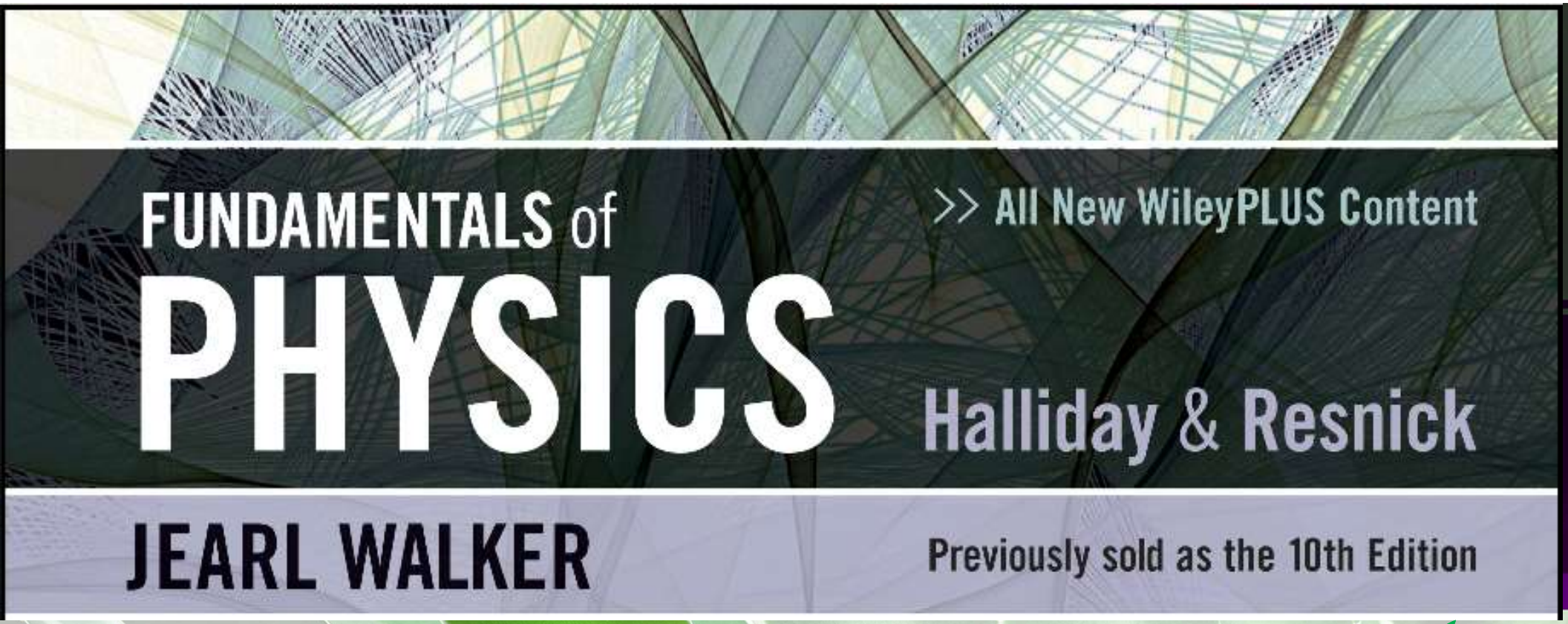


فیزیک پایه۲

کتاب مرجع: فیزیک (جلد سوم)

دیوید هالیدی و رابرت رزنیک

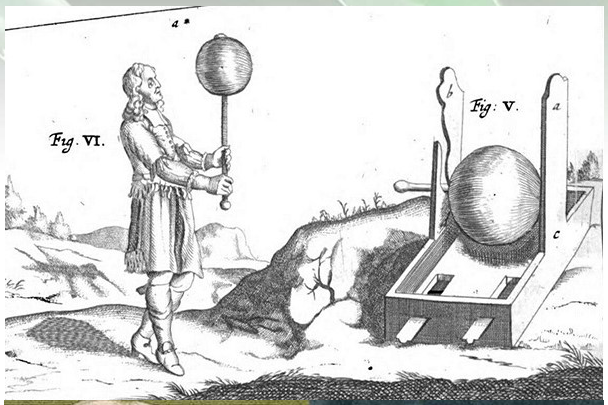
تهیه کننده: سید یاسر ایازی



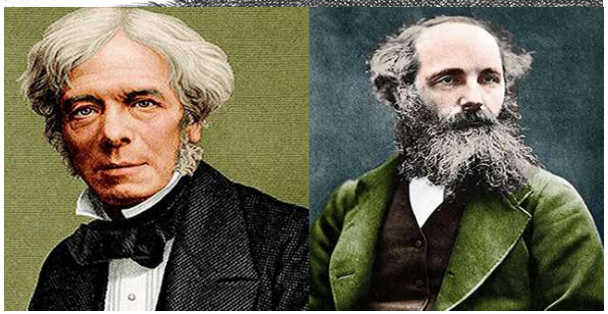
فصل ۲۱ : بار الکتریکی

فصل ۲۱: بار الکتریکی

الکترو مغناطیس – سابقه تاریخی
بار الکتریکی
رساناها ونارساناها
قانون کولن
بار الگتریکی کوانتیده است
بار و ماده
بار پایسته است



گریکه و کره گوگردی



ماکسول و قهرمان او فارادی

الکترو مغناطیس – سابقه تاریخی



مبدا علم الکتریسیته به مشاهده معروف تالس در ده ها سال قبل از میلاد برمی گرددکه متوجه شد تکه کهربای مالش داده شده خرده های کاه را

می رباید.

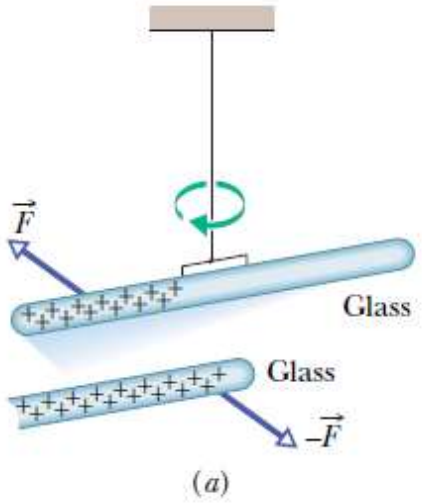
مبدا علم مغناطیس به مشاهده این واقعیت بر می گردد که بعضی سنگها به طور طبیعی آهن را جذب می کنند.

تلفیق دو علم الکتریسیته و مغناطیس به اورسته بر می گردد که مشاهده کرد عقربه قطب نما در مجارت جریان الکتریکی منحرف میگردد.

بار الکتریکی



بار الکتریکی یکی از خواص ماده است. در حقیقت، وقتی دو ماده باردار در مجاورت هم قرار می‌گیرند، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. در این آموزش، با بار الکتریکی آشنا می‌شویم.



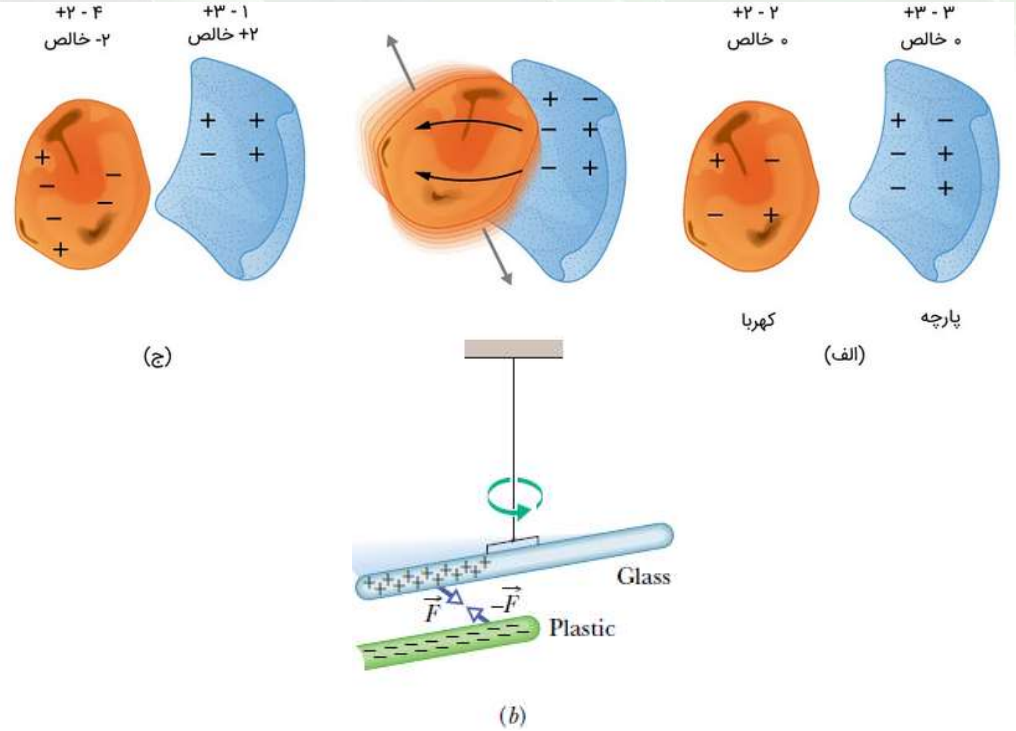
فیزیک‌دان انگلیسی، ویلیام گیلبرت (۱۵٤٤–۱٦۰۳) با استفاده از مواد گوناگون، در مورد نیروی جاذبه حاصل از مالش دو جسم به یکدیگر تحقیق کرد. او علاوه بر کهربا، سنگ بلور و سنگ‌های قیمتی و نیمه قیمتی گوناگونی را نیز مورد بررسی قرار داد. همچنین، چندین فلز را نیز امتحان کرد و دریافت که برخلاف کانی‌ها، فلزات هرگز این نیرو را بروز نمی‌دهند.

با آزمایشهای زیر می توان نشان داد که دو نوع بار الکتریکی مثبت و منفی وجود دارد:

الف)دو میله شیشه ای مالش داده شده با ابریشم یکدیگر را می رانند

بار الکتریکی

هنگامی که کهربا و پارچه پشمی به همدیگر مالش داده می‌شوند، کهربا الکترون‌های بیشتری دریافت می‌کند و بار خالص منفی بدست می‌آورد. به طور همزمان، پارچه نیز الکترون از دست داده و بار خالص آن مثبت می‌شود.

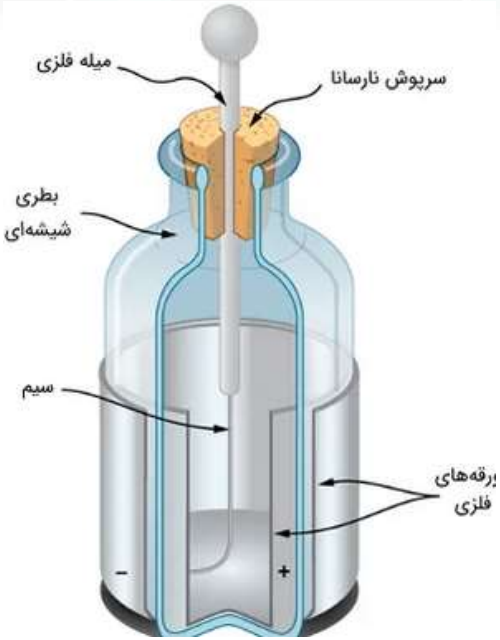


ب)اگر میله پلاستیکی مالش داده شده با پوس خز را به میله شیشه ای مالش داده شده به ابریشم نزدیک کنیم یکدیگر را جذب می کنند.

پس: بارهای هم نام یکدیگر را میرانند و بارهای غیر همنام یکدیگر را جذب می کنند

بار الکتریکی

فیزیک‌دان و سیاست‌مدار آمریکایی، بنجامین فرانکلین دریافت که می‌تواند با استفاده از وسیله‌ای به نام بطری لیدن بار الکتریکی را جمع‌آوری کند. این بطری شیشه‌ای به وسیله دو ورقه فلزی که یکی از آن‌ها در داخل و دیگری در بیرون شیشه قرار دارد، می‌تواند یک نیروی الکتریکی بزرگ بین ورقه‌ها ایجاد کند.



بطری لیدن نمونه قدیمی خازن است و به آزمایشگران این امکان را می‌دهد تا مقدار زیادی بار الکتریکی ذخیره کنند. بنجامین فرانکلین از این بطری استفاده کرد تا نشان دهد که صاعقه نیز درست شبیه الکتریسیته عمل می‌کند.

هرماده در حالت خنثی، دارای تعداد مساوی بار مثبت و منفی است

ماده دارای بار منفی، افزایش الکترون وبالعکس کاهش الکترون است.

رساناها ونارساناها



در رساناها بارهای الکتریکی آزادانه حرکت می کنند در صورتی که در نارساناها بار الکتریکی آزاد بسیار کم است.

. حاملهای بار در فلزات الکترون های آزادند

آن دسته از مواد که از نظر هدایت الکتریکی بین رساناها و نارساناها قرار می گیرند نیمرسانا نامیده می شوند

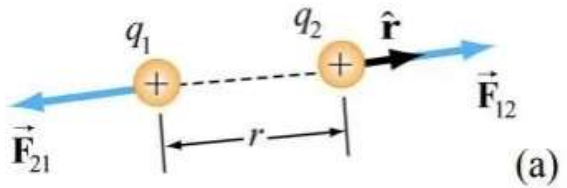
رسانا		نارسانا	
آلومینیوم	2.7×10^{-8}	پی‌وی‌سی	5.4×10^{15}
مس	1.72×10^{-8}	شیشه	1.0×10^{14}
آهن	10.5×10^{-8}	میکا	9.0×10^{13}
جیوه	96×10^{-8}	تفلون	1.0×10^{24}
نیکروم	1.1×10^{-8}	لاستیک سخت	10×10^{12}

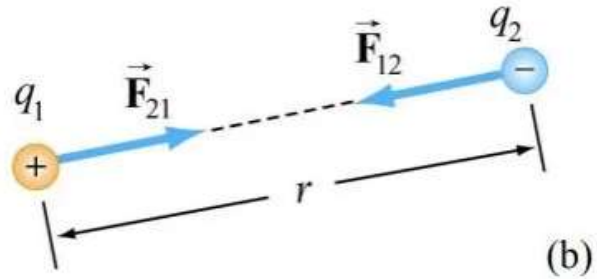
مواد غیر رسانا که به عنوان عایق نیز شناخته می‌شوند موادی هستند که از جریان الکترون جلوگیری کرده یا مانع آن می‌شوند زیرا اتم‌های داخل این مواد حاوی الکترون‌های اضافی مورد نیاز برای عبور بار الکتریکی نیستند.

قانون کولن:

مشاهدات خاصی درباره نیروی الکتریکی به دست آمده است که شامل موارد زیر است:

- ✓ این نیرو بدون تماس فیزیکی بین دو جسم اعمال می‌شود.
- ✓ این نیرو می‌تواند جاذبه یا دافعه باشد؛ اگر دو جسمی که برهم‌کنش دارند، حامل بار همنام باشند، نیروی بین آن‌ها دافعه است، اما اگر بارها ناهمنام باشند، این نیرو جاذبه خواهد بود. این برهم‌کنش‌ها به ترتیب، به دافعه و جاذبه الکتروستاتیکی مربوط می‌شوند.
- ✓ همه اجسام تحت تأثیر این نیرو قرار نمی‌گیرند.
- ✓ اندازه این نیرو با افزایش فاصله بین اجسام، به سرعت کاهش می‌یابد.

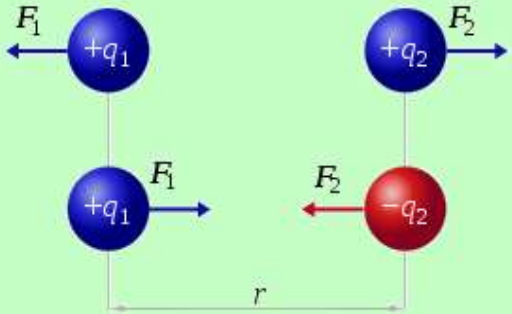




قانون کولن

بارهای یکسان همدیگر را دفع کرده و بارهای مخالف همدیگر را جذب می‌کنند.

- الکترون به الکترون = دفع
- پروتون به پروتون = دفع
- الکترون به پروتون = جذب



$$|F_1| = |F_2| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$

نیروی جذب یا دفع بین دو ذره بار قرار گرفته در فاصله r را می‌توان توسط قانون کولن به این صورت محاسبه کرد:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})} = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$$

- F = نیرو بر حسب نیوتن
- K = ثابت = $10^9 m\ F^{-1}\times 99$
- Q1 = اولین ذره باردار
- Q2 = دومین ذره باردار
- r = فاصله بین دو ذره باردار بر حسب متر

قانون کولن: بیان برداری

به منظور اینکه هم اندازه و هم جهت نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای محاسبه شود. q_1 را در $\mathbf{r}_1$ و q_2 را در $\mathbf{r}_2$ در نظر بگیرید شکل کامل قانون کولن چنین است:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}$$

که در آن r فاصلهٔ بین دو بار است این توصیف عددی قانون کولن را با جهت بردار r_{12} ساده‌تر می‌کند (که با خط واصل q_1 و q_2 موازی است). اگر دو بار هم علامت باشند حاصل ضرب q_1 و q_2 مثبت است و نیروی وارد بر q_1 با بردار $\hat{\mathbf{r}}_{21}$، داده می‌شود در این حالت بارها همدیگر را دفع می‌کنند اگر بارها غیر هم علامت باشند حاصل ضرب q_1 و q_2 منفی است و جهت نیروی وارد بر q۱ در جهت $\hat{\mathbf{r}}_{21}$، است در این حالت بارها همدیگر را جذب می‌کنند.

اصل برهم نهی برای نیروی وارد بر بار کوچک یک سیستم N ذره‌ای چنین است. این در حالی است که q_i و r_i بزرگی مکان اامین بار هستند. R_i یک بردار یکه در راستای $r - r_i$ است (برداری که q_i را به q متصل می‌کند).

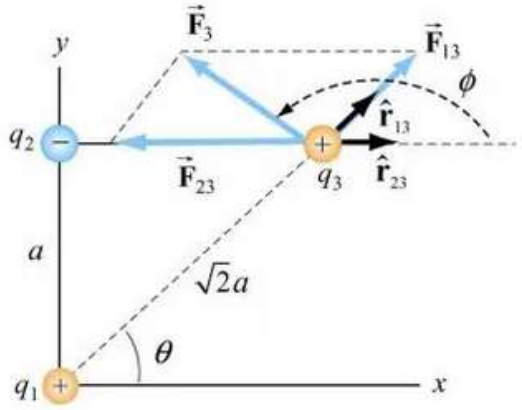
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{R_i^2}\hat{\mathbf{R}}_i$$

قانون کولن

مثال ۱

سه ذره باردار مطابق با شکل زیر در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند.

در این صورت نیروی خالص فرض کنید. بارهای این ذرات به صورت زیر هستند.
نیزوی وارد شده به ذره شماره ۳ چقدر است؟



$$q_1 = 6.0\times10^{-6}\text{C} \quad , \quad q_2 = -q_1 = -6.0\times10^{-6}\text{C} \quad , \quad q_3 = +3.0\times10^{-6}\text{C}$$

$$a = 2.0 \times 10^{-2} m$$

قانون کولن

مثال ۱:

حل: با استفاده از قانون جمع آثار می‌توان نوشت:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = \vec{\mathbf{F}}_{13} + \vec{\mathbf{F}}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}^{\,2}}\hat{\mathbf{r}}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^{\,2}}\hat{\mathbf{r}}_{23}\right)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{13} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

به همین شکل بردار $\hat{\mathbf{r}}_{23}$ را می‌توان برابر با $\hat{i}$ فرض کرد. با جایگذاری این دو بردار در معادله ۱، داریم:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}^{\,2}}\hat{\mathbf{r}}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^{\,2}}\hat{\mathbf{r}}_{23}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{(\sqrt{2}a)^2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) + \frac{(-q_1)q_3}{a^2}\hat{\mathbf{i}}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{a^2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\hat{\mathbf{j}}\right]$$

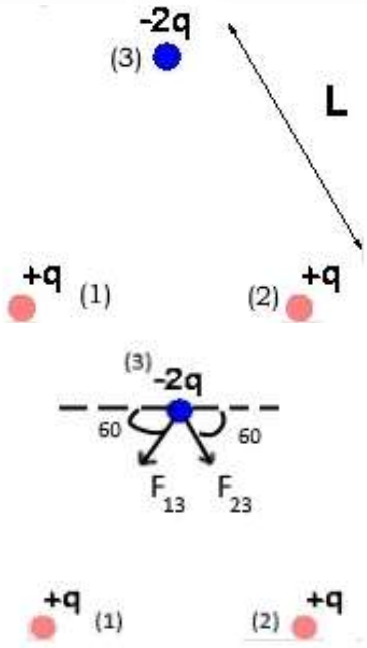
$$F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{a^2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$= (9.0\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{(6.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})(3.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(2.0\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}(0.74) = 3.0\,\mathrm{N}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}/4}{-1+\sqrt{2}/4}\right] = 151.3^\circ$$

قانون کولن

مثال ۲

سه ذره مطابق با شکل زیر در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. اندازه و جهت نیروی وارد شده به ذره شماره (۳) را محاسبه کنید.



اندازه نیروی وارد شده از طرف ذره ۱ که در سمت چپ قرار گرفته، برابر است با:

$$|F| = k\frac{2q^2}{L^2}$$

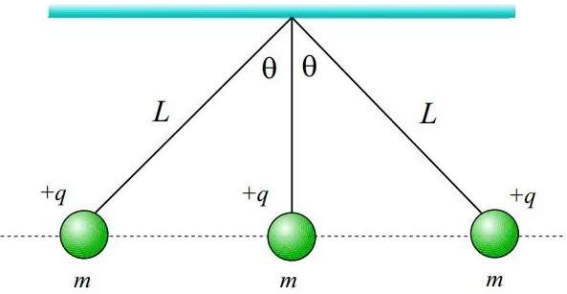
بنابراین با دو برابر کردن عدد بالا، نیروی خالص وارد شده به ذره شماره ۳ برابر با مقدار زیر بدست می‌آید.

$$|F| = k\frac{2q^2\cos(30^\circ)}{L^2}$$

$= 3.9\times10^{-5}$ (N), پایین

$$F_{net\ on\ particle\ 1} = 2 \times (3.9 \times 10^{-5}) = 7.8 \times 10^{-5}\ N$$

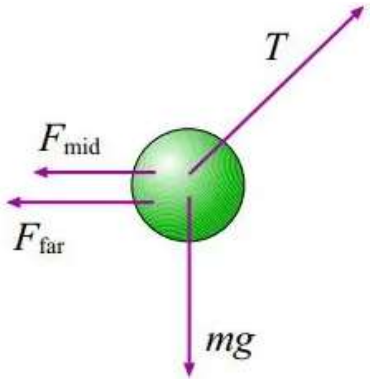
قانون کولن



مثال ۳

مطابق با شکل زیر سه بار الکتریکی به جرم m و بار q در حالت تعادل قرار گرفته‌اند. فرض کنید که طول نخ برابر با $l = 30\ cm$ و جرم ذرات ۰.۱ کیلوگرم باشد. اگر زاویه تعادل نخ با محور عمودی برابر با ۴۵ درجه باشد، اندازه بار q چقدر است؟

به منظور حل مسائل تعادل، در ابتدا بایستی نمودار آزاد اجرام را رسم و نیروهای وارد به آن‌ها را تعیین کرد. در شکل زیر نمودار آزاد مربوط به ذره سمت چپ رسم شده.



