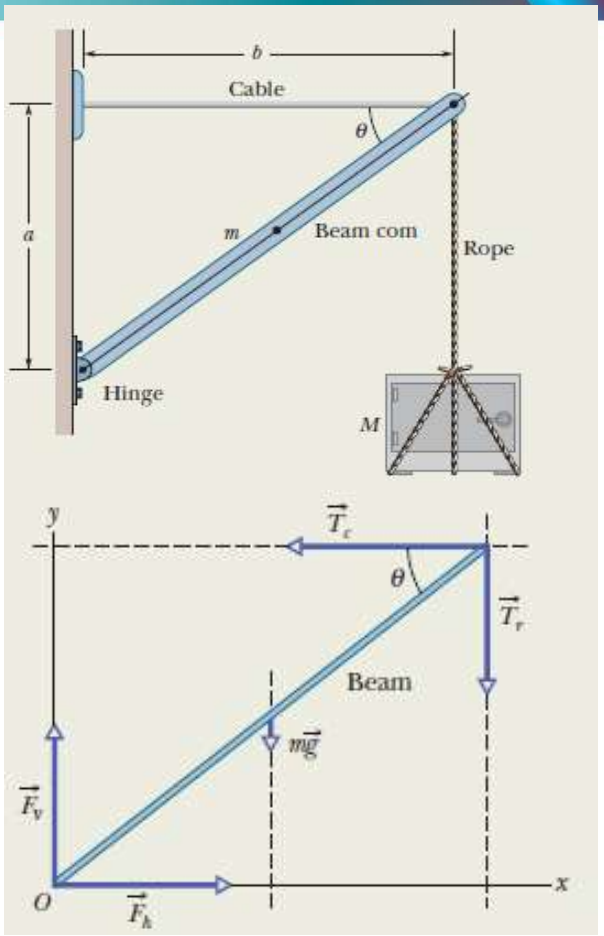
$$(D1 * M1) = (D2 * M2)$$

$$(۵۰۰\ N * M1) = (۱۰۰۰\ N * ۱\ m)$$

$$M1 = ۲\ meter$$

فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

مثال) در شکل مقابل گاوصندوق از طریق یک ریسمان بدون جرم و یک میله آویزان شده است. نیروی کابل و نیروی افقی و عمودی نقطه آویزگاه میله را بیابید؟



$M = 430\ \text{kg}$
$a = 1.9\ \text{m}$ and $b = 2.5\ \text{m}$
$m = 85\ \text{kg}$

$$\tau_{\text{net},z} = 0$$
$$(a)(T_c) - (b)(T_r) - (\tfrac{1}{2}b)(mg) = 0.$$

$$T_c = \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a}$$
$$= \frac{(9.8\ \text{m/s}^2)(2.5\ \text{m})(430\ \text{kg} + 85/2\ \text{kg})}{1.9\ \text{m}}$$
$$= 6093\ \text{N} \approx 6100\ \text{N}.$$

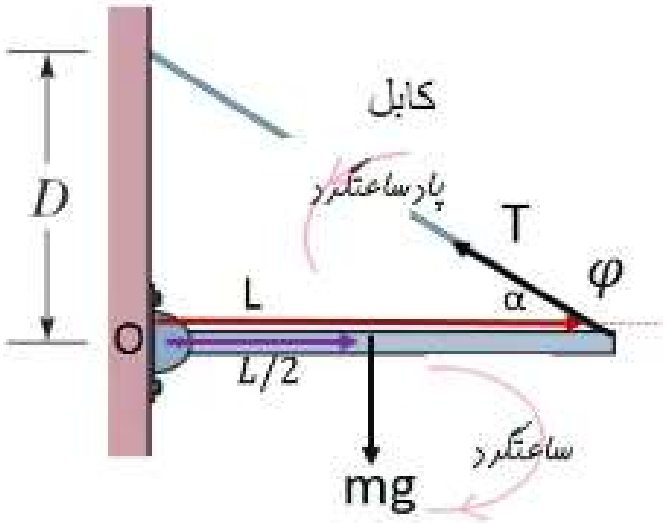
فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

$$F_{\text{net},x} = 0 \rightarrow F_h - T_c = 0, \quad F_h = T_c = 6093\ \text{N}. \rightarrow F_v = (m + M)g = (85\ \text{kg} + 430\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 5047\ \text{N}.$$

$$F_{\text{net},y} = 0 \rightarrow F_v - mg - T_r = 0. \rightarrow F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \sqrt{(6093\ \text{N})^2 + (5047\ \text{N})^2} \approx 7900\ \text{N}.$$