همان‌طور که در شکل بالا نیز مشخص شده، ۴ نیرو به این ذره وارد می‌شود. این نیروها به شرح زیر هستند.

- نیروی کشش: T
- نیروی وزن: Mg
- نیروی وارد شده از طرف ذره وسط: F_{mid}
- نیروی وارد شده از طرف ذره سمت راست: F_{far}

قانون کولن

واضح است که با صفر قرار دادن برآیند نیروهای بالا در دو راستای x و y رابطه بین زاویه تعادل و اندازه بار q بدست می‌آید. برای استفاده از قانون کولن در ابتدا بایستی فاصله میان بارها را بدست آوریم؛ بنابراین فاصله بین دو ذره q برابر است با:

$$r_1 = (30.0\,\text{cm})\sin 45.0^\circ = 21.2\,\text{cm} = 0.212\,\text{m} \longrightarrow F_{\text{mid}} = k\frac{q^2}{(0.212\,\text{m})^2}\,.$$

با بدست آمدن فاصله بین دو ذره، نیروی وارد شده از طرف ذره وسط به ذره سمت راست برابر است با:

$$r_2 = 2(30.0\,\text{cm})\sin 45.0^\circ = 2(0.212\,\text{m}) = 0.424\,\text{m} \longrightarrow F_{\text{far}} = k\frac{q^2}{(0.424\,\text{m})^2}\,.$$

$$-k\frac{q^2}{(0.212\,\text{m})^2} - k\frac{q^2}{(0.424\,\text{m})^2} + T\cos 45.0^\circ = 0 \longleftarrow T\sin 45.0^\circ - mg = 0 \Longrightarrow T = \frac{mg}{\sin 45.0^\circ} = 1.39\,\text{N}$$

قانون کولن

از آنجایی که نیروی T را محاسبه کرده‌ایم، بنابراین تنها مجهول در معادله بالا q است. از این رو بار الکتریکی q را می‌توان به صورت زیر بدست آورد.

$$kq^2\left(\frac{1}{(0.212\,\mathrm{m})^2}+\frac{1}{(0.424\,\mathrm{m})^2}\right)=T\cos 45.0^\circ$$

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{T\cos 45.0^\circ}{k(27.8\,\mathrm{m^{-2}})} \\ &= \frac{(1.39\,\mathrm{N})\cos 45.0^\circ}{\left(8.99\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right)(27.8\,\mathrm{m^{-2}})} = 3.93\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2} \end{aligned}$$

$$q = 1.98\times 10^{-6}\,\mathrm{C} = 1.98\,\mu\mathrm{C}$$

پایستگی و کوانتیده بودن بار الکتریکی

پایستگی و کوانتیده بودن بار الکتریکی دو ویژگی مهم بارهای الکتریکی هستند. این واقعیت که همه بارهای مشاهده شده تاکنون همیشه مضرب صحیحی از ذره بنیادی $e = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ هستند به عنوان کوانتیدگی بار الکتریکی شناخته می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت بار الکتریکی برابر است با

$$q = \pm ne$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

مثال ۱: چه مقدار بار الکتریکی لازم است تا به بار الکتریکی ۱ کولن دست پیدا کنیم.

$$q = ne \rightarrow 1 = n \times 1.6 \times 10^{-19}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} = 6.25 \times 10^{18}$$

پایستگی و کوانتیده بودن بار الکتریکی

مثال ۲: تعداد بارهای مثبت و منفی ۲۵۰ گرم آب در یک فنجان را به دست آورید.

پاسخ: فرمول شیمیایی آب H_2O است و جرم مولکولی آن برابر با $18\ g\ mol^{-1}$ است. تعداد مول‌های موجود در 250 گرم آب به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$Nom.\ of\ moles = \frac{Given\ mass}{molecular\ mass} = \frac{250}{18} = 13.89$$

هر **مول** ماده طبق **ثابت آووگادرو** شامل 6.022×10^{23} **مولکول** است. پس 13.89 مول از ماده شامل $13.89 \times 6.022 \times 10^{23}$ مولکول است و تعداد کل مولکول‌ها برابر با 83.66×10^{23} است. تعداد الکترون‌های موجود در هر مولکول آب برابر 10 الکترون است.

بدین ترتیب بار الکتریکی منفی در فنجان برابر است با:

$$83.66 \times 10^{23} \times 10 = 83.66 \times 10^{24}$$

$$83.66 \times 10^{24} \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.34 \times 10^{7}\ C$$

ویژگی‌های بار الکتریکی

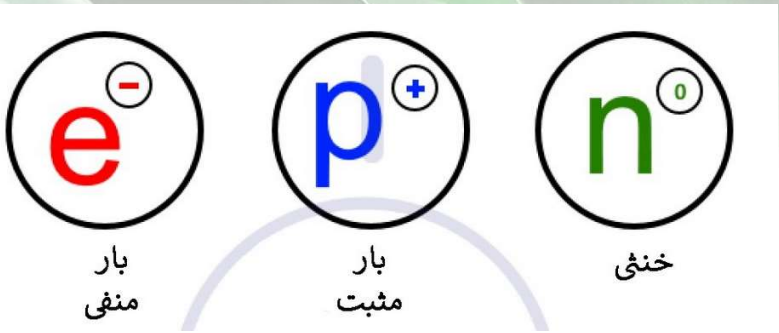
ویژگی‌های بار الکتریکی عبارتند از:

- **بار الکتریکی کوانتیده است.** کمترین مقدار باری که یک جسم می‌تواند داشته باشد، در دستگاه SI، برابر است با $e \equiv 1.602 \times 10^{-19}\ C$. هیچ ذره آزادی نمی‌تواند باری کمتر از این مقدار داشته باشد. از این رو، بار روی تمام اجسام باید مضرب صحیحی از این مقدار باشد.
- **اندازه بار مستقل از نوع آن است.** کوچکترین بار مثبت ممکن $+1.602 \times 10^{-19}\ C$ و کوچکترین بار منفی ممکن برابر با $-1.602 \times 10^{-19}\ C$ است؛ قدر مطلق این مقادیر دقیقاً با هم برابرند.
- **بار پایسته است.** بار الکتریکی نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود، بلکه فقط از جایی به جای دیگر و از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌شود. از این رو، می‌توان گفت که بار خالص جهان ثابت است.
- **بار در سیستم‌های بسته پایسته است.** از آنجایی که بین یک سیستم بسته و محیط اطراف آن، تبادل بار الکتریکی وجود ندارد، بار خالص در یک سیستم بسته ثابت خواهد بود.

دو مورد آخر به عنوان قانون پایستگی بار شناخته می‌شوند.

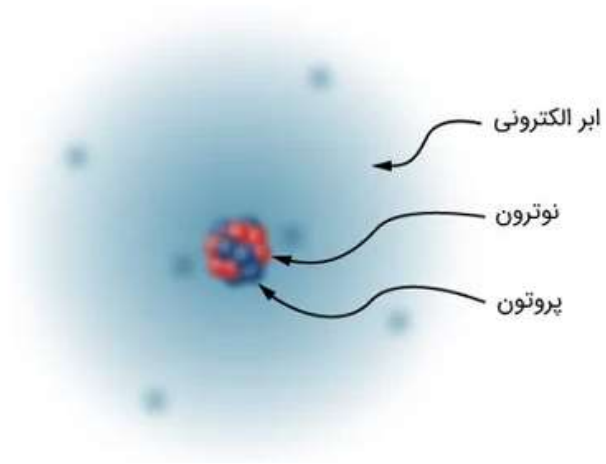
بار و ماده

ماده ترکیبی از سه نوع ذره ،پروتون ،نوترون ، و الکترون است که خواص و جرم این ذرات در جدول آمده است:



الکترون

ذره با بار منفی اولین ذره ای بود که کشف شد. در سال ۱۸۹۷ فیزیکدان انگلیسی جی. تامسون در حال مطالعه چیزی بود که در آن زمان به عنوان اشعه کاتد شناخته می شد. چند سال قبل ، فیزیکدان انگلیسی ویلیام کروکس نشان داده بود که این "اشعه ها" دارای بار منفی هستند ، اما آزمایشات وی نتوانست بیش از این را بیان کند.



بار و ماده

پروتون

از آنجا که کل اتم از نظر الکتریکی خنثی است ، سوال بعدی این بود که چگونه بارهای مثبت و منفی در داخل اتم توزیع می شود. تامسون خود تصور می کرد که الکترون هایش در نوعی خمیر با بار مثبت جاسازی شده اند که در تمام حجم اتم پخش شده است.

با این حال ، در سال ۱۹۰۸ ، ارنست رادرفورد ، فیزیکدان نیوزلندی نشان داد که بارهای مثبت اتم در یک هسته کوچک – به نام "هسته اتم" – وجود دارد که تنها بخش بسیار کوچکی از حجم کلی اتم را اشغال می کند ، اما بیش از ۹۹ درصد جرم را در خودنگه داشته است.

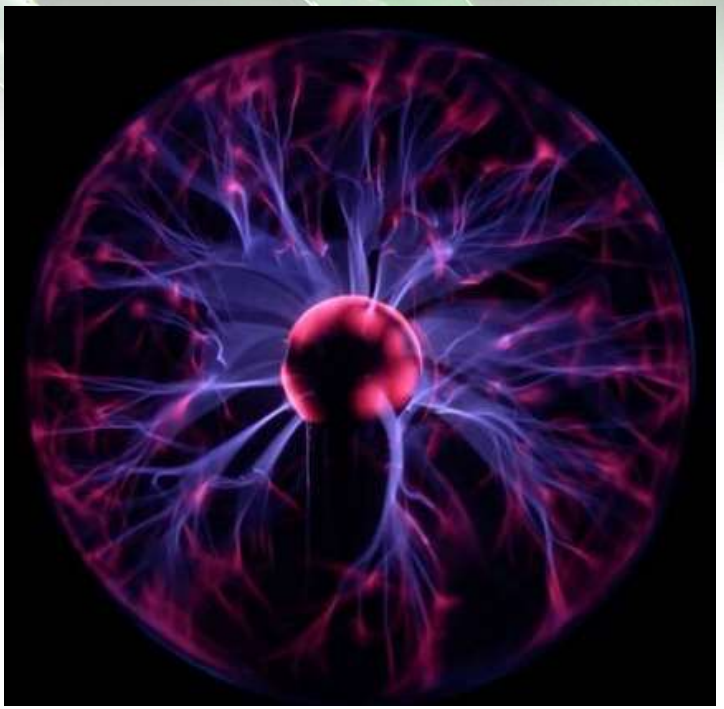
نوترون

بنابراین اتم ها از نظر الکتریکی به طور کلی خنثی می شوند. با این حال ، به زودی مشخص شد که اگرچه سبک ترین اتم ، هیدروژن ، در واقع یک پروتون واحد داشت ، اما سنگین ترین اتم بعدی – هلیوم – دو برابر پروتون (دو) ، اما چهار برابر جرم هیدروژن دارد.

فصل ۲۲: میدان الکتریکی



فصل ۲۲: میدان الکتریکی



میدان الکتریکی

خطوط نیرو

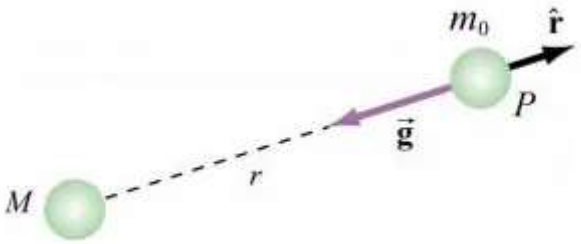
محاسبه

بار نقطه ای در میدان الکتریکی

دوقطبی در میدان الکتریکی

فصل ۲۲: میدان گرانشی و میدان الکتریکی

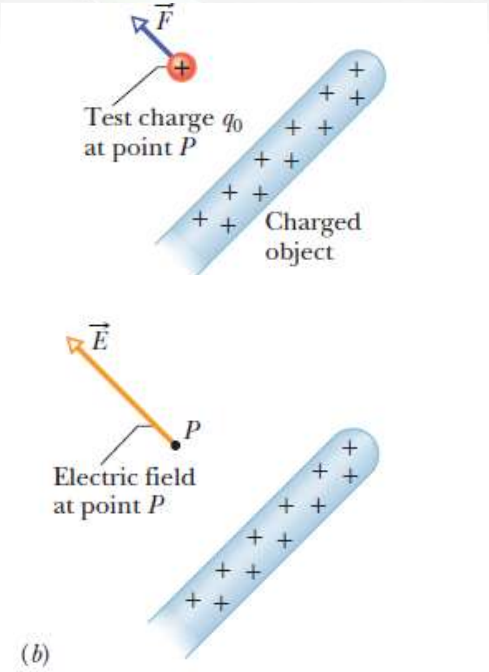
به هر نقطه در فضای نزدیک به زمین می توان یک میدان گرانشی نسبت داد که شدت آن :



در حقیقت میدان گرانشی را می‌توان همچون میدان الکتریکی، با استفاده از فرمول زیر بیان کرد:

$$\vec{\mathbf{g}} = \lim_{m_0 \to 0} \vec{\mathbf{F}}_m / m_0$$

فصل ۲۲: میدان الکتریکی



اگر بار آزمونی را در فضا نزدیک یک میله باردار قرار دهیم بر آن نیروی الکترو استاتیک وارد میشود بطور مشابه می گوییم که در این فضا میدان الکتریکی وجود دارد.

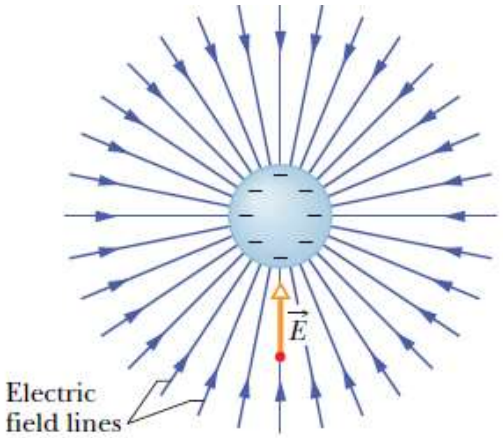
بارهای الکتریکی از طریق میدانهای الکتریکی اطرافشان بر یکدیگر نیرو وارد می کنند.

خطوط نیرو

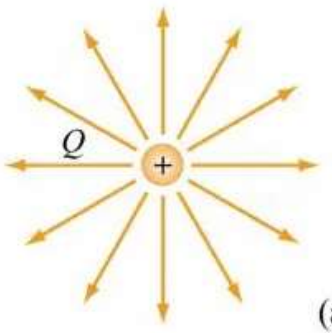
از خطوط نیرو برای نمایش تصویری اندازه و جهت میدان الکتریکی استفاده می شود.

مماس بر هر خط نیرو در هر نقطه راستای میدان الکتریکی را بدست می دهد.

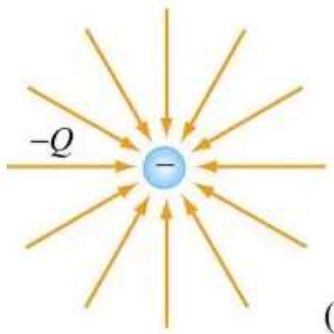
تعداد خطوط موجود در واحد سطح مقطع (عمود بر خط) با بزرگی میدان الکتریکی متناسب است.



خطوط نیرو اطراف کره با بار منفی



(a)



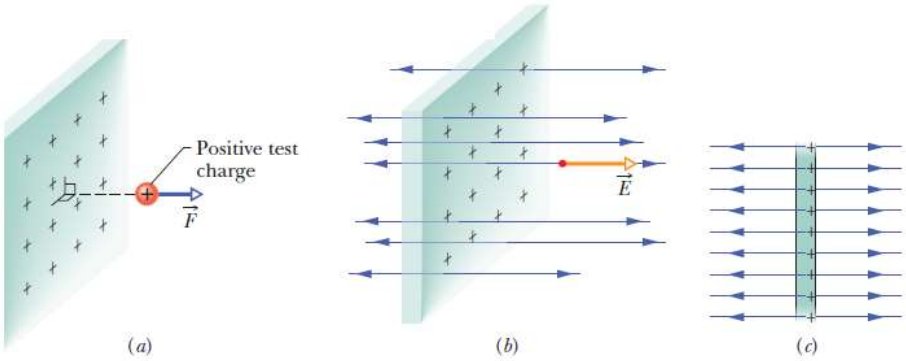
(b)

خطوط نیرو

در حالت کلی می‌توان ویژگی‌های زیر را برای خطوط میدان تعریف کرد:

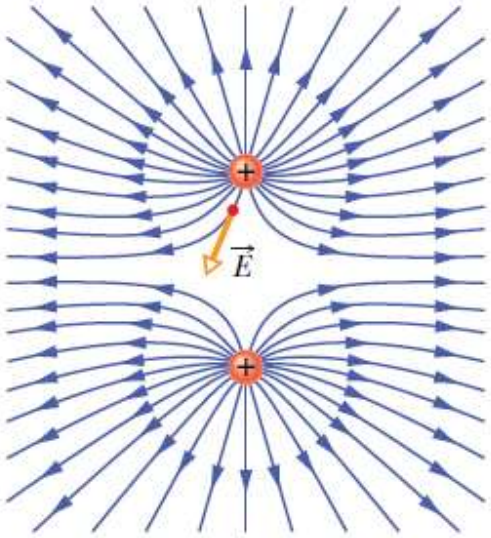
- ✓ جهت میدان الکتریکی در یک نقطه برابر با بردار مماس بر خطوط میدان در آن نقطه در نظر گرفته می‌شود.
- ✓ تعداد خطوط میدان در واحد سطح، در صفحه عمود بر خطوط، نشان‌دهنده قدرت میدان در صفحه مد نظر است.
- ✓ خطوط میدان از ذرات با بار مثبت شروع شده و به ذرات با بار منفی ختم می‌شوند.
- ✓ تعداد خطوطی که از بار مثبت خارج و یا به بار منفی وارد می‌شوند، نشان‌دهنده اندازه بارهای الکتریکی مذکور هستند.
- ✓ دو خط میدان الکتریکی، هیچ‌گاه همدیگر را قطع نخواهند کرد.

خطوط نیروی یک ورقه با بار مثبت:

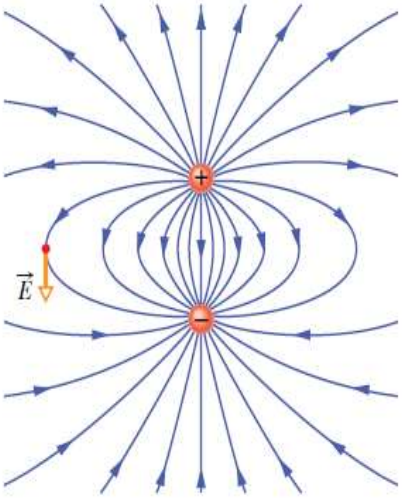


خطوط نیرو

خطوط نیرو بارهای مساوی و مخالف



خطوط نیرو دو بار مثبت و مساوی



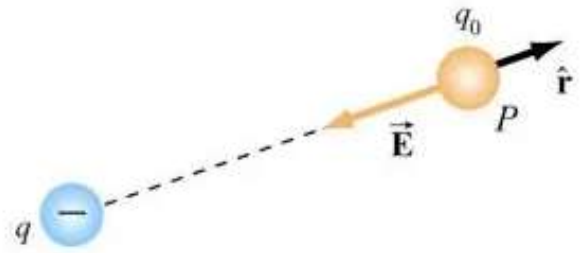
بزرگی برخی از مقادیر میدان‌های الکتریکی			
چشمه	بزرگی میدان (N/C)	چشمه	بزرگی میدان (N/C)
سیم کشی‌های داخل منزل	10^{-2}	در نزدیکی شانهٔ باردار	$\approx 10^{3}$
امواج رادیویی	$\approx 10^{-1}$	در نزدیکی فرستندهٔ رادار	7×10^{3}
گوشی همراه	35 ـ 50	جو (توفان تندری)	10^{4}
۳۰ سانتی‌متری از یک دستگاه پخش صوت	۹۰	در نزدیکی سطح کلاهک مولد وان‌دوگراف	2×10^{6}
جو (هوای آرام)	≈۱۵۰	فرو ریزش الکتریکی در هوا	3×10^{6}
آفتاب (متوسط)	10^{3}	در سطح هستهٔ اورانیم	2×10^{21}

تعریف میدان الکتریکی

نیروهای الکترواستاتیکی همانند نیروی گرانشی در امتداد یه خط مستقیم عمل می‌کنند. این نیروها حتی در زمانی که دو ذره در تماس با یکدیگر نباشند، نیز وجود دارند. برای توضیح این پدیده، مفهومی تحت عنوان میدان الکتریکی تعریف می‌شود. میدان الکتریکی خاصیتی است که هر بار الکتریکی در اطراف خود ایجاد می‌کند.

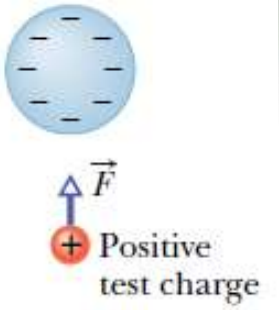
برای بدست آوردن اندازه و مقدار این خاصیت از جزئی فرضی تحت عنوان بار آزمون استفاده می‌شود. این بار در حقیقت موجودی است که میدان الکتریکی ایجاد شده توسط بار q را حس می‌کند. میدان الکتریکی، برداری فیزیکی اطراف یک بار است که با استفاده از عبارت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}}_e}{q_0}$$



فصل ۲۲: میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای

اگر بار الکتریکی q در نقطه‌ای از فضا با بردار مکان r، قرار داشته باشد، میدان الکتریکی حاصل از این بار در نقطه دیگری با بردار مکان r' به صورت زیر محاسبه می‌شود. با قرار دادن بار مثبت آزمون q' در این نقطه، از طرف بار q بر بار آزمون نیرویی وارد می‌شود که مقدارش از قانون کولن محاسبه می‌شود:



$$\vec{F} = \frac{q.q'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}$$

$$\hat{a} = (\vec{r'} - \vec{r})/|\vec{r'} - \vec{r}|$$

$$\vec{F} = \frac{q.q'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r'} - \vec{r}|^3}(\vec{r'} - \vec{r})$$

(a)

با تقسیم نیروی $\vec{F}$بر مقدار بار q'، شدت میدان الکتریکی به‌دست می‌آید. میدان الکتریکی $\vec{E}$ حاصل از بار نقطه‌ای به فاصله r از مبدأ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r'} - \vec{r}|^3}(\vec{r'} - \vec{r})$$

جمع بندی میدان الکتریکی

- ✓ **میدان الکتریکی کمیتی برداری است**، یعنی علاوه بر مقدار، جهت نیز دارد؛ زیرا میدان الکتریکی به صورت نسبت نیرو بر بار تعریف شده و چون نیرو برداری است، میدان الکتریکی نیز برداری خواهد بود.
- ✓ **میدان الکتریکی داخل یک رسانا همواره برابر صفر است**. وقتی یک رسانا در میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، بر بارهای آزاد آن نیرو وارد می‌شود. این نیرو باعث به حرکت درآمدن موقت بارها می‌شود؛ به‌طوری‌که بارهای منفی (الکترون‌های آزاد) در خلاف جهت میدان و بارهای مثبت در جهت میدان حرکت کرده، به سطح رسانا می‌رسند. در حالت تعادل، تراکم بارهای منفی و مثبت در دو سمت مخالف در رسانا باعث ایجاد یک میدان الکتریکی داخل رسانا می‌شود که جهتش، عکس میدان الکتریکی خارجی است؛ بنابراین، برآیند این دو میدان در داخل رسانا، صفر می‌شود.
- ✓ در بیشتر موارد میدان الکتریکی از نظر اندازه و جهت از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند. اگر اندازه و جهت میدان در منطقه‌ای ثابت باشد، در این صورت میدان الکتریکی را یکنواخت یا ثابت می‌گویند.

میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای

مطابق با اصل برهم نهی میدان‌های الکتریکی، میدان الکتریکی ناشی از چندین بار الکتریکی در فضا برابر است با مجموع میدان‌هایی که هر یک از بارهای الکتریکی در غیاب سایر بارها در فضا ایجاد می‌کنند، یعنی:

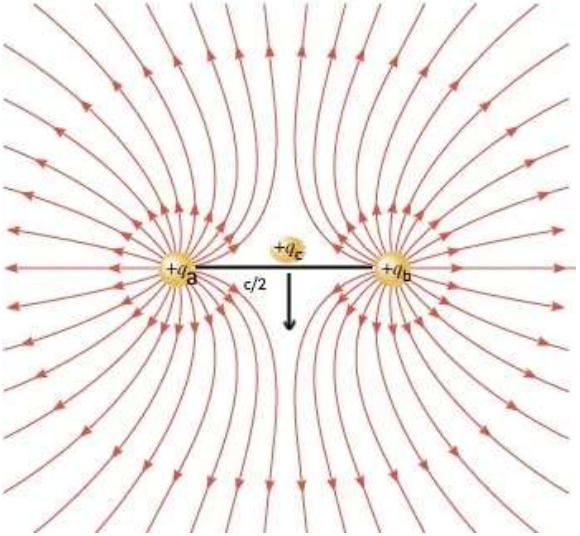
$$\overrightarrow{E_T} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \dots$$

شدت میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای، برآیند (مجموع برداری) میدان‌های بارها است:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

فصل ۲۲: میدان الکتریکی

مثال مطابق شکل زیر دو بار q_a و q_b در فاصله c از یکدیگر قرار گرفته‌اند. تصور کنید که دقیقا در وسط این دو بار، بار جدید q_c را قرار می‌دهیم.



در این حالت نیروی وارد شده به بار q_c چقدر است؟ بارها و فواصل در این مسئله به شرح زیر هستند.

$$q_a = 50\mu C \ , \ q_b = 100\mu C, \ q_c = 20\mu C, \ c = 1.0 \ m$$

فصل ۲۲: میدان الکتریکی

حل: بنابراین میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_a و q_b به ترتیب برابر هستند با:

$$E_a = k_e \frac{q_a}{(c/2)^2} = (8.988 \times 10^9) \frac{(50 \times 10^{-6})}{(0.5)^2} = 1.80 \times 10^6 \,\mathrm{N\,C^{-1}}.$$

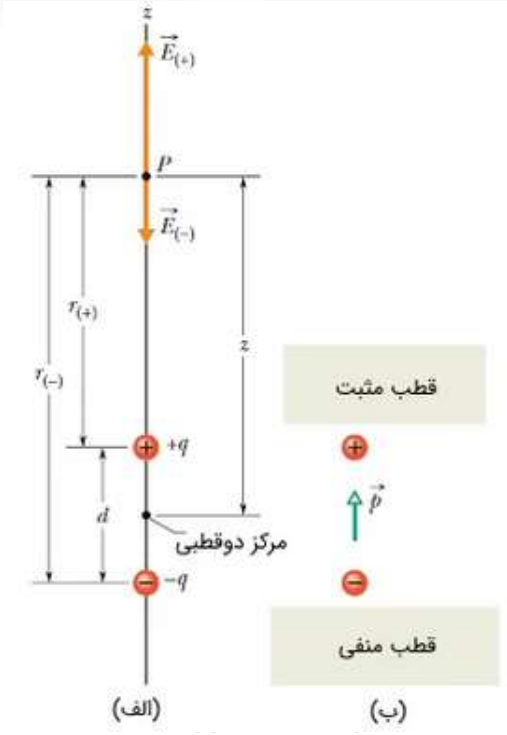
$$E_b = -k_e \frac{q_b}{(c/2)^2} = -(8.988 \times 10^9) \frac{(100 \times 10^{-6})}{(0.5)^2} = -3.60 \times 10^6 \,\mathrm{N\,C^{-1}}.$$

در نتیجه برآیند میدان الکتریکی را می‌توان به شکل زیر بدست آورد:

$$E = E_a + E_b = -1.8 \times 10^6 \,\mathrm{N\,C^{-1}}$$

دوقطبی الکتریکی

مثال: دو بار الکتریکی غیر همنام که در فاصله مشخصی از یکدیگر قرار گرفته باشند، تشکیل یک دوقطبی الکتریکی را می‌دهند.



همان‌طور که می‌دانید، میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای در مکان r به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad \left(\frac{N}{C}\right) \longrightarrow E_P = E_+ - E_-$$

$$r_+ = z - \frac{d}{2}$$

$$r_- = z + \frac{d}{2}$$

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z-\frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z+\frac{1}{2}d)^2}. \end{aligned}$$

دوقطبی الکتریکی

حال با استفاده از اتحاد $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$، می‌توانیم قسمت پرانتزی رابطه فوق را به شکل زیر بنویسیم:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{d}{2z}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{d}{2z}\right)^2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{2d/z}{\left(1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\frac{d}{\left(1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2}.$$

از آنجایی که معمولاً میدان الکتریکی در نقطه‌ای دور از دوقطبی محاسبه می‌شود ($z >> d$)، حاصل عامل $\frac{d}{2z}$ بسیار کوچک‌تر از یک شده و لذا می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. در نتیجه:

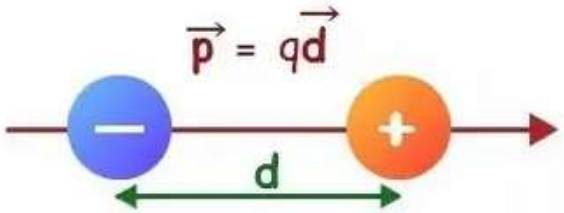
$$E_P=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{qd}{z^3}$$

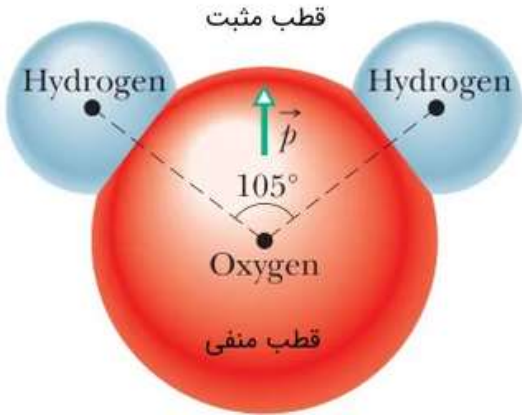
$$E_P=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p}{z^3}$$

گشتاور دو قطبی الکتریکی

دوقطبی الکتریکی

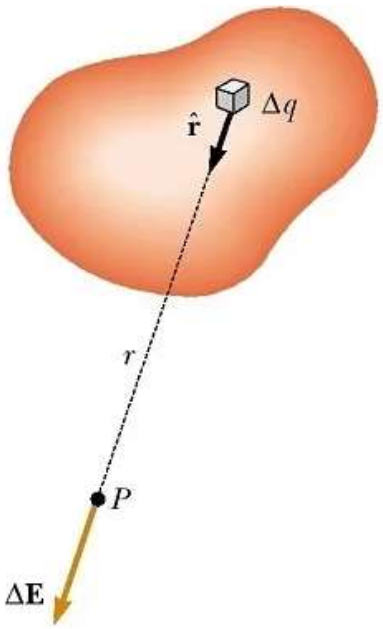
در رابطه فوق به عبارت qd، تکانه یا ممان دوقطبی الکتریکی گفته شده که آن را با $\vec{p}$ نمایش می‌دهند. طبق تعریف، واحد سنجش $\vec{p}$، کولن متر است. جهت $\vec{p}$ در یک دوقطبی همیشه از بار منفی به سمت بار مثبت است (شکل 3). لازم به ذکر است که برخی مراجع از بردار p به عنوان گشتاور دوقطبی الکتریکی یاد می‌کنند و به $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$، گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی می‌گویند. در ادامه مقاله با بردار $\vec{\tau}$ آشنا خواهیم شد.





توزیع پیوسته بارهای الکتریکی

در واقعیت معمولا میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته‌ای از بار مورد بررسی قرار می‌گیرد. در چنین مسائلی در ابتدا میدان ناشی از دیفرانسیلی از بار را محاسبه کرده و پس از آن با استفاده از انتگرال‌گیری، میدان تمامی بارها را محاسبه می‌کنیم. در حقیقت باری به اندازه dq را در نظر می‌گیریم و میدان ناشی از آن را بدست می‌آوریم. در شکل زیر دیفرانسیل بار و میدان الکتریکی ناشی از این جزء نشان داده شده.



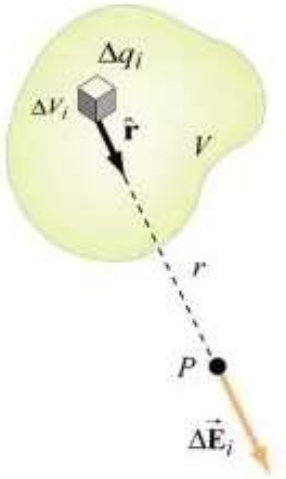
مهم‌ترین نکته در این روش یافتن رابطه‌ای منظم بین بارها و میدان الکتریکی به نحوی است که امکان انتگرال‌گیری وجود داشته باشد. به‌منظور محاسبه میدان ناشی از توزیع پیوسته‌ای از بارهای الکتریکی در ابتدا نیاز داریم تا مفهومی تحت عنوان «چگالی بار» را تعریف کنیم.

چگالی بار

همان‌طور که در بالا نیز بیان شد، میدان الکتریکی ناشی از تعدادی بار الکتریکی را می‌توان با استفاده از روش جمع آثار بدست آورد. معمولا توزیع‌های پیوسته بار الکتریکی، در قالب مفاهیمی هم‌چون **چگالی حجمی، سطحی و یا خطی بار الکتریکی بیان می‌شود.**

چگالی حجمی بار الکتریکی:

شکل زیر توزیع حجمی پیوسته‌ای از بارهای الکتریکی را نشان می‌دهد. بدیهی است که این توزیع، میدانی الکتریکی را در نقطه دلخواه ایجاد خواهد کرد.



از این رو در ابتدا جزء حجمی به اندازه ΔV_i را در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید این جزء شامل باری الکتریکی است که آن را با Δq_i نشان می‌دهیم. با این فرضیات چگالی حجمی بار الکتریکی که تابعی از بردار **r** است را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\rho(\vec{\mathbf{r}}) = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta V_i} = \frac{dq}{dV} \quad \longrightarrow \quad Q = \sum_i \Delta q_i = \int_V \rho(\vec{\mathbf{r}})\, dV$$

چگالی بار

چگالی سطحی بارهای الکتریکی

مشابه با حالت حجمی، در حالت مواجه با مسئله‌ای دوبعدی، می‌توان از مفهوم چگالی سطحی بار الکتریکی استفاده کرد. از این رو چگالی سطحی سیستمی با مساحت سطح و بار با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{dq}{dA} \longrightarrow Q = \iint_S \sigma(\vec{\mathbf{r}})\, dA$$

چگالی خطی بارهای الکتریکی

میله‌ای به طول مشخص را تصور کنید که حاوی باری الکتریکی است. برای این میله چگالی خطی به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\lambda(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{dq}{d\ell} \longrightarrow Q = \int_{\text{line}} \lambda(\vec{\mathbf{r}})\, d\ell$$

معمولا توزیع بار در مسائل را به صورت یکنواخت در نظر می‌گیرند.

میدان الکتریکی توزیع پیوسته بارهای الکتریکی

برای محاسبه میدان الکتریکی در ابتدا میدان ناشی از بار جزئی dq را با استفاده از رابطه زیر بیان می‌کنیم.

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

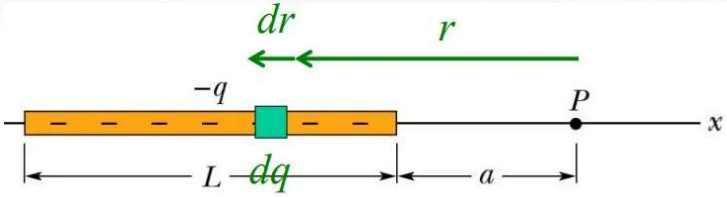
به منظور محاسبه میدان کل، بایستی از رابطه بالا، در تمامی دامنه انتگرال گرفت.

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

برای درک بهتر مفهوم توزیع بارهای الکتریکی، توجه شما را به مثال‌های زیر جلب می‌کنیم.

میدان الکتریکی توزیع پیوسته بارهای الکتریکی

مثال : مطابق شکل زیر میله‌ای را تصور کنید که باری در خود نگه داشته است. فرض کنید که توزیع بار در این میله به صورت کاملا یکنواخت باشد. میدان الکتریکی از لبه سمت راست میله چقدر است؟



همان‌طور که گفتیم، برای حل چنین مسائلی در ابتدا بایستی الگویی برای توزیع بار تعریف کنیم. از آنجایی که در این مسئله بار به صورت یکنواخت در میله توزیع شده، بنابراین می‌توان چگالی خطی بار الکتریکی را به صورت زیر تعریف کرد.

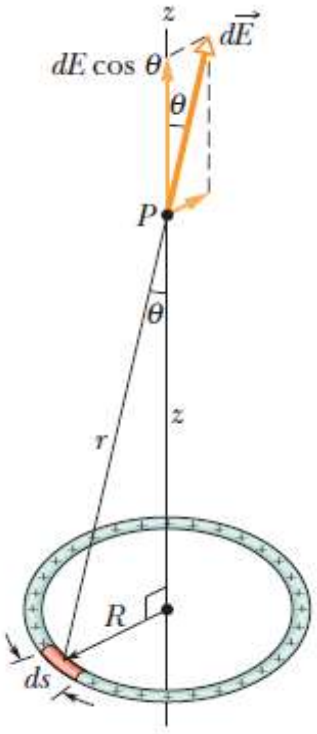
$$\lambda = -q / L$$

در مرحله دوم بخشی کوچک از میله را در نظر می‌گیریم و میدان الکتریکی ناشی از آن را محاسبه می‌کنیم. بنابراین با توجه به چگالی تعریف شده، داریم:

$$dq = \lambda\, dr, \quad dE = k\frac{dq}{r^2} = k\lambda\frac{dr}{r^2} \longrightarrow E = \int dE = k\lambda\int_a^{a+L}\frac{dr}{r^2} = k\lambda\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{a+L} = k\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)$$

محاسبه میدان حلقه

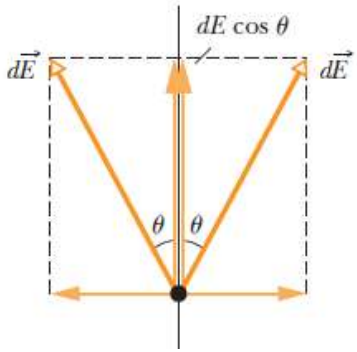
مثال : شکل زیرحلقه ای با بار و شعاع مشخص را نشان مشخص میدهد . میدان ناشی از این توزیع را در نقطه ای از محور حلقه به دست آورید.



از آنجایی که توزیع بار به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده، بنابراین می‌توان جزء بار الکتریکی و دیفرانسیل میدان ناشی از آن را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$dq = \lambda\, ds. \longrightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}. \longrightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{(z^2 + R^2)}.$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}.$$



محاسبه میدان حلقه

$$dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda}{(z^2+R^2)^{3/2}}ds.$$

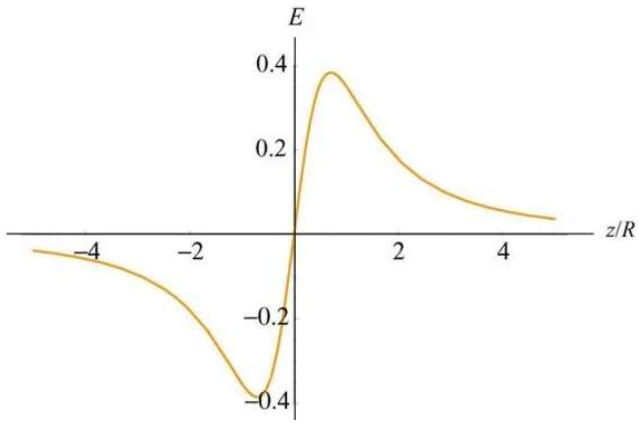
$$E = \int dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds$$

$$= \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

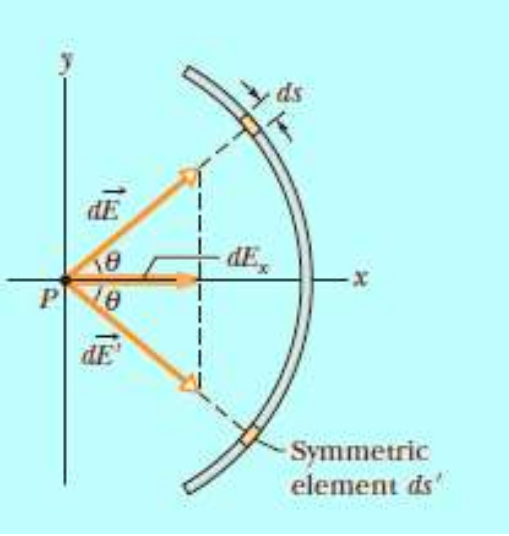
$z \gg R$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}$$



محاسبه میدان کمان باردار

مثال: میدان الکتریکی یک کمان ۱۲۰ درجه باردار را در مرکز آن بیابید.



$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\, ds.$$

$$ds = r\, d\theta,$$

$$\lambda = \frac{\text{charge}}{\text{length}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0.477Q}{r}.$$

$$E = \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\, r\, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-60^\circ}^{60^\circ}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big[\sin\theta\Big]_{-60^\circ}^{60^\circ}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)]$$

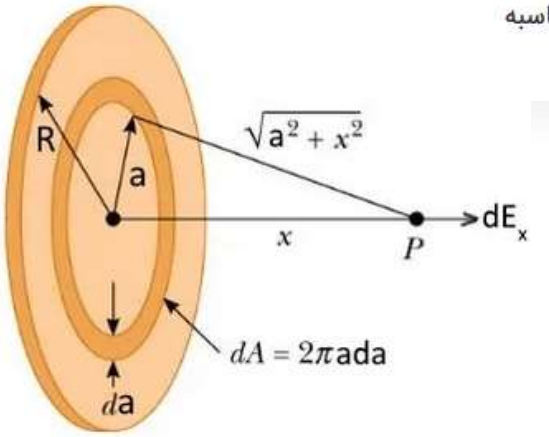
$$= \frac{1.73\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

$$= \frac{(1.73)(0.477Q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{0.83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

محاسبه میدان دیسک

مثال مطابق با شکل زیر فرض کنید، می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار Q روی دیسکی به شعاع R را در فاصله x از دیسک محاسبه کنیم.



با توجه به یکنواخت بودن توزیع بار، چگالی سطحی بار الکتریکی برابر با مقدار زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

مساحت حلقه کوچک در نظر گرفته شده، برابر است با:

$$dA = 2\pi a\, da$$

$$dq = \sigma dA = 2\pi a \sigma\, da$$

$$dE_x = \frac{kx2\pi a\sigma\, da}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$\int X^m\, dX = \frac{X^{m+1}}{m+1},$$

محاسبه میدان دیسک

حاصل انتگرال بالا را می‌توان با استفاده از روش تغییر متغیر محاسبه کرد. پس از محاسبه انتگرال، میدان الکتریکی ناشی از دیسک، به صورت زیر بدست می‌آید.

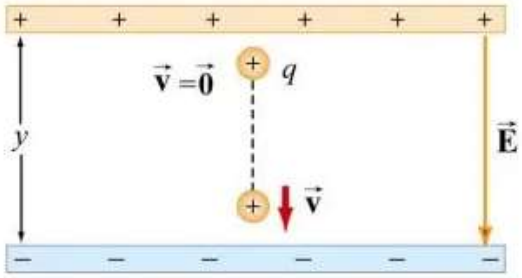
$$E_x = kx\pi\sigma\left[-\frac{1}{2\left(x^2+a^2\right)^{1/2}}\right]_0^R \longrightarrow E_x = 2\pi k\sigma\left(1-\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\right)$$

$$R\to\infty \longrightarrow E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

بار نقطه ای در میدان الکتریکی

در این بخش می خواهیم بدانیم که بر بارها ی واقع در میدان الکتریکی چه نیرو و گشتاور نیرویی وارد می شود.

میدان الکتریکی بر ذره باردار نیرویی وارد می کند که :



$$\vec{\mathbf{E}} = -E_y\,\hat{\mathbf{j}}$$

هرگاه باری در میدان الکتریکی قرار گیرد، میدان مذکور به آن نیرو وارد می‌کند. بنابراین در حالت کلی نیروی وارد شده به باری که در میدان قرار گرفته برابر است با:

$$\vec{F} = \vec{E}\,q$$

از طرفی با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان شتاب وارد شده به ذره را به شکل بدست آورد.

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_e}{m} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m} = -\frac{qE_y}{m}\hat{\mathbf{j}}$$

بار نقطه ای در میدان الکتریکی

سرعت ذره در لحظه رسیدن به صفحه دوم را می‌توان بشکل زیر بدست آورد.

$$v_y = \sqrt{2\,|a_y|\,y} = \sqrt{\frac{2yqE_y}{m}}$$

جالب است بدانید که انرژی جنبشی ذره در لحظه رسیدن به صفحه پایین، برابر است با:

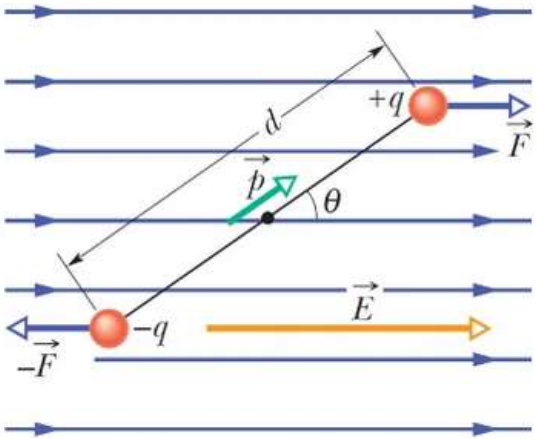
$$K = \frac{1}{2}mv_y^2 = qE_y y$$

دوقطبی در میدان الکتریکی

به دوقطبی الکتریکی قرار گرفته در میدان الکتریکی خارجی، گشتاور وارد می‌شود.