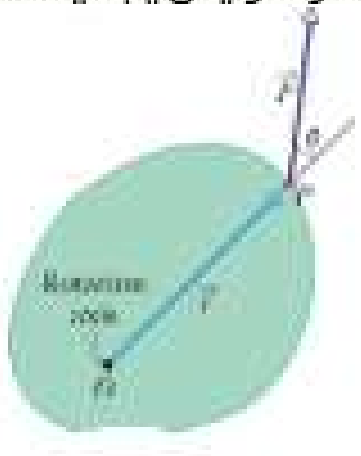
فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

در شکل روبه رو،تیرک یکنواختی به وزن ۵۰۰ نیوتن و طول ۳ متر به طور افقی نگه داشته شده است. این تیرک از طرف چپ به دیواری لولا شده وطرف راست آن به وسیله کابلی نگه داشته شده است که درفاصله D بالاتر از لولا به دیوار متصل شده است. کم ترین کششی که منجر به پاره شدن کابل می شود برابر 1200 N است. (الف) چه مقدار D متناظر با این کشش است؟ (ب)برای جلو گیری از پاره شدن کابل ، آیا D باید از این مقدار افزایش یابد یا کاهش ؟



$$\sum \vec{\tau} = 0$$

$$\tau = (r)(F \sin \phi)$$



فصل ۱۲- مثالهایی از تعادل

$$\tau_{mg} = rF\sin\theta = mg\left(\frac{L}{2}\right)\sin 90 = mg\frac{L}{2} \quad \text{ساعتگرد} -$$

$$\tau_T = T(L)\sin\varphi = TL\sin\alpha \quad \text{پادساعتگرد} +$$

$\tan\alpha = \frac{D}{L}$

$\tan 12 = \frac{D}{3}$

$$TL\sin\alpha - mg\frac{L}{2} = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{mg\frac{L}{2}}{TL} = \frac{mg}{2T} = \frac{500}{2(1200)} = 0.2 \longrightarrow \alpha = \sin^{-1} 0.2 = 12°$$

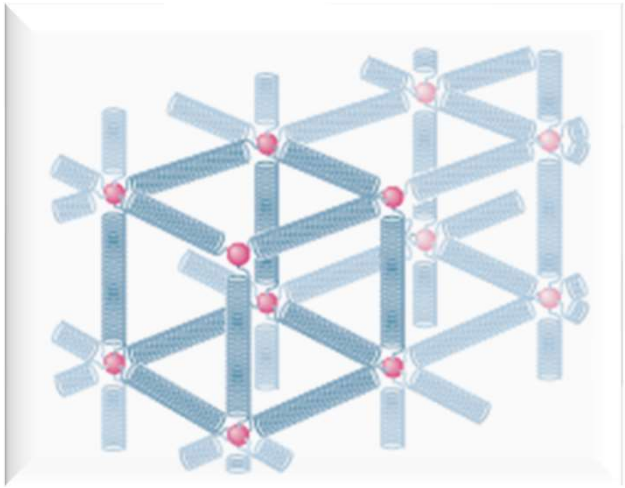
D=0.64 m

فصل ۱۲: کشسانی

کشسانی یا **الاستیسیته** (کشایندی هم گفته شده) خاصیت تغییرشکل بازگشت‌پذیر (ارتجاعی) محیط و مواد است.

نظریه کشسانی در اصل به مطالعه مقدار تغییر شکل محیط‌های کشسان و تنش‌ها و نیروهای مربوطه می‌پردازد.

خاصیت کشسانی محیط باعث می‌شود که هر جزئی از محیط که از وضعیت تعادلش جابجا شده باشد، نیروهای بازگرداننده ایجاد شوند.