نیروی بر آیند صفر است ولی گشتاور نیرو ها صفر نیست و برابر است با :

که می توان آن را به صورت برداری زیر نوشت:

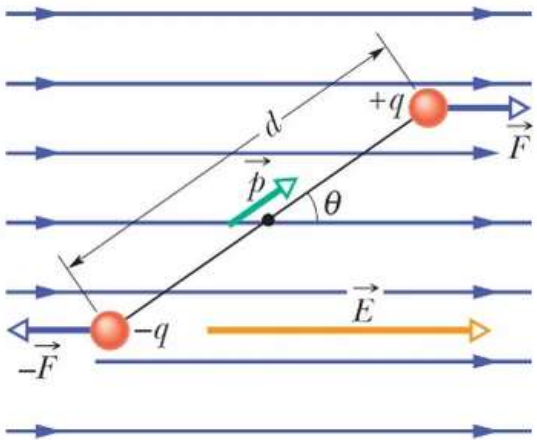


$$\tau = Fx\sin\theta + F(d-x)\sin\theta \longrightarrow \begin{cases} \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \\ \tau = pE\sin\theta \end{cases}$$



انرژی پتانسیل دو قطبی الکتریکی

محاسبه انرژی پتانسیل یک دو قطبی درمیدان خارجی :



$$U = -W = -\int_{90^\circ}^{\theta} \tau \, d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin\theta \, d\theta.$$

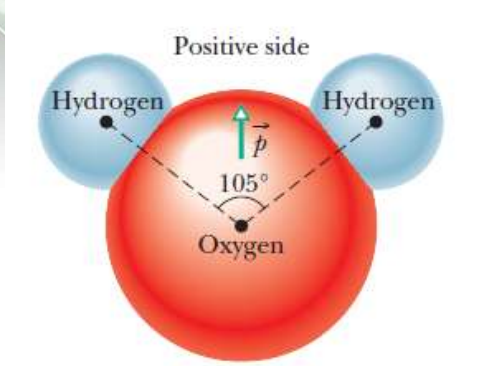
$$U = -pE\cos\theta.$$

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} \quad \text{(potential energy of a dipole).}$$

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_i),$$

$$W_a = -W = (U_f - U_i).$$

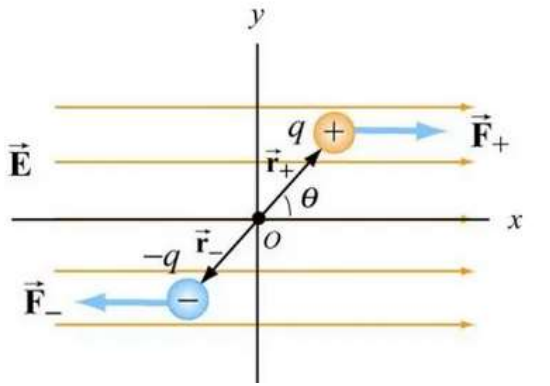
دوقطبی در میدان الکتریکی



به مجموعه دو ذره با بار برابر و علامت مخالف، دوقطبی الکتریکی گفته می‌شود. دو قطبی را در نظر بگیرید که در یک میدان الکتریکی قرار گرفته.

با فرض این‌که زاویه بردار گشتاور آن با محور x برابر با θ باشد، می‌توان گفت:

$$\vec{\mathbf{p}} = 2qa(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})$$



از آنجایی که نیروی برابر ولی با جهت مخالف به دو قطبی وارد می‌شود، بنابراین نیروی خالص وارد شده به مجموعه دوبار برابر با صفر است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{net}} = \vec{\mathbf{F}}_+ + \vec{\mathbf{F}}_- = 0$$

دوقطبی در میدان الکتریکی

اگرچه برآیند این نیروها صفر است، اما منجر به ایجاد گشتاور خالصی حول نقطه O خواهند شد. این گشتاور به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}}_+ \times \vec{\mathbf{F}}_+ + \vec{\mathbf{r}}_- \times \vec{\mathbf{F}}_- = (a\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + a\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}) \times (F_+\,\hat{\mathbf{i}}) + (-a\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - a\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}) \times (-F_-\,\hat{\mathbf{i}})$$
$$= a\sin\theta\,F_+(-\hat{\mathbf{k}}) + a\sin\theta\,F_-(-\hat{\mathbf{k}})$$
$$= 2aF\sin\theta(-\hat{\mathbf{k}})$$

$$\tau = 2a(qE)\sin\theta = (2aq)E\sin\theta = pE\sin\theta \longrightarrow \vec{\tau} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$$

فصل ۲۳: قانون گاوس



فصل ۲۳: قانون گاوس



مقدمه

شار میدان الکتریکی

قانون گاوس

قانون گاوس و قانون کولن

رسانای عایق بندی شده

اثبات تجربی قوانین گاوس و کولن

قانون گاوس – بعضی کاربردها

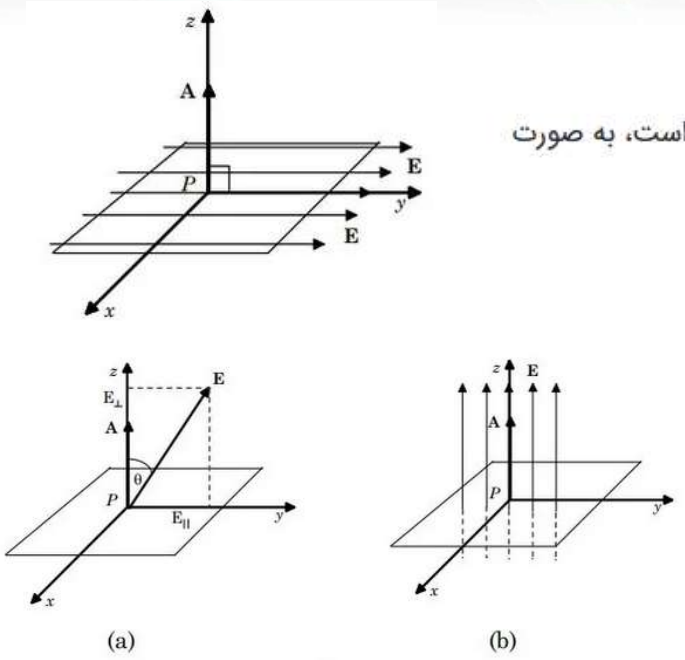
فصل ۲۳: شار میدان الکتریکی

- ملاحظه کردیم که برای بدست آوردن میدان با آگاهی داشتن از توزیع بار می توان میدان را درنقاط فضای اطراف توزیع بار از روش انتگرالگیری محاسبه کرد. ✓
- این روش بسیار پر زحمت است. ✓
- روش دیگر محاسبه میدان استفاده از قانون گاوس است. ✓
- تنها مسائلی را می توان با قانون گوس حل کرد که توزیع بار تقارن کافی داشته باشد مانند با ر نقطه ای ، بار با توزیع یکنواخت کروی و..... ✓
- قبل از بحث قانون گوس به تعریف مفهوم شار الکتریکی می پردازیم. ✓

فصل ۲۳: شار میدان الکتریکی

به میزان خطوطی از میدان الکتریکی که از یک منبع و به صورت عمود بر یک صفحه می‌گذرند، شار الکتریکی گذرنده از آن سطح گفته می‌شود.

شار الکتریکی با ضرب داخلی بردارها در ارتباط است.



از آنجایی که میدان الکتریکی کمیتی برداری است، مقدار خطوط عبوری از یک سطح را که همان تعریف شار الکتریکی است، به صورت حاصل ضرب نقطه‌ای (**ضرب داخلی**) بردار میدان الکتریکی ($\vec{E}$) در بردار عمود بر سطح ($\vec{A}$) تعریف می‌کنند. یعنی:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = |E||A| \cos\theta$$

فصل ۲۳: شار میدان الکتریکی

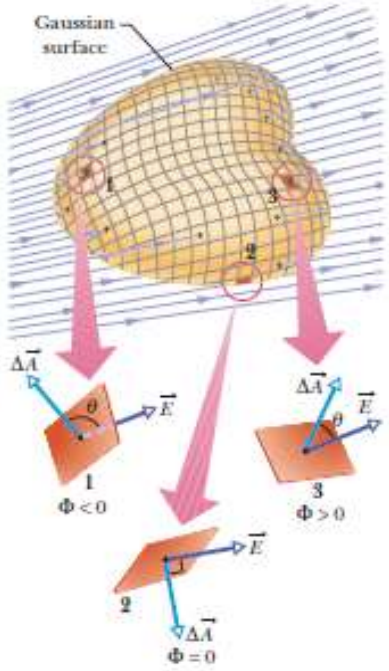
به عبارت دیگر، جهت محاسبه دقیق شار الکتریکی گذرنده از یک سطح، ما باید به محاسبه حاصل ضرب نقطه‌ای بردار میدان الکتریکی و بردار عمود بر سطح در جزءهای کوچک پرداخته و در نهایت مجموع آن‌ها را حساب کنیم.

دلیل این امر این است که زاویه بردار میدان الکتریکی ($\vec{E}$) با بردار عمود بر سطح ($\vec{A}$) در همه‌جای سطح یکسان نیست. پس عبارت را می‌توانیم به صورت جمع (انتگرال) تمامی خطوط میدان گذرنده از سطح کوچک dA بنویسیم:

$$\Phi = \int \vec{E} . d\vec{A} = \int E\, dA \cos\theta$$

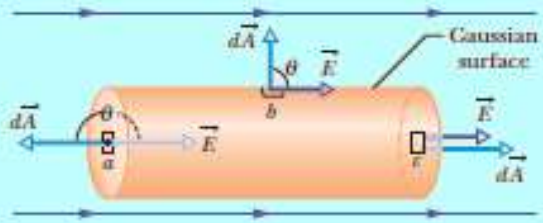
منظور از بردار عمود بر سطح، همان مساحت سطحی است که خطوط میدان الکتریکی از آن عبور می‌کنند.

بردار سطح همیشه بر سطح عمود و به سمت خارج از آن است.



شار میدان الکتریکی استوانه

مثال: شکل زیر یک استوانه فرضی بسته را نشان می دهد که در میدان الکتریکی یکنواخت قرار دارد . شار الکتریکی مربوط به این سطح بسته چقدر است ؟



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180^\circ)\, dA = -E \int dA = -EA.$$

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0)\, dA = EA.$$

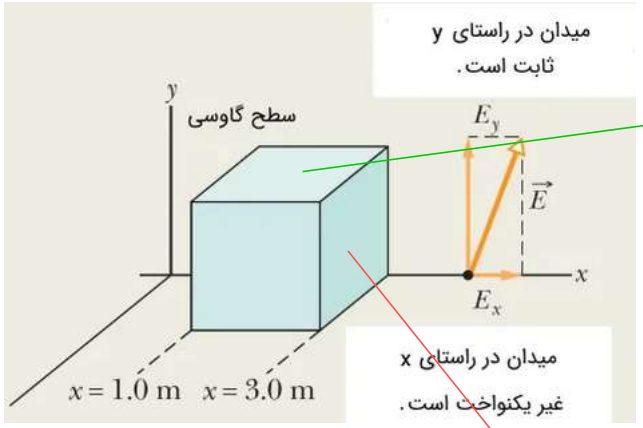
$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 90^\circ)\, dA = 0.$$

$$\Phi = -EA + 0 + EA = 0.$$

محاسبه شار الکتریکی مکعب

مثال) مکعبی به ضلع ۲ سانتی‌متر را در نظر بگیرید که مطابق با شکل در یک میدان الکتریکی غیر یکنواخت قرار دارد. توزیع میدان غیر یکنواخت مذکور به صورت زیر است:

$$\vec{E} = 3.0x\hat{i} + 4.0\hat{j}$$



شار الکتریکی گذرنده از وجه فوقانی مکعب

$$\Phi_t = \int (3.0x\hat{i} + 4.0\hat{j}) \cdot (dA\hat{j}) = \int [(3.0x)(dA)\hat{i}\cdot\hat{j} + (4.0)(dA)\hat{j}\cdot\hat{j}] = \int (0 + 4.0dA) = 4.0\int dA = 16\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$$

شار الکتریکی گذرنده از وجه پایینی نیز همین مقدار تنها با یک علامت منفی است

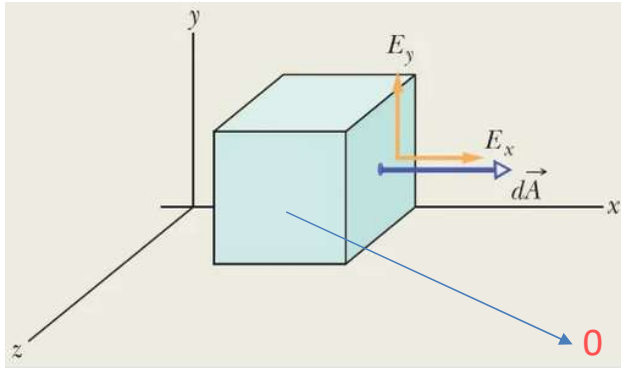
حال به محاسبه شار الکتریکی گذرنده از وجه سمت راست مکعب مذکور می‌پردازیم.

$$\Phi_r = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int (3.0x\hat{i} + 4.0\hat{j}) \cdot (dA\hat{i}) = \int [(3.0x)(dA)\hat{i}\cdot\hat{i} + (4.0)(dA)\hat{j}\cdot\hat{i}] = \int (3.0xdA + 0) = 3.0\int xdA$$
$$= 3.0\int (3.0)dA = 9.0\int dA = (9.0\mathrm{N/C})(4.0\mathrm{m^2}) = 36\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$$

محاسبه شار الکتریکی مکعب

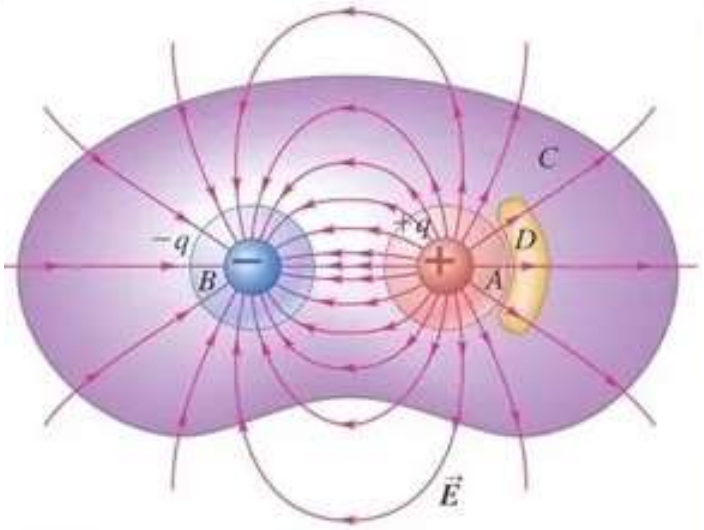
جهت محاسبه شار الکتریکی گذرنده از وجه سمت چپ نیز روند مشابه فوق را طی می‌کنیم.

همچنین شار الکتریکی گذرنده از دو وجهی که در راستای محور z قرار دارد، صفر است. چرا که میدان الکتریکی مذکور هیچ مولفه‌ای در راستای z ندارد.



قانون گاوس

بیان قانون گاوس:کل شار الکتریکی خروجی از هر سطح بسته، برابر است با کل بار الکتریکی احاطه شده توسط آن سطح تقسیم بر ثابت گذردهی خلأ



$$\phi_E = \oint E.dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

در حالت عمومی می‌توان از رابطه بالا به‌منظور محاسبه میدان الکتریکی استفاده کرد.

محاسبه شار الکتریکی از قانون گاوس

اساس و مبنای کار قانون گاوس ارتباط تنگاتنگی با شار الکتریکی گذرنده از سطح بسته دارد. قانون گاوس به شکل ساده زیر است:

$$\Phi = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

نکته مهمی که به هنگام استفاده از قانون گاوس باید به آن توجه کنیم، تعیین صحیح مقدار q_{in} است. خطوط میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح بسته، متناسب با مقدار بار q_{in} است که توسط سطح بسته (سطح گاوسی) محصور شده است. پس به یاد داشته باشید که q_{in} در قانون گاوس **مقدار بار محصور شده توسط سطح گاوسی** است.

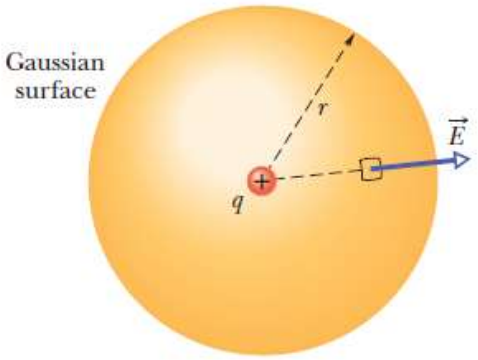
جهت محاسبه بار الکتریکی محصور شده توسط سطح گاوسی می‌توان از چگالی بار متناسب با توزیع بار استفاده کرد. چگالی‌های مختلف بار در زیر آمده‌اند:

$$\lambda = \frac{q}{l}\ (\frac{C}{m}) \qquad \sigma = \frac{q}{A}\ (\frac{C}{m^2}) \qquad \rho = \frac{q}{V}\ (\frac{C}{m^3})$$

قانون گاوس و قانون کولن

می توان قانون کولن را با استفاده از قانون گوس بدست آورد:

اثبات: شکل زیر یک بار مثبت را نشان می دهد که یک سطح کروی بسته (سطح گاوس) به حول آن زده شده است:



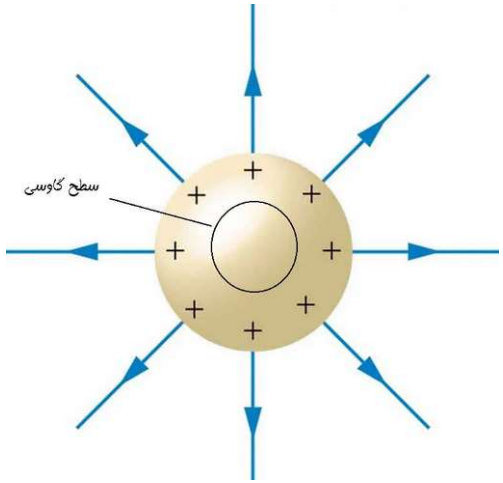
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\, dA = q.$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

میدان الکتریکی درون یک رسانا

مثال: می‌خواهیم میدان الکتریکی درون یک رسانا را بدست آوریم. بدین منظور مطابق شکل زیر کره‌ای رسانا را تصور کنید که بار الکتریکی، توسط میله‌ای رسانا به آن منتقل شده است.



پس از منتقل شدن بارها به کره، به دلیل رسانا بودن کره مفروض، بارها یکدیگر را دفع کرده و تمایل دارند تا در دورترین فاصله ممکن از هم قرار گیرند؛ در نتیجه تمامی بارهای منتقل شده به کره، به بیرونی‌ترین سطح کره منتقل خواهند شد. توجه داشته باشید که تنها در صورتی که بستر رسانا باشد این اتفاق خواهد افتاد و در حالتی که با کره‌ای مثلا پلاستیکی سر و کار داشته باشیم، داستان به شکل دیگری خواهد بود.

بنابراین درون کره باری وجود نخواهد داشت.

$$\Phi_E = \oint \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{A} = \frac{q}{\varepsilon_o} = 0$$
$$\oint \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{A} = 0$$

رسانای عایق بندی شده

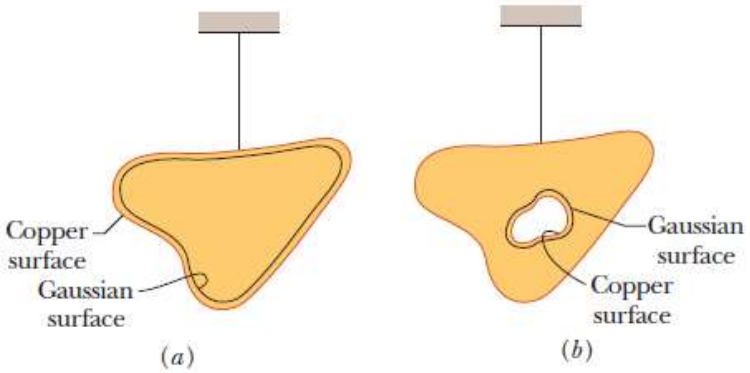
به کمک قانون گوس می توان نشان داد که :

بار اضافی واقع بر یک رسانای عایق بندی شده تماما" روی سطح خارجی آن باقی می ماند.

فرانکلین اولین کسی بود که به عدم وجود بار در داخل یک ظرف فلزی عایق شده پی برد.

بار الکتریکی اضافه داده شده به یک رسانا روی سطح خارجی آن توزیع می‌شود.

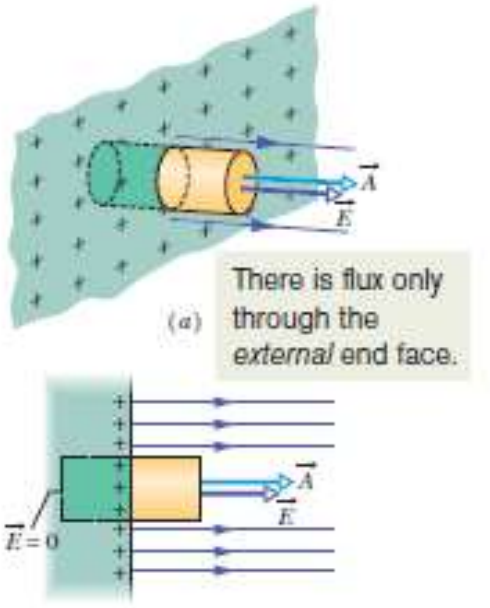
جریان صفر ⟵ میدان داخل رسانا صفر ⟵ بار صفر است.



قانون گاوس: بعضی کاربردها

مثال: شکل زیر یک ورقه رسانا ی بار را با چگالی سطحی بار ثابت (یعنی بار واحد سطح بر حسب کولن بر متر مربع) نشان می دهد مقدار در فاصله در جلو ورقه چقدر است ؟

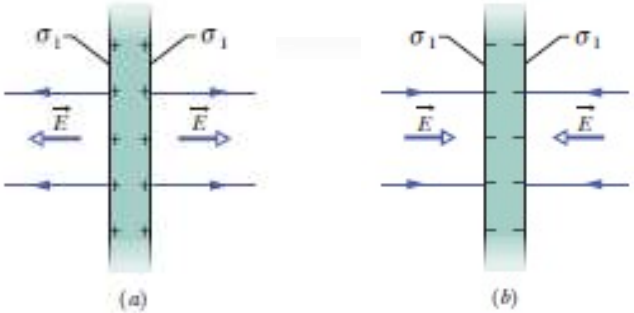
حل:میدان در داخل رسانا صفر است چون فقط از یکی از سطح مقطعها شار می گذرد پس:



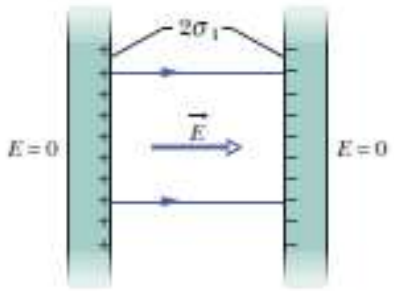
$$\varepsilon_0 EA = \sigma A, \longrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

قانون گاوس: میدان بین دو صفحه

در واقع با نزدیک کردن دو صفحه به یکدیگر، تمامی بارها به سمت یک لبه از صفحه می‌آیند. اگر توزیع چگالی بار را یکنواخت فرض کنیم، می‌توانیم بگوییم که مقدار بار روی وجه داخلی صفحات دو برابر شده است. پس چگالی بار سطحی جدید روی هر وجه $2\sigma_1$ است. در نتیجه میدان الکتریکی بین دو صفحه مذکور به صورت زیر محاسبه می‌شود.

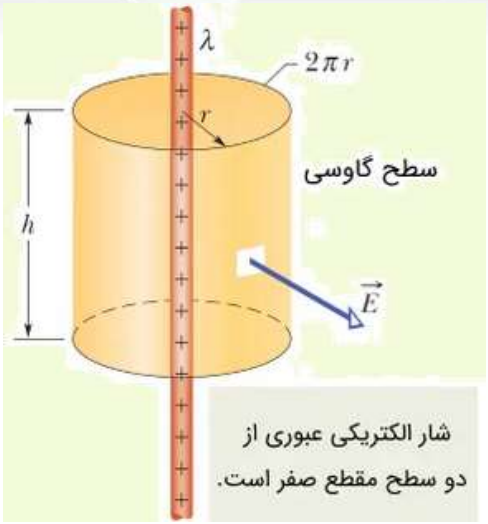


$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon 0(ES) = 2\sigma_1 S \Rightarrow E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



میدان الکتریکی خط پیوسته بار بی‌نهایت

مثال : در اینجا قصد داریم تا با استفاده از قانون گاوس به محاسبه میدان الکتریکی توزیع بار مذکور بپردازیم.

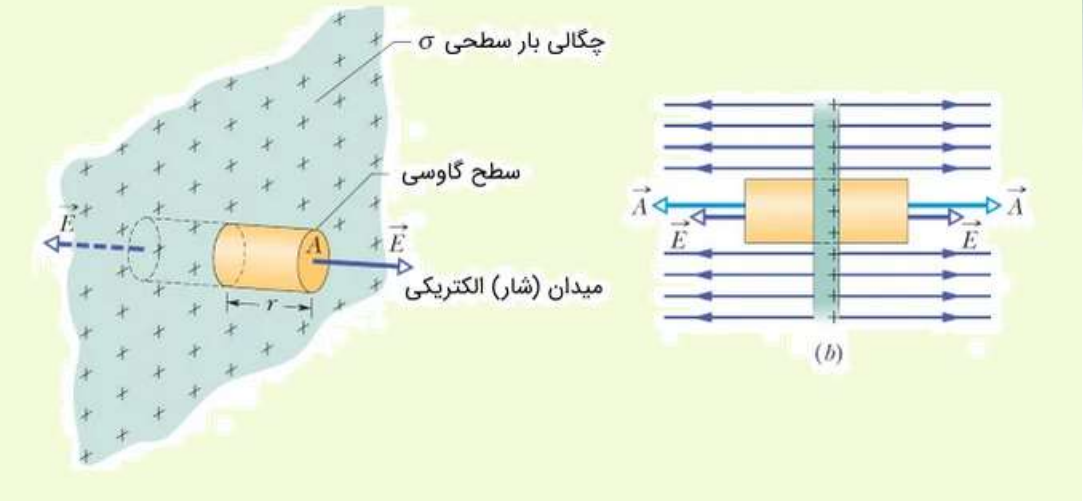


مطابق با شکل فوق، از آنجایی که زاویه بین خطوط میدان الکتریکی (شار الکتریکی) و جزءهای دیفرانسیلی dS صفر درجه است، میدان الکتریکی E به راحتی از انتگرال بیرون می‌آید. در نتیجه:

$$\oint E.dS = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\oint dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 2\pi r h}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

محاسبه میدان الکتریکی صفحه باردار بی‌نهایت



میدان الکتریکی در حالت الکترو استاتیک در داخل جسم یک رسانا صفر است . اگر سطح گوس را بلافاصله زیر سطح خارجی جسم رسانا انتخاب کنیم . شار الکتریکی عبوری از آن صفر است پس بار خالص داخل آن صفر است پس بار اضافی روی سطح خارجی قرار می گیرد

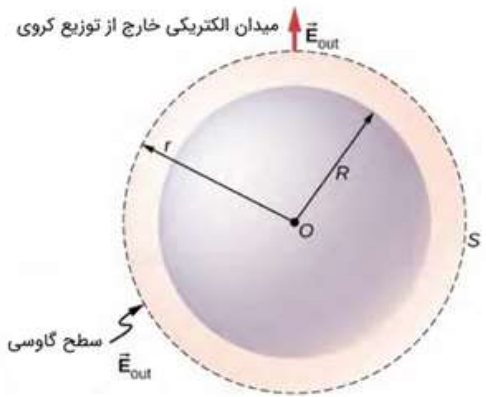
با توجه به شکل فوق، متناسب با سطح گاوسی، تنها شار گذرنده از دو سطح مقطع غیر صفر است پس مطابق با قانون گاوس داریم:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon 0(ES + EA) = \sigma S \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

محاسبه میدان الکتریکی کره باردار

جهت محاسبه میدان الکتریکی ساختارهای کروی، به دلیل وجود تقارن به راحتی می‌توان از قانون گاوس استفاده کرد. برای یک توزیع بار کروی، بهترین سطح گاوسی که می‌توان در نظر گرفت، سطحی کروی (مساحت کره : $4\pi r^2$) است. جهت محاسبه میدان الکتریکی خارج از توزیع کروی بار با شعاع R، سطح گاوسی کروی با شعاع $r > R$ را در نظر می‌گیریم.

در اینجا نیز به دلیل تقارن و عدم وابستگی میدان الکتریکی E به جزء دیفرانسیلی dS، محاسبات ساده و کوتاه خواهند بود. مطابق با قانون گاوس داریم:



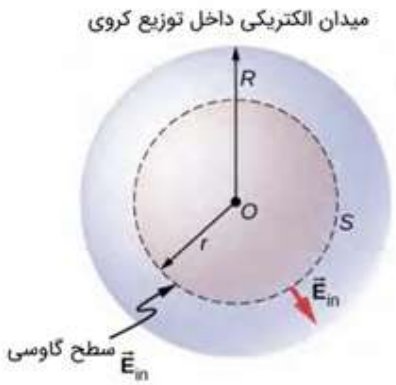
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

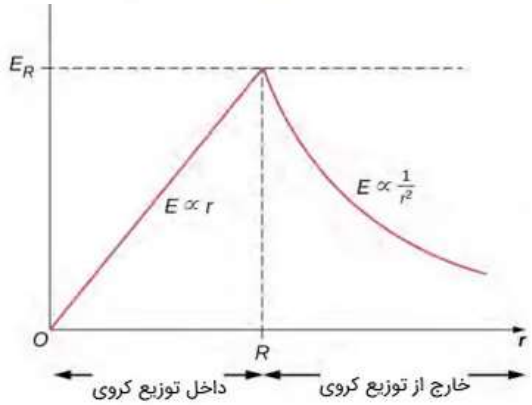
$$\Rightarrow E = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0 S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

محاسبه میدان الکتریکی کره باردار

جهت محاسبه میدان الکتریکی درون توزیع کروی بار نیز به راحتی می‌توان از قانون گاوس استفاده نمود.

مطابق با شکل سطحی کروی با شعاع $r < R$ را درون توزیع کروی بار در نظر می‌گیرم. نکته‌ای که در اینجا باید به آن دقت کرد، مقدار بار محصور شده در سطح گاوسی است.





مقدار چگالی بار حجمی محصور شده را می‌توان کسری از چگالی بار کل در نظر گرفت. یعنی:

$$q = \rho V \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 \rightarrow \frac{q_{enc}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\Rightarrow q_{enc} = q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

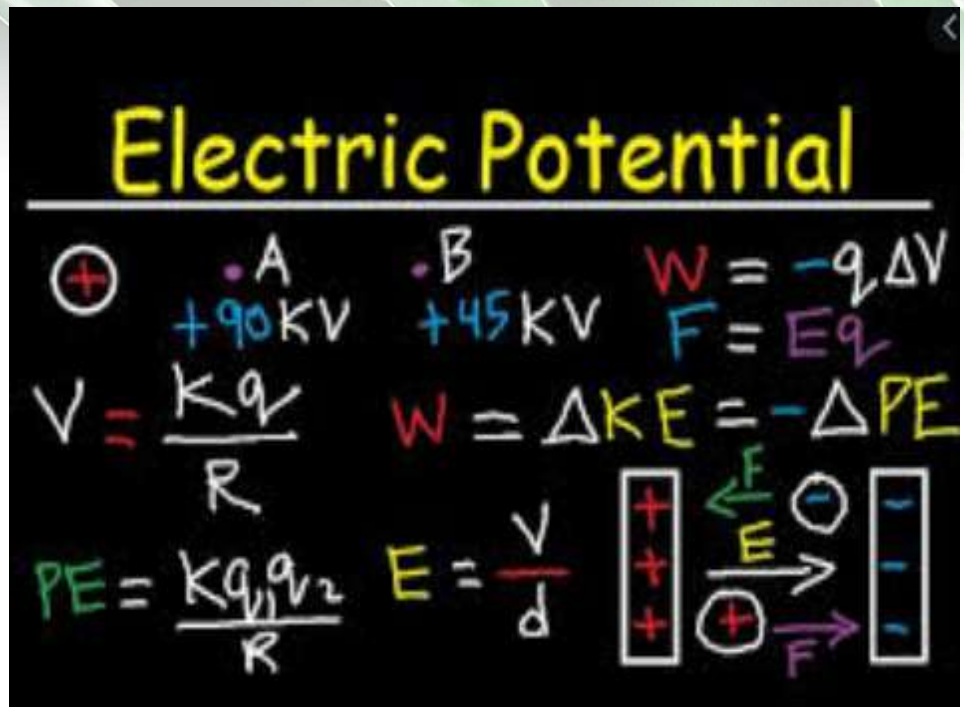
$$\Rightarrow E = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0 S} = \frac{q\frac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r$$

فصل ۲۴- پتانسیل الکتریکی



فصل ۲۴: پتانسیل الکتریکی



پتانسیل الکتریکی

پتانسیل و میدان الکتریکی

پتانسیل حاصل از یک بار نقطه ای

گروه بارهای نقطه ای

پتانسیل حاصل از یک دوقطبی

انرژی پتانسیل الکتریکی

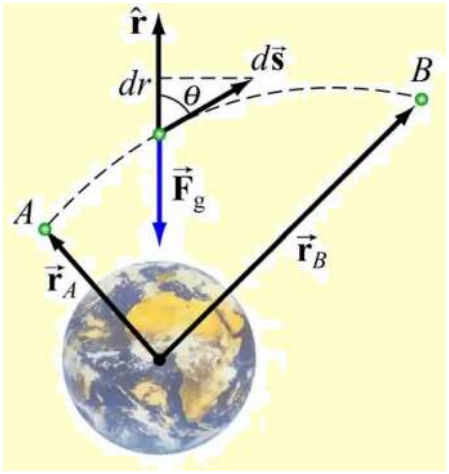
محاسبه میدان الکتریکی با استفاده ا زپتانسیل الکتریکی

رسانای عایق بندی شده

مولد الکترو ستاتیکی

فصل ۲٤: مفهوم انرژی پتانسیل

از مباحث پایه‌ای فیزیک می‌دانید که هرگاه دو جرم در فاصله‌ای از یکدیگر قرار گیرند، نیرویی به هم وارد می‌کنند که با مجذور فاصله آن‌ها رابطه‌ای عکس دارد. با استفاده از این مفهوم می‌توان گفت که زمین نیز نیرویی به هر جرم وارد می‌کند که ما آن را تحت عنوان «وزن» می‌شناسیم. نیروی وارد شده به جرم m برابر است با:



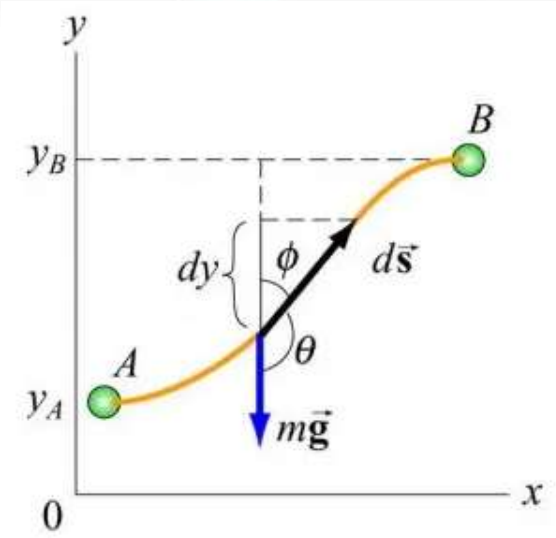
$$\vec{\mathbf{F}}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

در نتیجه $\vec{g}$ برابر است با:

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

فصل ۲٤: مفهوم انرژی پتانسیل

با این فرضیات، کار انجام شده توسط گرانش در فاصله A تا B برابر است با:

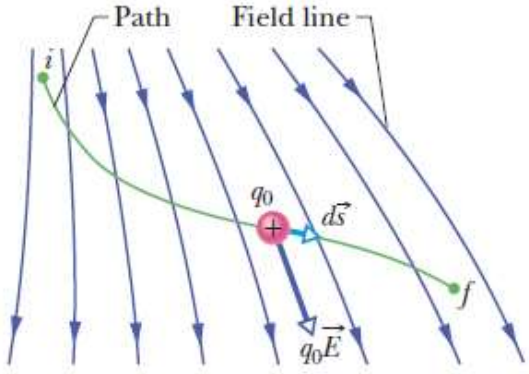


$$W_g = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -W$$

فصل ۲٤: مفهوم پتانسیل الکتریکی

به‌منظور بیان مفهوم انرژی پتانسیل و پتانسیل الکتریکی دقیقا از همین مفهوم استفاده می‌کنیم. با فرض پایسته بودن نیروی کولن، انرژی پتانسیل بر واحد بار الکتریکی برای یک میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:



$$\Delta V = -\int_A^B (\vec{\mathbf{F}}_e / q_0) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

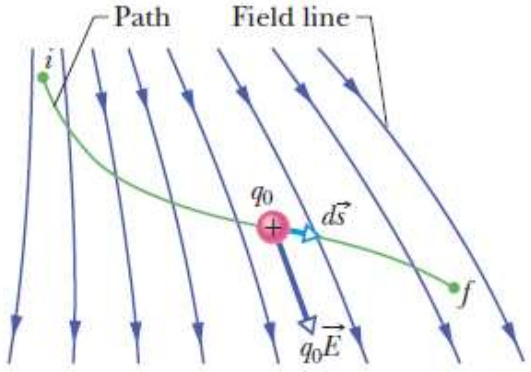
با توجه به رابطه بالا، اختلاف پتانسیل را می‌توان با استفاده از عبارت زیر تعریف کرد:

به میزان کاری که میدان الکتریکی E در واحد بار، برای جابجایی بار آزمون q_0 از نقطه A به B انجام می‌دهد، اختلاف پتانسیل (ΔV) گفته می‌شود.

فصل ۲۴: پتانسیل الکتریکی

یک روش دیگر برای بدست آوردن میدان الکتریکی ، استفاده از کمیت نرده ای پتانسیل الکتریکی است.

اختلاف پتانسیل میان دو نقطه در میدان الکتریکی ، برابر است با کار لازم برای انتقال آرام (در حال تعادل) واحد بار مثبت از نقطه اول به دوم یعنی :



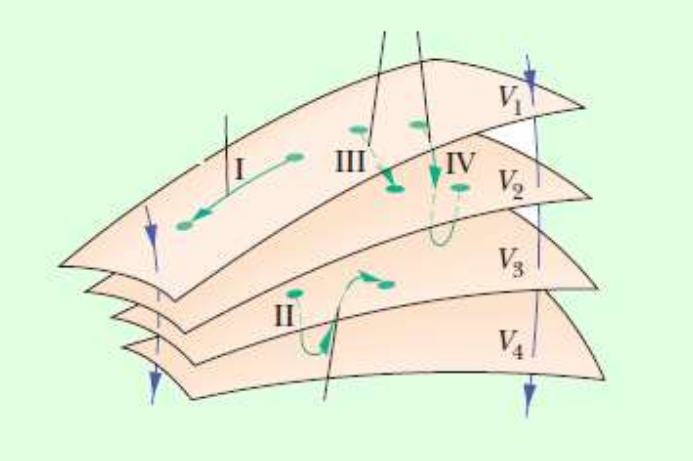
بار آزمون مثبت است

$$\Delta V = -\int_A^B (\vec{\mathbf{F}}_e / q_0) \cdot d\,\vec{\mathbf{s}} = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\,\vec{\mathbf{s}}$$

فصل ۲۴: سطوح هم پتانسیل

کار لازم برای انتقال بار از بی نهایت به نقطه مورد نظر؛ مستقل از مسیر انتقال بار است

مکان هندسی تمام نقاطی که دارای پتانسیل الکتریکی یکسان اند ، سطح هم پتانسیل می نامند



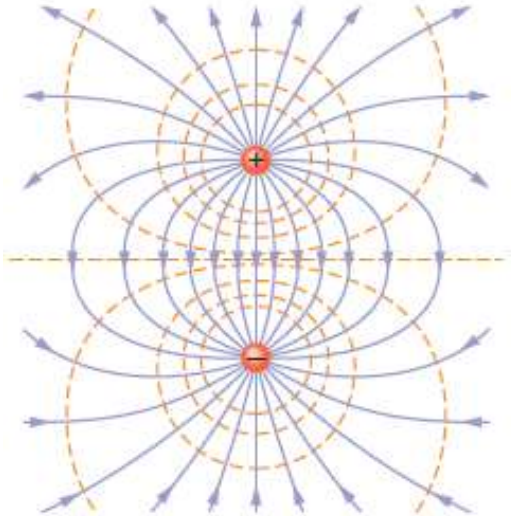
شکل یک گروه سطوح هم پتانسیل را نشان می دهد.

کار لازم برای حرکت دادن بار در طول مسیر های یک و دو صفر است چون انتهای آنها در یک و سطح هم پتانسیل قرار دارد.
کار لازم برای حرکت دادن بار در طول مسیر های سه و چهار صفر نیست ولی مقدار آن برای هر دو مسیر یکسان است.

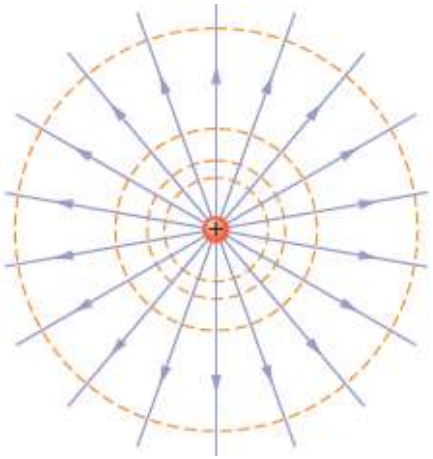
فصل ۲۴: سطوح هم پتانسیل

سطوح هم پتانسیل بر خطوط میدان عمود است. این مطلب در شکلهای زیر نشان داده شده است.

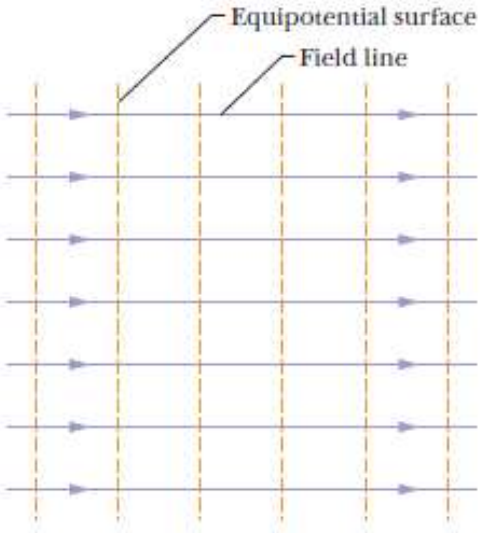
سطوح هم پتانسیل اطراف یک دو قطبی الکتریکی



سطوح هم پتانسیل اطراف یک بار نقطه ای



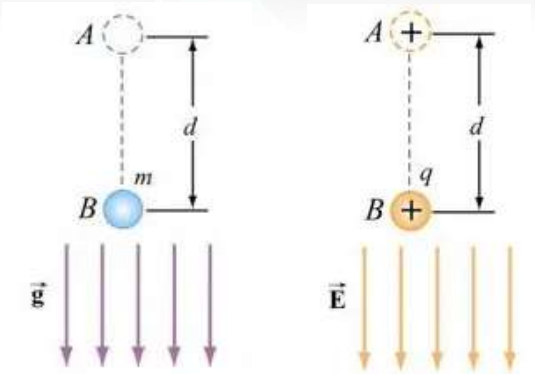
سطوح هم پتانسیل در میدان یکنواخت



فصل ٢٤: پتانسیل الکتریکی در یک میدان یکنواخت

محاسبه اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در میدان الکتریکی یکنواخت:

باری به اندازه q+ را در نظر بگیرید که در میدانی مطابق با شکل زیر حرکت می‌کند.



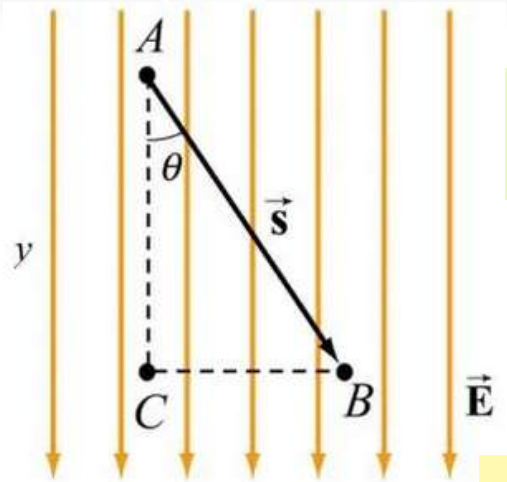
از آنجایی که مسیر حرکت بار و میدان $\vec{E}$ در یک راستا هستند، بنابراین اختلاف پتانسیل در فاصله A تا B برابر با مقدار زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -E_0 \int_A^B ds = -E_0 d < 0$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که پتانسیل نقطه B از نقطه A کمتر است. در حقیقت خطوط میدان الکتریکی همواره ذرات باردار را از پتانسیل بالاتر به پتانسیل پایین‌تر منتقل می‌کنند.

فصل ۲٤: پتانسیل الکتریکی در یک میدان یکنواخت

مثال ۱) فرض می کنیم که بار آزمون فاصله بین دو نقطه را روی دو مسیر نشان داده شده(بدون شتاب) طی کند .
اختلاف پتانسیل میان دو نقطه محاسبه کنید.