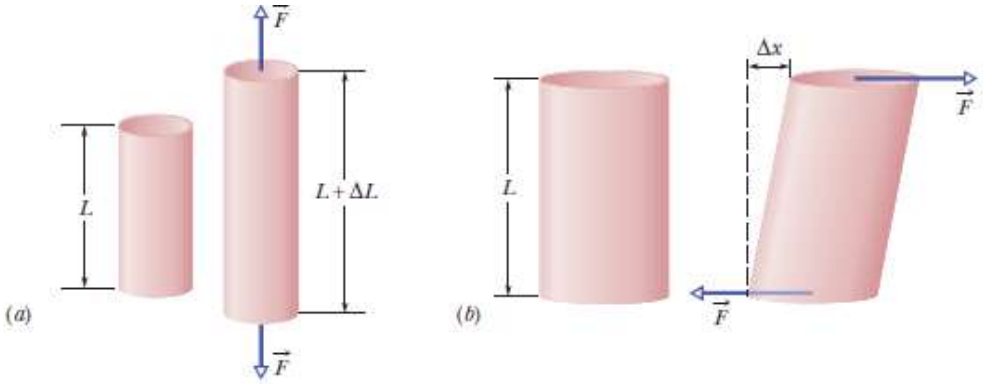


فصل ۱۲: کشسانی

مدول کشسان کمیتی است که میزان مقاومت ماده نسبت به تغییر شکل کشسان (برگشت‌پذیر) تحت تنش اعمالی را اندازه‌گیری می‌کند. مدول کشسان یک جسم توسط شیب منحنی تنش-کرنش همان جسم در ناحیه تغییر شکل برگشت‌پذیر تعریف می‌شود. رابطه مدول کشسان به شکل زیر است:

$$\text{کرنش} \times \text{مدول کشسانی} = \text{تنش}$$

در این رابطه *تنش* نسبت نیروی اعمالی برای تغییر شکل به مساحتی است که نیرو بر آن اعمال می‌شود و کرنش نسبت تغییر ابعاد به ابعاد اولیه است. از آنجایی که کرنش کمیتی بدون بعد است، اگر واحد تنش را پاسکال در نظر بگیریم، واحد مدول هم پاسکال خواهد شد.



فصل ۱۲: کشسانی

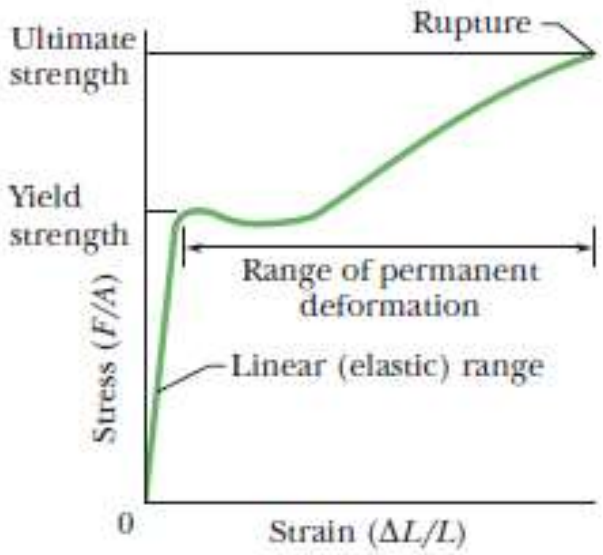
۳ نوع مدول به شرح زیر می‌باشد:

مدول یانگ یا کشسانی کششی، تمایل جسم برای تغییر شکل در جهت تنش اعمالی را اندازه‌گیری می‌کند، مقدار این کمیت از تقسیم تنش کششی به کرنش کششی بدست می‌آید، گاهی مدول یانگ را مدول کشسان نیز می‌گویند.