همان‌گونه که در شکل بالا نیز مشخص شده در این حالت زاویه بین مسیر حرکت بار و میدان برابر با θ است. این زاویه در حاصل‌ضرب داخلی $\vec{E}.\vec{ds}$ که در زیر انتگرال قرار گرفته، ظاهر خواهد شد. نهایتا اختلاف پتانسیل در این حالت برابر است با:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = -E_0 s \cos\theta = -E_0 y$$

در محاسبه انتگرال بالا توجه کنید که جهت مثبت محور y به سمت پایین در نظر گرفته شده. رابطه بالا نیز کاهش پتانسیل الکتریکی در نتیجه حرکت ذره باردار را نشان می‌دهد.

فصل ۲٤: پتانسیل الکتریکی در یک میدان یکنواخت

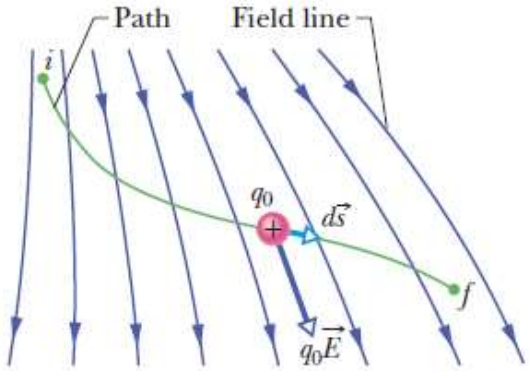
حال تصور کنید همین بار و در همین میدان، مسیر $A \to C \to B$ را طی کند. در این جابجایی تغییرات پتانسیل شامل دو قسمت می‌شود که در ادامه بیان شده.

$$\Delta V = \Delta V_{CA} + \Delta V_{BC}$$

در بخش اول مسیر که ذره از A به سمت C حرکت می‌کند، پتانسیل بار به اندازه $\Delta V_{CA} = -E_0 y$ تغییر می‌کند. در مسیر C به B با توجه به این‌که بردار جابجایی و بردار میدان الکتریکی به یکدیگر عمود هستند، بنابراین حاصلضرب داخلی این دو نیز صفر است و یا به شکلی بهتر می‌توان گفت که پتانسیل نقاط C و B با یکدیگر برابر هستند. صفر بودن اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه نشان می‌دهد که به‌منظور جابجایی بار بین دو نقطه مفروض نیاز نیست کاری انجام شود. هم‌چنین تمامی مسیرهای بین B و C، اختلاف پتانسیلشان صفر هستند.

فصل ٢٤: اختلاف پتانسیل در یک میدان غیر یکنواخت:

محاسبه اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در یک میدان غیر یکنواخت:

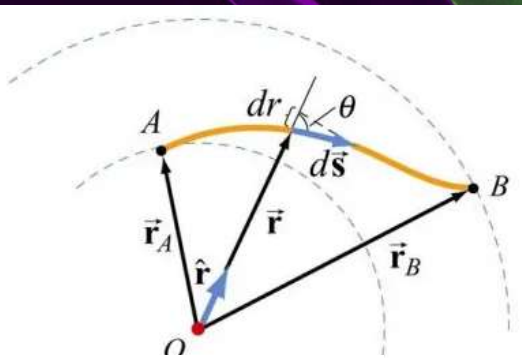


$$dW = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

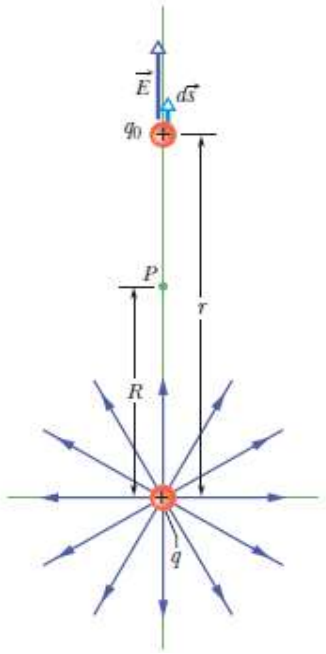
$$W = q_0\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

فصل ۲۴: پتانسیل حاصل از یک بار نقطه ای



بدیهی است که هر بار الکتریکی، پتانسیلی را در اطراف خود ایجاد خواهد کرد. در حقیقت میدان بوجود آمده توسط بارهای الکتریکی منجر به ایجاد اختلاف پتانسیل می‌شوند. به‌منظور بررسی پتانسیل و میدان الکتریکی اطراف بار، شکل مقابل را در نظر بگیرید.



$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cos\theta\, ds.$$

$$V_f - V_i = -\int_R^\infty E\, dr.$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

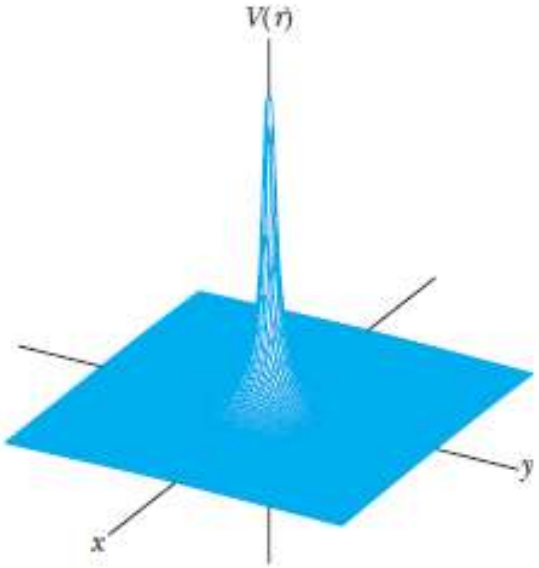
$$0 - V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}.$$

فصل ۲٤: پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای

با محاسبه انتگرال پتانسیل الکتریکی در فاصله از یک ذره، مطابق با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

پتانسیل سه بعدی اطراف بار نقطه ای:

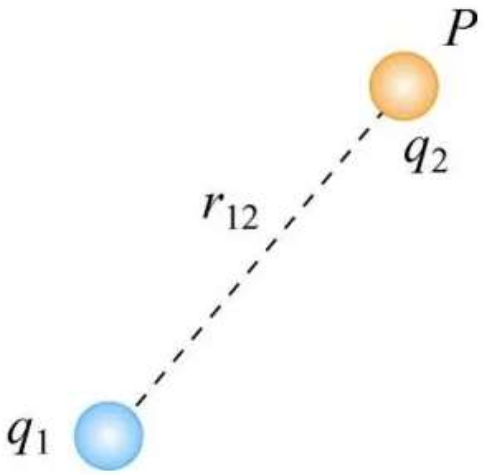


$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

اگر بار منفی باشد پتانسیل منفی است و بالعکس.

فصل ۲۴: گروه بارهای نقطه ای

پتانسیل حاصل از یک مجموعه بار های نقطه ای در هر نقطه از فضا برابر است با جمع جبری پتانسیل های تک تک بار ها در آن نقطه :



$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \quad (n \text{ charged particles}).$$

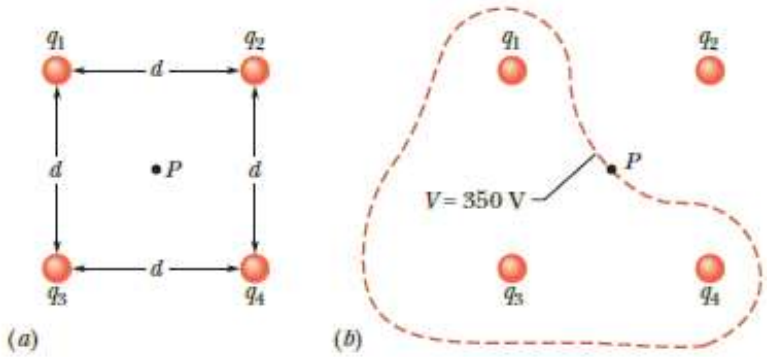
فصل ۲۴: پتانسیل حاصل از بارهای نقطه ای

مثال۲ : چهار بار در گوشه های یک مربع قرار دارند پتانسیل در مرکز مربع چقدر است ؟

حل:

$$q_1 = +12\ \text{nC}, \qquad q_3 = +31\ \text{nC},$$
$$q_2 = -24\ \text{nC}, \qquad q_4 = +17\ \text{nC}.$$

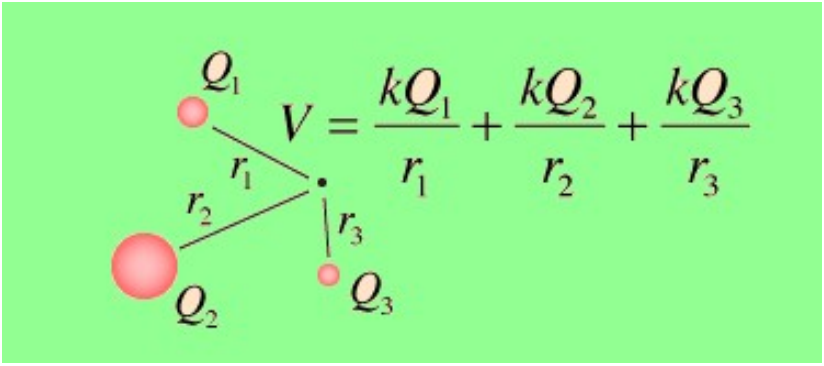
$$V = \sum_{i=1}^{4} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{r}\right).$$



$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \times 10^{-9}\ \text{C}$$
$$= 36 \times 10^{-9}\ \text{C}.$$
$$V = \frac{(8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(36 \times 10^{-9}\ \text{C})}{0.919\ \text{m}}$$
$$\approx 350\ \text{V}.$$

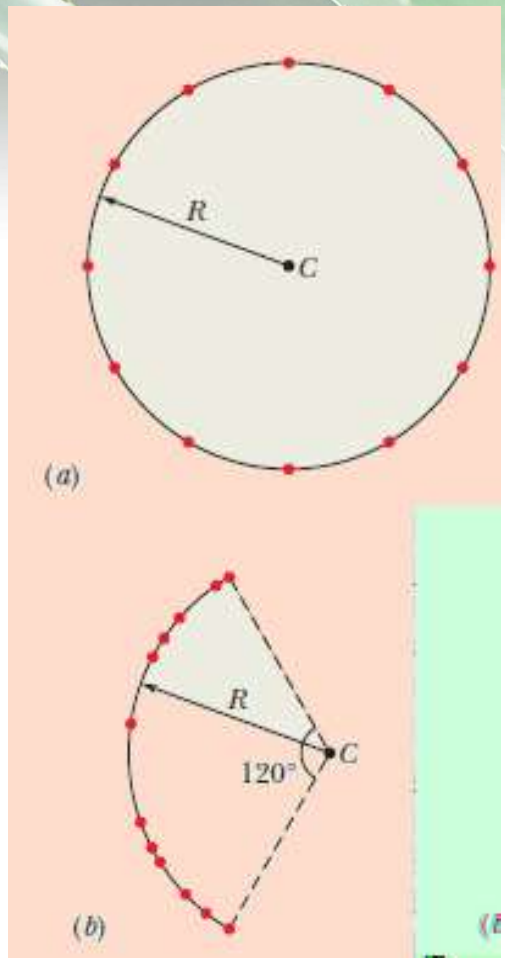
فصل ۲۴: مزیت استفاده از پتانسیل

محاسبه ی میدان الکتریکی برای اجسامی که تقارن داشته باشند براحتی انجام میشود ولی در بقیه ی موارد محاسبه ی میدان کاری بسیار سخت خواهد بود این سختی از انجا ناشی میشود که میدان یک کمیت برداری است و در نظر گرفتن جهت برای ان بسیار سخت است میتوان از کمیتی استفاده می کنیم که به نحوی از ان میدان الکتریکی را استخراج کرد به این کمیت اسکالر پتانسیل الکتریکی است.



فصل ۲۴: پتانسیل حاصل از بارهای نقطه ای

مثال۲ : پتانسیل در مرکز دایره چقدر است ؟

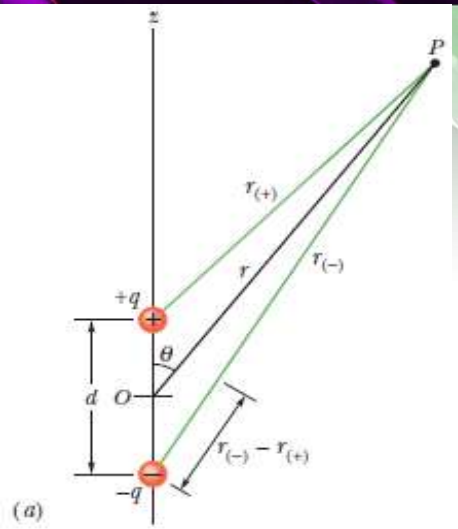


$$V = -12\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R}.$$

$$\vec{E} = 0.$$

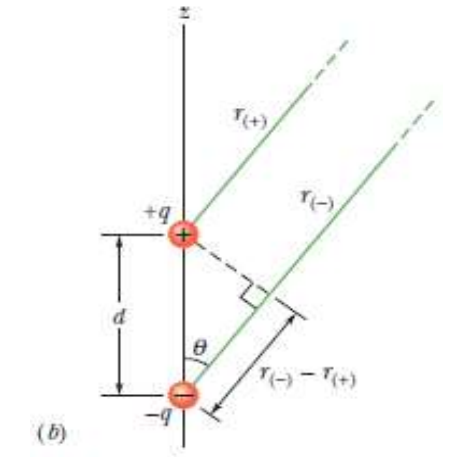
فصل ۲۴ : پتانسیل حاصل از یک دوقطبی

مثال : نقطه نشان داده شده در شکل در فاصله دور از یک دو قطبی قرار دارد.
میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله بدست آورید.



$$V = \sum_{i=1}^{2} V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}}\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}.$$

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta \quad \text{and} \quad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2.$$



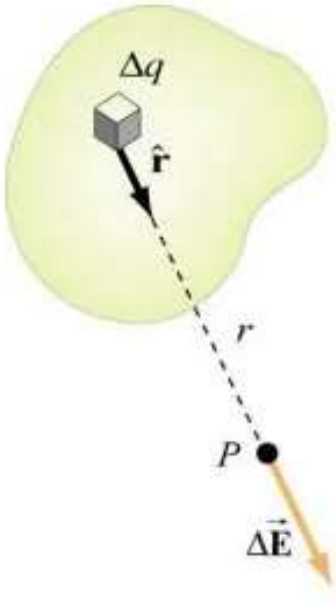
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \quad \text{(electric dipole)}.$$

فصل ۲٤: پتانسیل توزیع پیوسته‌ای از بارهای الکتریکی

همانند محاسبه میدان الکتریکی در حالتی که با توده‌ای از بار مواجه‌ایم، می‌توان با استفاده از انتگرال‌گیری از جزء بار مورد بررسی، پتانسیل کل سیستم را بدست آورد. مطابق شکل زیر توده‌ای از بار الکتریکی را فرض کنید.

اگر توزیع بار به جای نقطه ای پیوسته باشد عمل جمع به انتگرالگیری تبدیل میشود :



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

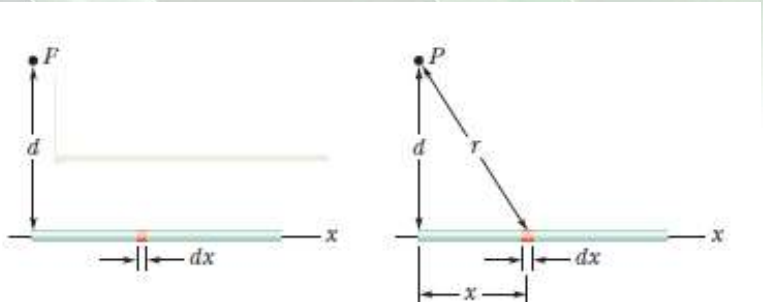
یک جزء دیفرانسیلی از توزیع بار

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

مفهوم چگالی بار به طور مفصل در این‌جا توضیح داده شده لذا در صورتی که احساس می‌کنید به توضیح بیشتری نیازمند هستید، می‌توانید به آن مراجعه کنید.

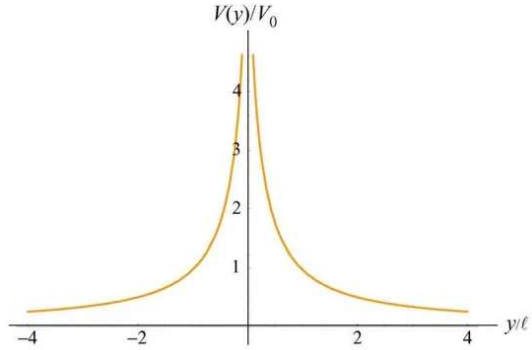
فصل ۲٤: پتانسیل توزیع پیوسته‌ای از بارهای الکتریکی

مثال ۳) مطابق شکل زیر میله‌ای را به طول مشخص در نظر بگیرید. پتانسیل را بدست آورید؟



$$dq = \lambda\, dx.$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}}.$$



$$V = \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{(x^2 + d^2)^{1/2}}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x + (x^2 + d^2)^{1/2}\right)\right]_0^L$$

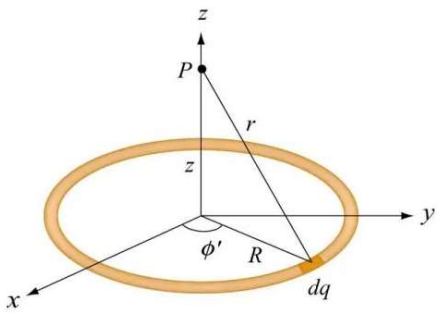
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(L + (L^2 + d^2)^{1/2}\right) - \ln d\right].$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d}\right].$$

فصل ۲٤: پتانسیل توزیع پیوسته‌ای از بارهای الکتریکی

مثال ۲

حلقه‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید که دارای چگالی بار λ است. در شکل زیر این حلقه نشان داده شده است. برای چنین سیستمی پتانسیل الکتریکی در فاصله z از مرکز حلقه چقدر است؟



همانند مسئله قبل در این مثال نیز در ابتدا جزئی دیفرانسیلی را به طول dl=Rdφ' در نظر می‌گیریم. از این رو مقدار بار موجود در این جزء از حلقه برابر با dq=λdl=λRdφ' است. در نتیجه پتانسیل ناشی از آن را می‌توان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد.

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\, d\phi'}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

هایتا با انتگرال‌گیری از رابطه بالا پتانسیل الکتریکی کل حلقه برابر با مقدار زیر محاسبه می‌شود.

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\oint d\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

فصل ۲٤: پتانسیل توزیع پیوسته‌ای از بارهای الکتریکی

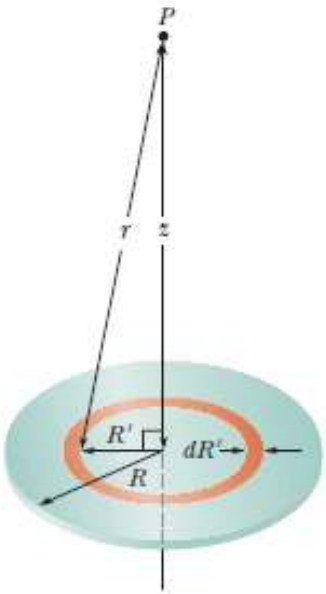
جالب است بدانید که در حالت حدی که فاصله z را بسیار بزرگ‌تر از R انتخاب می‌کنیم، رابطه مربوط به پتانسیل نقطه‌ای بدست می‌آید.

معنای ریاضیاتی این جمله را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\lim_{R/z\to 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}} = \lim_{R/z\to 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z}\frac{Q}{\sqrt{(R/z)^2+1}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z}$$

فصل ٢٤: پتانسیل دیسک

مثال : پتانسیل الکتریکی در نقطه ای واقع بر محور یک قرص باردار با چگالی سطحی بار ثابت را بدست آورید ؟



$$dq = \sigma(2\pi R')(dR'),$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}.$$

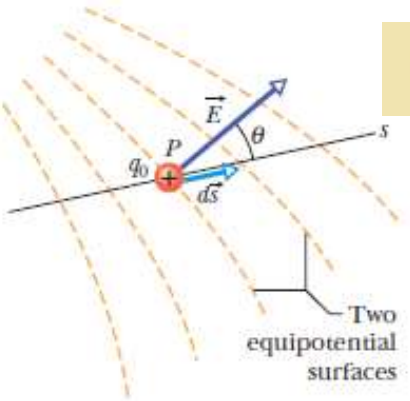
$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{R'\,dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

فصل ۲۴ : محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از پتانسیل

قبلا رابطه‌ای را به صورت زیر معرفی کردیم که با استفاده از آن قادر بودیم تا پتانسیل الکتریکی را با استفاده از میدان محاسبه کنیم.

$$\Delta V = -\int_A^B (\vec{\mathbf{F}}_e / q_0) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

از طرفی با توجه به اینکه V یک اسکالر است، می‌توان تغییرات جزئی آن را با استفاده از مشتق‌گیری پاره‌ای و به شکل زیر توصیف کرد.



$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

پس اگر پتانسیل به صورت تابعی از مختصات معلوم باشد می توان مولفه های میدان الکتریکی را محاسبه کرد:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

فصل ۲۴ : عملگر گرادیان

برای پاسخ به این سوال بایستی با عملگری ریاضیاتی تحت عنوان «گرادیان» آشنا باشید.

این عملگر به عنوان یک تبدیل کننده کمیت اسکالر به برداری ایفای نقش می کنند . یعنی بر روی یک کمیت اسکالر عمل کرده و آن را تبدیل به یک بردار می سازد مانند اثر این عملگر بر روی انرژی پتانسیل اگر این کمیت بر روی انرژی پتانسیل اثر کند ، بردار عکس نیرو را می دهد

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial_x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$u(r) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$\overline{\nabla}u(r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}ky^2\right)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}kz^2\right)\hat{k}$$

$$\overline{\nabla}u(r) = -\vec{F}(r) = -k\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$$

فصل ۲۴ : محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از پتانسیل

مثال ٤

پتانسیل الکتریکی حاصل از حلقه باردار، در فاصله مشخصی را بدست آوردیم. با توجه به پتانسیل الکتریکی محاسبه شده، میدان الکتریکی در همان فاصله چقدر است؟

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\oint d\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

فصل ۲۴ : محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از پتانسیل

مثال ٤

در مثال ۲ پتانسیل الکتریکی حاصل از دیسک باردار، در فاصله مشخصی از آن بدست آمد. با توجه به پتانسیل الکتریکی محاسبه شده، میدان الکتریکی در همان فاصله چقدر است؟

همان‌طور که در بالا نیز بیان کردیم با محاسبه گرادیان پتانسیل، میدان الکتریکی از جهات مختصات بدست می‌آید. البته در این مثال با توجه به این‌که میدان تنها در جهت z وجود دارد، بنابراین می‌توان با محاسبه مشتق جزئی میدان در همین راستا، میدان را بدست آورد.

میدان الکتریکی در راستای z برابر است با:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{R'\,dR'}{\sqrt{z^2+R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+R^2}-z).$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dz}(\sqrt{z^2+R^2}-z)$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right).$$

فصل ۲٤: مفهوم انرژی پتانسیل

توجه داشته باشید که جابجایی انجام شده در بالا بایستی بدون تغییر انرژی جنبشی اتفاق بیافتد. دوباره تاکید می‌کنیم که **انرژی پتانسیل و پتانسیل الکتریکی** با یکدیگر متفاوت هستند و نبایستی آن‌ها را با یکدیگر اشتباه گرفت. این دو کمیت فیزیکی را می‌توان با استفاده از رابطه زیر به هم مرتبط کرد.

$$\Delta U = q_0 \Delta V$$

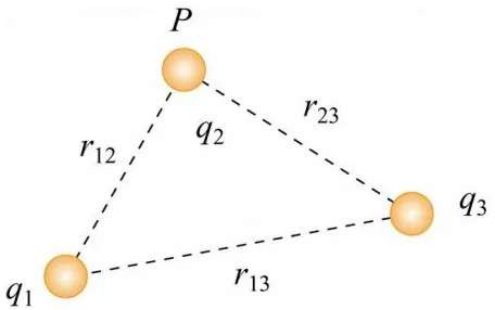
از رابطه بالا می‌توان فهمید که واحد پتانسیل الکتریکی (V) - که به آن ولتاژ نیز گفته می‌شود - در سیستم SI عبارت است از:

1 V = 1 کولن/ژول

$$1\text{eV} = (1.6\times10^{-19}\text{C})(1\text{V}) = 1.6\times10^{-19}\text{ J}$$

فصل ۲۴ : انرژی پتانسیل الکتریکی

برای محاسبه انرژی پتانتسیل دستگاههایی که شامل بیشتر از دو بارند:
انرژی پتانسیل هر زوج بار را بطور جداگانه محاسبه کرده و آنها را با هم جمع می کنیم



در محاسبه انرژی پتانسیل و پتانسیل الکتریکی علامت بار باید به حساب آید.

$$U = W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

فصل ۲۴ : انرژی پتانسیل الکتریکی

انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاهی از بارهای نقطه ای برابراست با:
کار لازم برای گرد آوری این بار ها با آوردن آنها از بی نهایت به نقاط مورد نظر.

انرژی پتانسیل کمیتی اسکالر است و بر حسب ژول اندازه گیری می شود



انرژی پتانسیل دو بار الکتریکی برابر است:

$$U_f - U_i = q_1(V_f - V_i).$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}.$$

$$r = \infty, \quad \longrightarrow \quad V_i = 0.$$

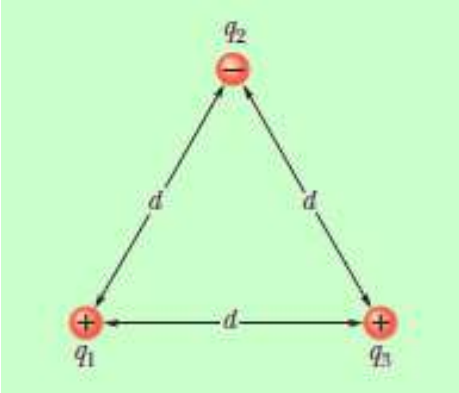
$$V_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}.$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

فصل ۲۴ : انرژی پتانسیل الکتریکی

مثال : سه بار الکتریکی در گوشه های یک مثلث به ضلع ۱۲ قرار دارند . انرژی پتانسیل متقابل آنها چقدر است ؟

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q, \quad \text{and} \quad q_3 = +2q,$$
$$q = 150\ \text{nC}.$$



$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d}.$$

$$W_{13} + W_{23} = U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{d}.$$

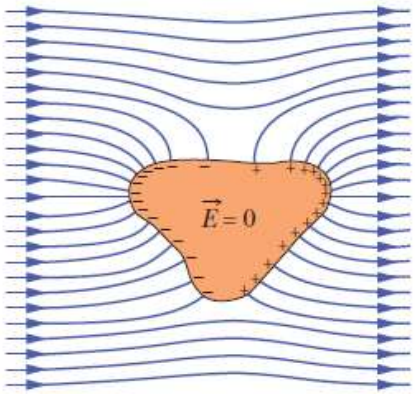
$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + U_{23} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d}\right) \\ &= -\frac{10q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ &= -\frac{(8.99\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150\times10^{-9}\ \text{C})^2}{0.12\ \text{m}} \\ &= -1.7\times10^{-2}\ \text{J} = -17\ \text{mJ}. \end{aligned}$$

فصل ۲۴ : رسانای عایق بندی شده

اگر یک جسم رسانا در میدان الکتریکی قرار گیرد الکترونها طوری توزیع می گردند که میدان در داخل آن صفر گردد.

چون میدان الکتریکی در شرایط الکتروستاتیک در نقاط داخل یک جسم رسانا صفر است پتانسیل الکتریکی در تمام نقاط آن ثابت است.

اثبات: اگر دو نقطه اختیاری داخل جسم رسانا باشد و مسیر انتگرالگیری نیز داخل جسم رسانا باشد داریم:



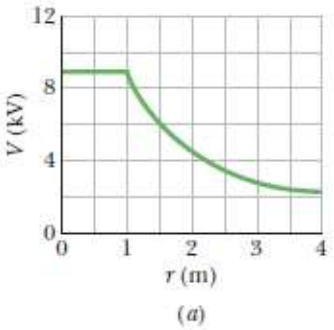
$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

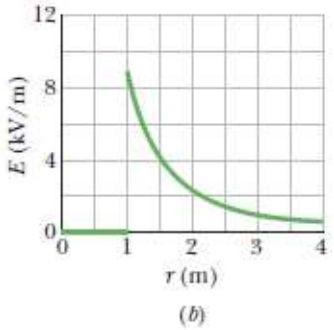
$$\vec{E} = 0$$

$$V_f = V_i$$

فصل ۲۴ : رسانای عایق بندی شده

در شکل زیر تغییرات پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی حاصل از یک کره رسانای تو پر به شعاع ۱ متر که حامل بار ۱ است به صورت تابعی از فاصله تا مرکز نشان داده شده است:





فصل ۲۵ : خازنها و دی الکتریکها



فصل ۲۵ : خازنها و دی الکتریکها



ظرفیت

محاسبه ظرفیت

انباشت انرژی در میدان الکتریکی

خازن مسطح با دی الکتریک

دی الکتریکها از دید اتمی

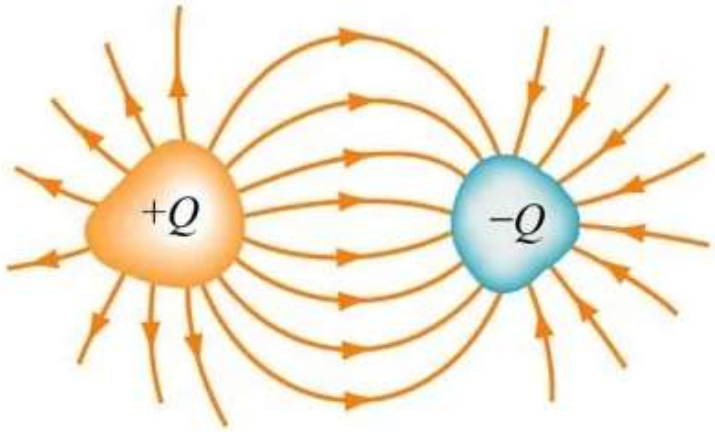
دی الکتریکها و قانون گاوس

فصل ۲۵ : خازنها و دی الکتریکها

یک خازن به جزئی گفته می‌شود که وظیفه آن ذخیره بار و در نتیجه انرژی الکتریکی است.

خازن‌ها از نظر ظاهر و اندازه متفاوت هستند اما مکانیزم کارکرد آن‌ها یکسان است. اصول کارکرد خازن به این صورت است که دو ناحیه با بار مخالف در معرض یکدیگر قرار می‌گیرند.

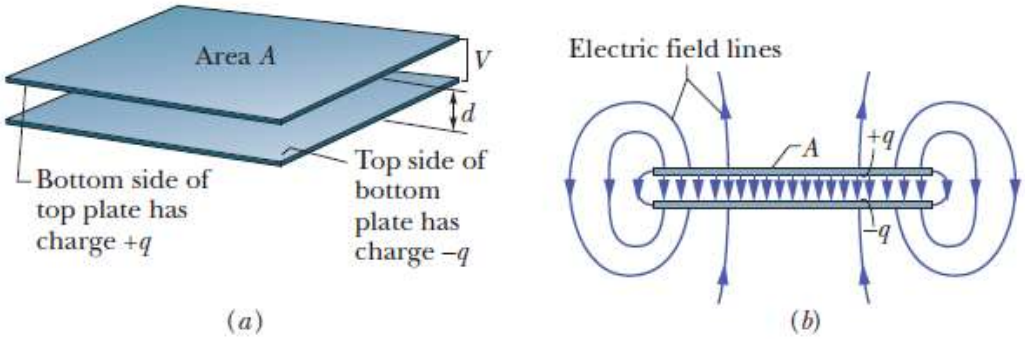
دو بار مخالف، میدانی الکتریکی را ایجاد می‌کنند که در خود انرژی الکتریکی را ذخیره کرده و می‌توان در صورت لزوم از آن استفاده کرد. در شکل زیر میدان ناشی از دو بار با اندازه برابر و علامت مخالف نشان داده شده است.



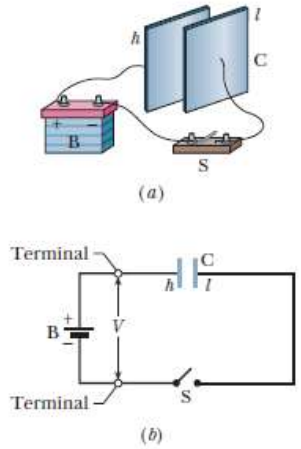
فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت

زمانی که یک خازن در حالت تعادل الکتریکی قرار دارد، هیچ‌یک از صفحات آن دارای بار الکتریکی نیستند. وقتی که آن را شارژ کنیم، بار الکتریکی Q میان صفحات جابجا می‌شود. این جابجایی منجر به باردار شدن یک صفحه به اندازه Q+ و صفحه دیگر به اندازه Q- خواهد شد. با توجه به اینکه با دو صحفه باردار مواجه هستیم، بنابراین می‌توان یک اختلاف پتانسیل برای آن تعریف کرد. توجه داشته باشید که در ادامه این اختلاف پتانسیل را با ΔV نشان خواهیم داد. همچنین بدیهی است که بار خالص موجود در یک خازن همواره برابر با صفر است و این تنها توزیع بار است که منجر به ایجاد اختلاف پتانسیل می‌شود.

شکلی از یک خازن مسطح و خطوط میدان آن



طریقه باردار کردن خازن

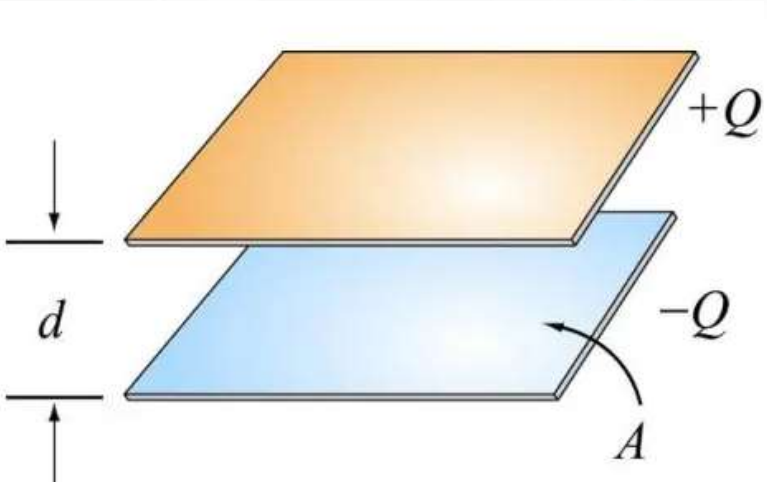


فصل ۲۵ : ظرفیت

اگر Q بار هر صفحه و V اختلاف پتانسیل آنها باشد:

$$q = CV.$$

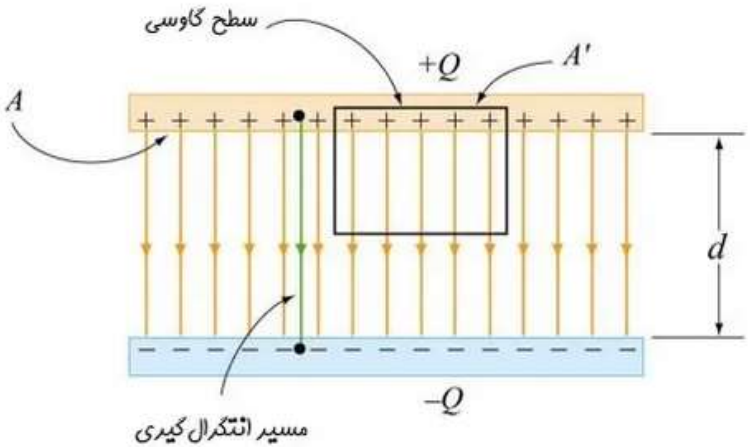
C ظرفیت خازن است که به شکل هندسی آن بستگی دارد و واحد آن فاراد است که مساوی یک کولن بر یک ولت است.



خازن‌ها کاربرد بسیاری در صنعت الکترونیک دارند. مهم‌ترین استفاده از آن‌ها به عنوان فیلتر کننده فرکانس و ذخیره کننده بارهای الکتریکی در مدارهای الکتریکی است.

فصل ۲۵ : خازنها و دی الکتریکها

محاسبه ظرفیت خازن مسطح با فرض اینکه بین صفحات خلاء یا هوا باشد:



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q.$$

$$q = \varepsilon_0 EA$$

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

$$q = \varepsilon_0 EA,$$

$$V = \int_-^+ E\,ds = E\int_0^d ds = Ed.$$

$$q = CV.$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت

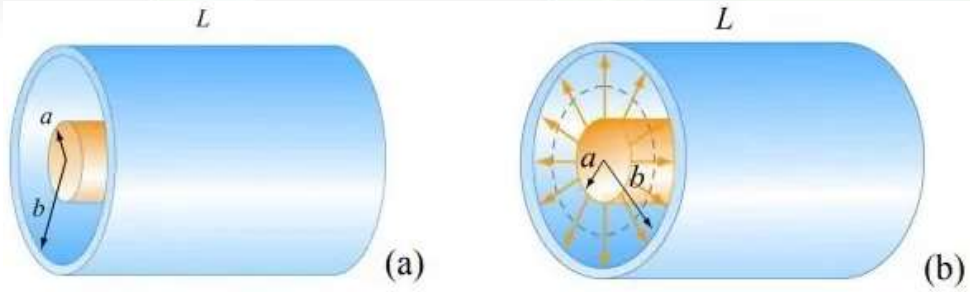
مثال : فاصله صفحات موازی یک خازن ، که هوا میان آنها است ، ۱ میلی متر است اگر ظر فیت خازن ۱ فاراد باشد ، مساحت هر یک از صفحات چقدر است؟

حل:

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}}$$
$$= 1.1 \times 10^{8}\ \text{m}^2.$$

فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت خازن استوانه ای

مثال : یک خازن استوانه ای شامل دواستوانه هم محور به شعاع های به طول a و b است. با فرض اینکه خازن طویل باشد، ظرفیت آن را بدست آورید؟





$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(2\pi rL),$$

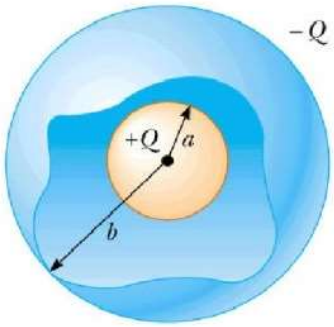
$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}.$$

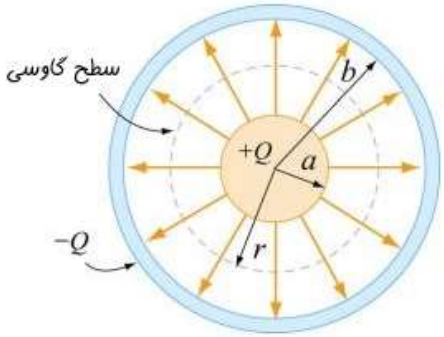
$$V = \int_-^+ E\,ds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$C = q/V, \longrightarrow C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$

فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت خازن کروی

مثال: یک خازن کروی شامل دو پوسته رسانای کروی هم مرکز به شعا ع های a و b است الف) ظرفیت آن را محاسبه کنید.





$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(4\pi r^2),$$

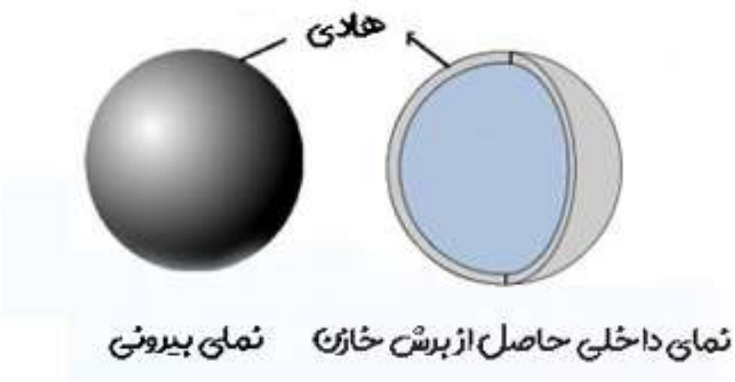
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

$$V = \int_-^+ E\,ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

$$\rightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت کره منزوی

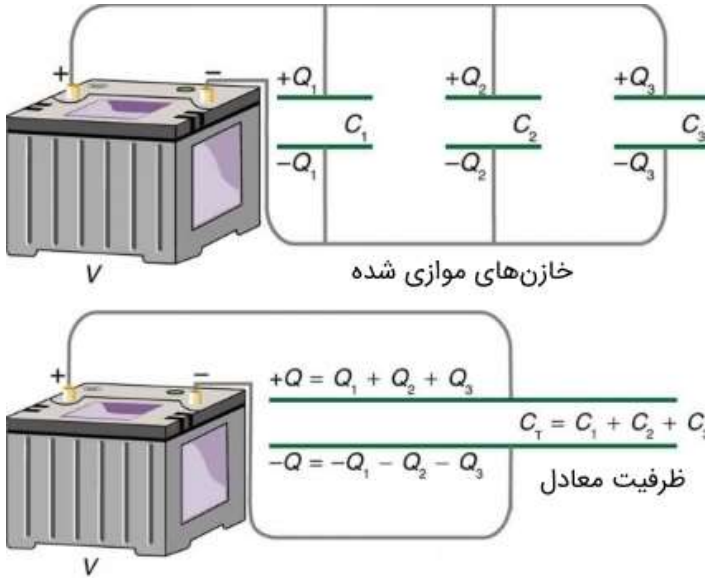
ب) اگر یک کره منزوی به شعاع R=a دراین صورت ظرفیت چقدر است ؟



$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b} \longrightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad (b \to \infty)$$

فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت حالت موازی

شکل زیر سه خازن را نشان می دهد که در حالت موازی بسته شده اند ظرفیت معادل این مجموعه چقدر است ؟



$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \quad \text{and} \quad q_3 = C_3 V.$$

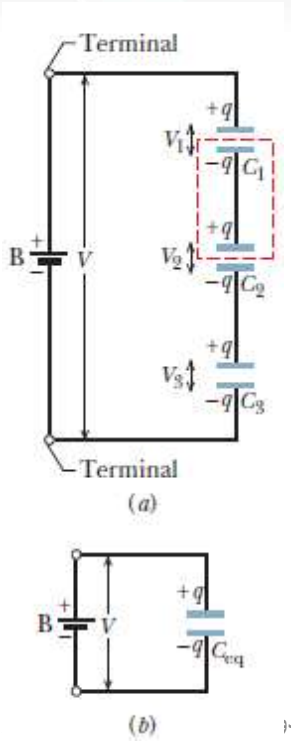
$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V.$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3,$$

$$\rightarrow \quad C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت حالت سری

شکل زیر سه خازن را نشان میدهد که بطور سری بسته شده اند ظرفیت تک خازن هم ارز با این مجموعه چقدر است؟



$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \text{and} \quad V_3 = \frac{q}{C_3}.$$

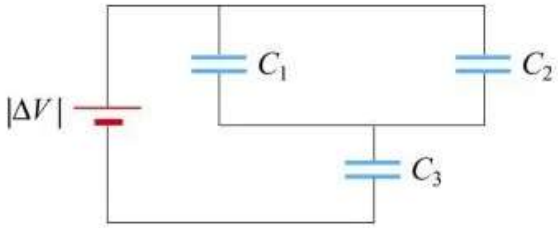
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

فصل ۲۵ : محاسبه ظرفیت

مطابق شکل زیر سه خازن با ظرفیت‌های C_1، C_2 و C_3 به یکدیگر متصل شده‌اند. ظرفیت معادل این خازن‌ها را بیابید.



همان‌طور که در شکل بالا نیز مشخص شده، خازن‌های C_1 و C_2 به شکلی موازی به یکدیگر متصل شده‌اند؛ بنابراین خازن معادل آن‌ها برابر است با:

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

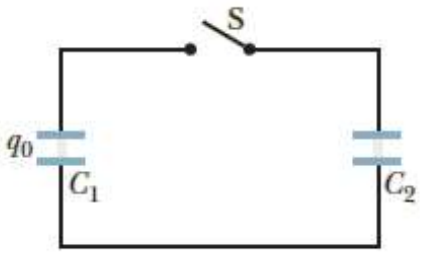
در این مرحله C_{12} با C_3 سری شده، بنابراین می‌توان خازن معادل C_{12} و C_3 را به صورت زیر بدست آورد.



$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} \longrightarrow C_{123} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12}+C_3} = \frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}$$

فصل ۲۵ : انباشت انرژی در میدان الکتریکی

مثال : خازن $c_1=3.55\ \mu F$ را تا اختلاف پتانسیل $V_0=6.3\ V$ پر می کنیم سپس باتری را بر می داریم و خازن $c_2=8.95\ \mu F$ را مطابق شکل به خازن پر نشده وصل می کنیم بارانباشته شده قبل و بعد از بستن کلید چقدر است؟



$$q_0 = C_1V_0 = (3.55\times10^{-6}\,\text{F})(6.30\,\text{V}) = 22.365\times10^{-6}\,\text{C}.$$

$$V_1 = V_2 \quad \text{(equilibrium)}.$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad \text{(equilibrium)}.$$

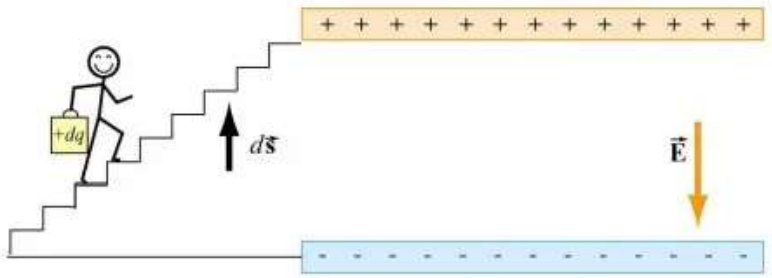
فصل ۲۵ : انباشت انرژی در میدان الکتریکی

$$q_1 + q_2 = q_0 \quad \text{(charge conservation)};$$
$$q_2 = q_0 - q_1.$$
$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0 - q_1}{C_2}.$$

$$\longrightarrow \quad q_1 = 6.35\ \mu\text{C}. \quad (q_0 = 22.365\ \mu\text{C}) \quad \longrightarrow \quad q_2 = 16.0\ \mu\text{C}.$$

فصل ۲۵ : انباشت انرژی در میدان الکتریکی

می‌توان از خازن‌ها به‌منظور ذخیره انرژی الکتریکی استفاده کرد. مقدار انرژی ذخیره شده در خازن برابر با کار انجام شده برای شارژ آن است. مطابق با شکل زیر میدان الکتریکی با صرف انرژی، باری را از یک صفحه جدا کرده و به صفحه دیگر منتقل می‌کند.