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

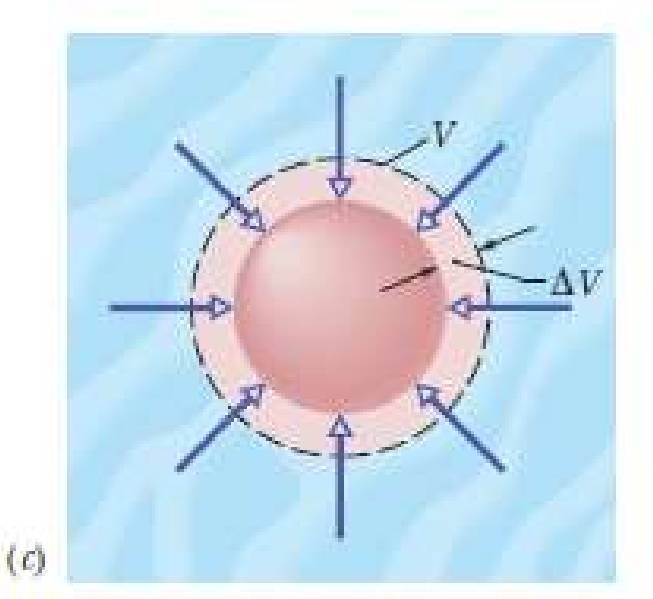
مدول برشی یا مدول سختی تمایل جسم به برش (تغییر شکل در حجم ثابت) را مشخص می‌کند. مقدار آن از تقسیم تنش برشی بر روی کرنش برشی حساب می‌شود. مدول برشی جزوی از مشتقات ویسکوزیته ست.

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$$



منحنی تنش-کرنش برای یک نمونهٔ فولادی.

فصل ۱۲: کشسانی



ضریب کشسان حجمی تمایل جسم به تغییر شکل در تمامی جهات درصورت اعمال نیروی یکسان در تمامی جهات را بیان می‌کند. مقدار این کمیت نیز مانند قبل از تقسیم تنش حجمی بر کرنش حجمی بدست می‌آید و می‌توان گفت این کمیت به عبارتی عکس تراکم پذیری است

$$p = B\frac{\Delta V}{V}$$

فصل ۱۲: مثال هایی ازکشسانی

میله‌ای از فولادسازه‌ای در اختیار داریم. شعاع R این میله ۹٫۵mm و طول L آن برابر ۸۱cm است. نیروی $F = ۶٫۲ \times ۱۰^۴ \text{N}$ (حدود ۷ تن) این میله را در راستای محور می‌کشد. (الف) تنش در این میله چقدر است؟ (ب) در اثر این نیرو میله چقدر افزایش طول پیدا می‌کند؟

$$\text{stress} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6.2 \times 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$
$$= 2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2.$$

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2)(0.81 \text{ m})}{2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2}$$
$$= 8.9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.89 \text{ mm}.$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8.9 \times 10^{-4} \text{ m}}{0.81 \text{ m}}$$
$$= 1.1 \times 10^{-3} = 0.11\%.$$

فصل ۱۲: مثال هایی ازکشسانی

طول سه‌تا از پایه‌های یک میز چهارپایه $D = ۱٫۰۰\,\mathrm{m}$ است؛ پایهٔ چهارم اندکی، به‌اندازهٔ $d = ۰٫۵۰\,\mathrm{mm}$، از سه پایهٔ دیگر بلندتر است، بنابراین میز کمی لنگ است. یک استوانهٔ فولادی سنگینی به جرم $M = ۲۹۰\,\mathrm{kg}$ را به‌طور سرپا روی میز قرار می‌دهیم، بدین‌ترتیب همهٔ پایه‌ها متراکم می‌شوند و میز دیگر لنگی ندا

چوبی با سطح مقطع $A = ۱٫۰\,\mathrm{cm}^۲$ است. مدول یانگ برای چوب $E = ۱٫۳ \times ۱۰^{۱۰}\,\mathrm{N/m}^۲$ است. فرض کنید سطح میز تراز باقی بماند و پایه‌ها خم نشوند. زمین A چه نیرویی به هر یک از پایه‌ها وارد می‌کند؟

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d.$$
$$\Delta L = FL/AE$$

$$\frac{F_4 L}{AE} = \frac{F_3 L}{AE} + d.$$

$$F_{\mathrm{net},y} = 0$$

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0,$$

$$F_4 = Mg - 3F_3.$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4L} \\ &= \frac{(290\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)}{4} \\ &\quad - \frac{(5.0 \times 10^{-4}\ \text{m})(10^{-4}\ \text{m}^2)(1.3 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)}{(4)(1.00\ \text{m})} \\ &= 548\ \text{N} \approx 5.5 \times 10^2\ \text{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4 &= Mg - 3F_3 = (290\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) - 3(548\ \text{N}) \\ &\approx 1.2\ \text{kN}. \end{aligned}$$