تمام پیکر بندی های بار الکتریکی دارای انرژی پتانسیل الکتریکی هستند.

انرژی پتانسیل الکتریکی یک خازن برابر با کاری که باید برای بار دار کردن آن انجام داد.

فصل ۲۵ : محاسبه انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن با بار:

خازنی را تصور کنید که در حالت اولیه بدون بار است. در هر کدام از این صفحات بیشمار بار مثبت و منفی وجود دارد، اما تعداد آن‌ها با یکدیگر برابر است، بنابراین بارهای مذکور همدگیر را خنثی می‌کنند. این خنثی کردن به این معنی است که بار خالص مثبت یا منفی روی هیچ‌یک از صفحات وجود ندارد. مطابق با شکل بالا فرض کنید که شخصی بار dq+ را از صفحه پایین به بالا منتقل می‌کند. پس از انجام این کار بار صفحه پایین برابر با dq- و صفحه بالا برابر با dq+ خواهد شد. پس از تکرار این فرآیند، نهایتا بار صفحه پایین برابر با q- و صفحه بالا برابر با q+ خواهد شد.

$$dW = V'\,dq' = \frac{q'}{C}\,dq'.$$

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int_0^q q'\,dq' = \frac{q^2}{2C}. \longrightarrow U = \tfrac{1}{2}CV^2$$

$$U = \frac{q^2}{2C} \quad \text{(potential energy)}.$$

فصل ۲۵ : چگالی انرژیِ میدان الکتریکی

انرژی ذخیره شده در یک خازن را می‌توان به‌صورت انرژی ذخیره شده در میدانِ خازن تصور کرد. در حالتی که با خازنی با صفحات موازی مواجه هستیم، ظرفیت و اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با:

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad}, \quad (C = \varepsilon_0 A/d), \longrightarrow u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2.$$

انرژی ذخیره شده بر حسب میدان الکتریکی موجود در خازن، به شکل زیر بدست خواهد آمد.

فرمول فوق برای هر نقطه در فضا که در آن میدان باشد صادق است.

فصل ۲۵ : چگالی انرژیِ میدان الکتریکی

مثال: چگالی انرژی الکتریکی هوای خشک

هوای خشک توانایی عایق بودن خود را در میدان $E_b=3\times10^6$ V/m از دست می‌دهد. چگالی انرژی الکتریکی در این میدان چقدر است؟

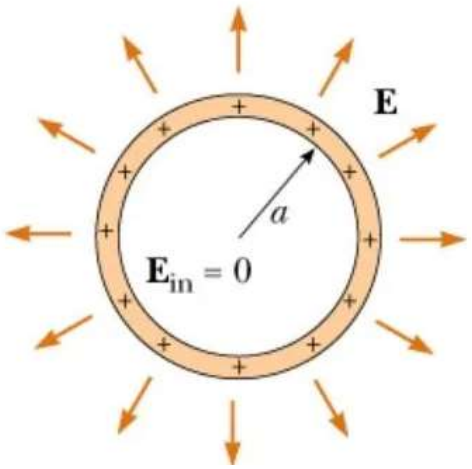
با جایگذاری مقادیر ضریب گذردهی مربوط به هوای خشک و میدان ارائه شده در صورت مسئله، در رابطه مربوط به چگالی میدان الکتریکی، داریم:

$$u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\left(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}\right)\left(3\times10^6\,\mathrm{V/m}\right)^2=40\ \mathrm{J/m^3}$$

فصل ۲۵ : چگالی انرژیِ میدان الکتریکی

مثال: انرژی ذخیره شده در پوسته کروی

پوسته‌ای کروی با بار Q و شعاع a را مطابق با شکل زیر در نظر بگیرید. انرژی ذخیره شده در پوسته مفروض چقدر است؟



میدان ناشی از پوسته کروی را برابر با مقدار زیر بدست آوردیم.

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}, & r > a \\ \vec{\mathbf{0}}, & r < a \end{cases}$$

از این رو چگالی انرژی الکتریکی ناشی از این میدان برابر است با:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

فصل ۲۵ : چگالی انرژیِ میدان الکتریکی

با بدست آمدن چگالی میدان، می‌توان با انتگرال‌گیری از آن، به کل انرژی ذخیره شده در میدان مفروض دست یافت. بدین منظور در ابتدا پوسته‌ای دیفرانسیلی را به ضخامت dr فرض می‌کنیم. حجم این پوسته برابر با $dV=4\pi r^2 dr$ خواهد بود. نهایتا با انتگرال‌گیری رابطه بالا روی این جزء حجم، داریم:

$$U_E = \int_a^{\infty} \left(\frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{2} QV$$

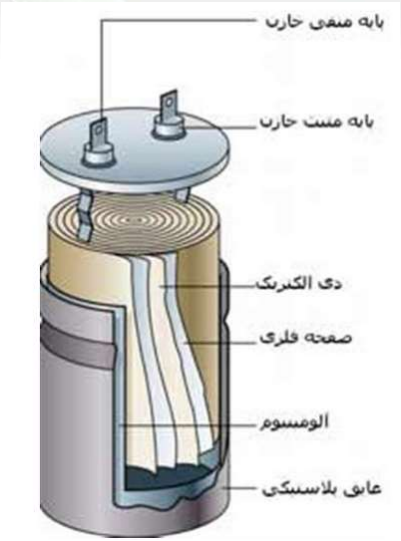
. پتانسیل ناشی از این بار برابر با $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ بدست می‌آید.

بنابراین می‌توان از dW در بازه ۰ تا Q انتگرال‌گیری کرد و کار لازم جهت قرار دادن بار Q روی پوسته را به شکل زیر بدست آورد.

$$W = \int dW = \int V dq = \int_0^Q dq \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

فصل ۲۵ : دی الکتریک چیست؟

برای بررسی خازن با دی الکتریک ابتدا باید بدانیم دی الکتریک چیست. مواد دی الکتریک مواد نارسانایی هستند که در آن‌ها هیچ الکترون آزادی وجود ندارد. آنچه ذکر شد به این معنی است که دی الکتریک قادر به انتقال جریان نیست. از دی الکتریک‌ها می‌توان برای ذخیره بار الکتریکی در حالی که حداقل انرژی به صورت گرما هدر رود استفاده کرد. نمونه‌هایی از دی الکتریک‌ها شامل میکا، پلاستیک، شیشه، چینی و اکسیدهای فلزی مختلف هستند و حتی هوای خشک نیز نمونه ای از دی الکتریک است.



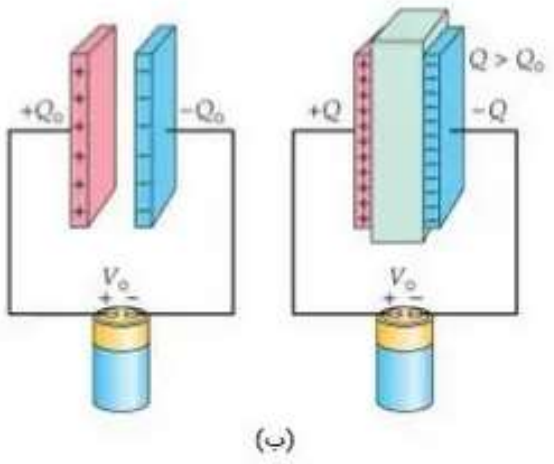
در بحث خازن با دی الکتریک بعد از آشنایی با دی الکتریک باید بدانیم چه ویژگی در دی الکتریک ها وجود دارد که آن‌ها را از هم متمایز می‌کند. در خازن صفحه موازی، هنگامی که دی الکتریک بین دو صفحه خازن قرار می‌گیرد میدان الکتریکی نسبت به حالتی که بین دو صفحه خلاء وجود دارد، کاهش می‌یابد. نسبت شدت میدان الکتریکی اعمال شده در غیاب دی الکتریک به شدت کاهش یافته میدان الکتریکی خازن در حضور دی الکتریک را ثابت دی الکتریک می‌نامیم و داریم:

$$K = \frac{E_0}{E}$$

فصل ۲۵ : خازن مسطح با دی الکتریک

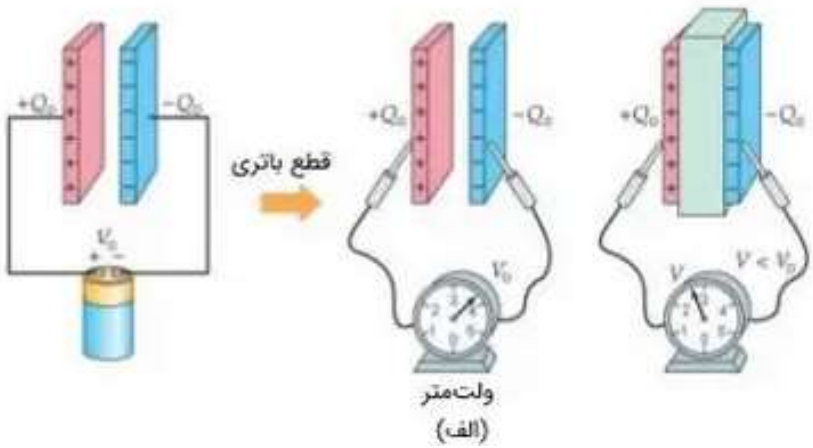
نخستین بار مایکل فارادی تغییرات ظرفیت خازن با دی الکتریک را تحقیق کرد.

فارادی نشان داد که اگر دو خازن یکی با دی الکتریکی و دیگری بدون دی الکتریک تا اختلاف پتانسیل یکسان پر شوند بار خازن با دی الکتریک بیشتر است.



فصل ۲۵ : خازن مسطح با دی الکتریک

اگر بار خازن را ثابت نگه داریم و دی الکتریک به میان آن وارد کنیم .
اختلاف پتانسیل دو سر آن کاهش می یابد.



$$V = \frac{V_0}{k}$$

فصل ۲۵ : خازن مسطح با دی الکتریک

نسبت ظرفیت خازن با دی الکتریک به ظرفیت آن بدون دی الکتریک را ثابت دی الکتریک می نامند.

$$C = \varepsilon_0 \mathscr{L},$$

$$\mathscr{L} = A/d$$

$$C = \kappa \varepsilon_0 \mathscr{L} = \kappa C_{\text{air}},$$

ظرفیت خازن مسطح با عایق

اگر میان صفحات یک خازن یک عایق با ثابت K قرار داشته باشد ظرفیت آن برابر می شود:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\epsilon_0 K}{d}$$

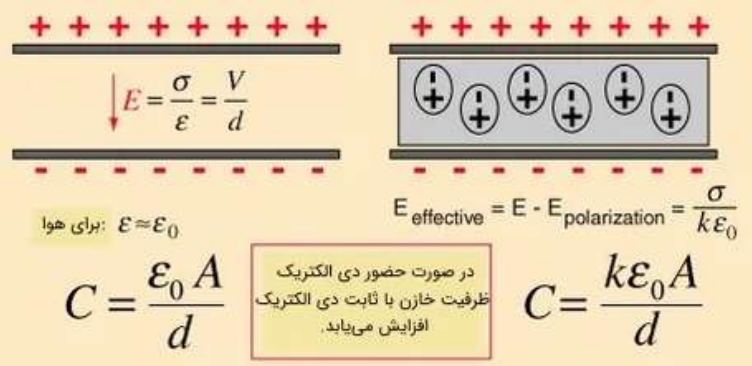
فصل ۲۵ : خازن مسطح با دی الکتریک

بطور کلی در ناحیه ای که بطور کامل با یک دی الکتریک پر شده معادلات الکترواستاتیک با تبدیل $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 k$ تغییر می یابند.

مثلا میدان الکتریکی بار نقطه ای:

$$E = \frac{1}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0}.$$



فصل ۲۵ : خازن مسطح با دی الکتریک

مثال : خازن مسطحی با ظرفیت c_0=13.5 pF که مساحت صفحات خازن مسطحی و فاصله آنها d از هم است . اگر با یک باتری خازن راتا اختلاف پتانسیل v_0=12.5 V پر کنیم و سپس باتری را قطع کرده و یک بره دی الکتریک به ضخامت d میان صفحات قرار داده شود. k=6.5

الف) انرژی انباشته شده را قبل و بعد از قرار دادن بره بدست آورید؟

$$U_i = \tfrac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

$$U_i = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(13.5 \times 10^{-12}\ \text{F})(12.5\ \text{V})^2$$
$$= 1.055 \times 10^{-9}\ \text{J} = 1055\ \text{pJ} \approx 1100\ \text{pJ}.$$

$$U_f = \frac{q^2}{2\kappa C} = \frac{U_i}{\kappa} = \frac{1055\ \text{pJ}}{6.50}$$
$$= 162\ \text{pJ} \approx 160\ \text{pJ}.$$

فصل ۲۵ : خازن مسطح با دی الکتریک

ب) کار لازم برای قرار دادن بره چقدراست؟

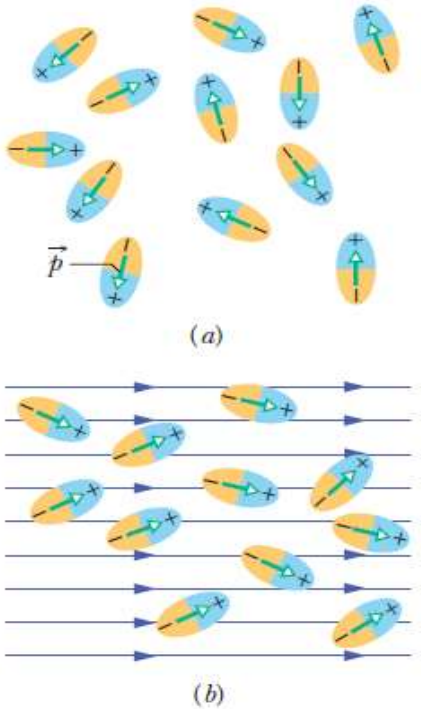
$$W = U_i - U_f = (1055 - 162)\,\text{pJ} = 893\,\text{pJ}.$$

فصل ۲۵ : دی الکتریکها از دید اتمی

موقع قرار دادن دی الکتریک درمیدان الکتریکی ، از لحاظ اتمی چه اتفاقی می افتد ؟

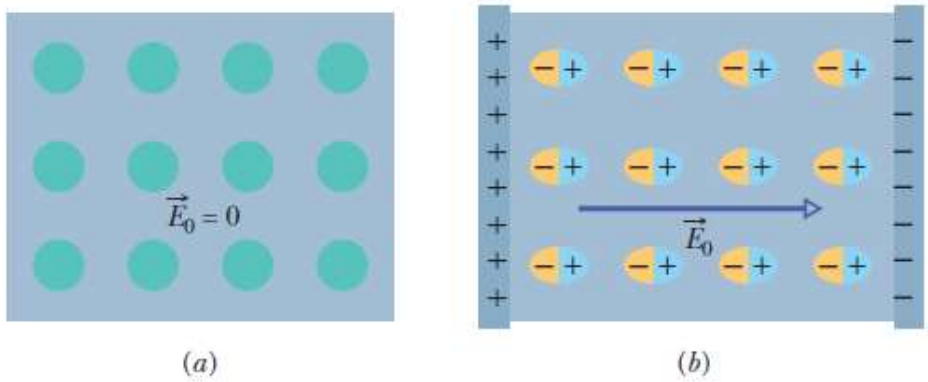
هنگامی که عایق بین دو صفحه خازن وارد می‌شود (دی الکتریک ها معمولاً عایق نامیده می‌شوند) نزدیک‌ترین قسمت عایق به صفحه مثبت خازن دارای بار منفی می‌شود در حالی که طرف نزدیک به صفحه منفی بار مثبت خواهد داشت.
هنگامی که میدان الکتریکی ناشی از بار الکتریکی صفحات خازن توسط میدان الکتریکی ناشی از دی الکتریک قطبی شده حذف می‌شود میدان خالص درون خازن و اختلاف پتانسیل در خازن کاهش می‌یابد. برای بازگشت به اختلاف پتانسیل اولیه خازن به بار بیشتری نیاز دارد. اثر اصلی دی الکتریک افزایش میزان بار خازن برای یک اختلاف پتانسیل ثابت است.

اگر مولکولها قطبی باشند خواهد چرخید و در امتداد میدان قرار خواهند گرفت.



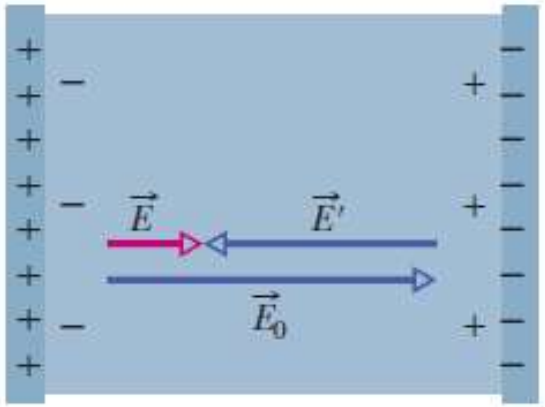
فصل ۲۵ : دی الکتریکها از دید اتمی

اگر مولکولها قطبی نباشد ، میدان خارجی باعث جدائی مرکز موثر بار ها ی مثبت ومنفی شد. و در آن یک گشتاور دو قطبی الکتریکی القاء می کند.



فصل ۲۵ : دی الکتریکها از دید اتمی

نتیجه کلی این است که در وجوه عایق مقابل صفحات خازن بار الکتریکی سطحی مقید القاء می گردد.



(c)

فصل ۲۵ : دی الکتریکها از دید اتمی

این بار های مقید میدان اصلی داخلی را تضعیف می کنید

$$E = E_0 - E'$$

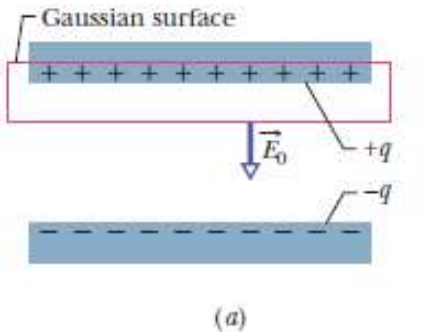
چون پتانسیل به نسبت $1/k$ کم میشود میدان نیز به همین نسبت کم

می شود :

$$V = \frac{V_0}{k}$$

فصل ۲۵ : دی الکتریکها و قانون گاوس

می خواهیم ببینیم قانون گاوس در حضور دی الکتریک چگونه است :
اگر دی الکتریک نباشد میدان بین صفحات خازن:



(a)

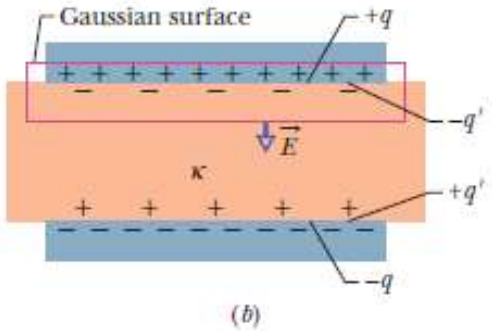
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 EA = q,$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}.$$

که در آن q بار آزاد صفحات خازن است.

فصل ۲۵ : دی الکتریکها و قانون گاوس

اگر دی الکتریک باشد میدان بین صفحات خازن وقانون گاوس:



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 EA = q - q'.$$

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A}.$$

$$q - q' = \frac{q}{\kappa}.$$

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A}.$$

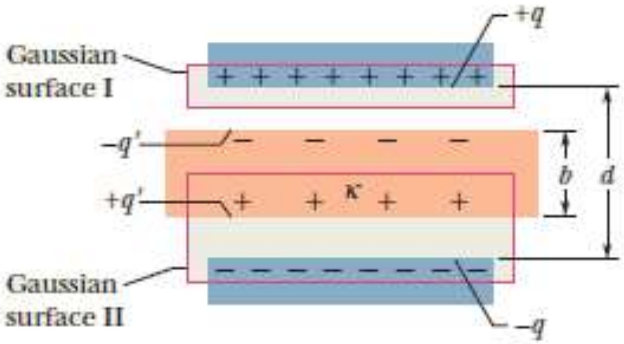
به این کمیت بردار جابجایی الکتزیکی میگویند.

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad \text{(Gauss' law with dielectric).}$$

$D = \varepsilon_0 kE$

فصل ۲۵ : دی الکتریکها و قانون گاوس

مثال : بره دی الکتریکی به ضخامت b=0.78cm و ثابت دی الکتریک k=2.61 میان صفحات خازنی به مساحت $A=115cm^2$ و فاصله جدائی d=1.24 cm قرار گرفته است. در غیاب دی الکتریک اختلاف پتانسیل $v_0=85/57$ را به دو سر خازن می بندیم . سپس باتری را بر می داریم و بره را میان صفحات قرار می دهیم.



فصل ۲۵ : دی الکتریکها و قانون گاوس

الف) ظرفیت قبل از قرار دادن بره چیست ؟

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{1.24 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 8.21 \times 10^{-12}\ \text{F} = 8.21\ \text{pF}.$$

ب) بار آزاد روی صفحات خازن چقدر است ؟

$$q = C_0 V_0 = (8.21 \times 10^{-12}\ \text{F})(85.5\ \text{V})$$
$$= 7.02 \times 10^{-10}\ \text{C} = 702\ \text{pC}.$$

ج) میدان الکتریکی درشکاف بره چقدر است ؟

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = E_0\, dA \cos 0^\circ = E_0\, dA.$$

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 \oint dA = q.$$

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 A = q,$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A}.$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(1)(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}$$
$$= 6900\ \text{V/m} = 6.90\ \text{kV/m}.$$

فصل ۲۵ : دی الکتریکها و قانون گاوس

د) میدان الکتریکی در دی الکتریک چقدر است ؟

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = -\varepsilon_0 \kappa E_1 A = -q. \longrightarrow E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{6.90\ \text{kV/m}}{2.61}$$
$$= 2.64\ \text{kV/m}.$$

ه) اختلاف پتانسیل میان صفحات؟

$$V = \int_{-}^{+} E\, ds = E_0(d - b) + E_1 b$$
$$= (6900\ \text{V/m})(0.0124\ \text{m} - 0.00780\ \text{m})$$
$$+ (2640\ \text{V/m})(0.00780\ \text{m})$$
$$= 52.3\ \text{V}.$$

فصل ۲۵ : دی الکتریکها و قانون گاوس

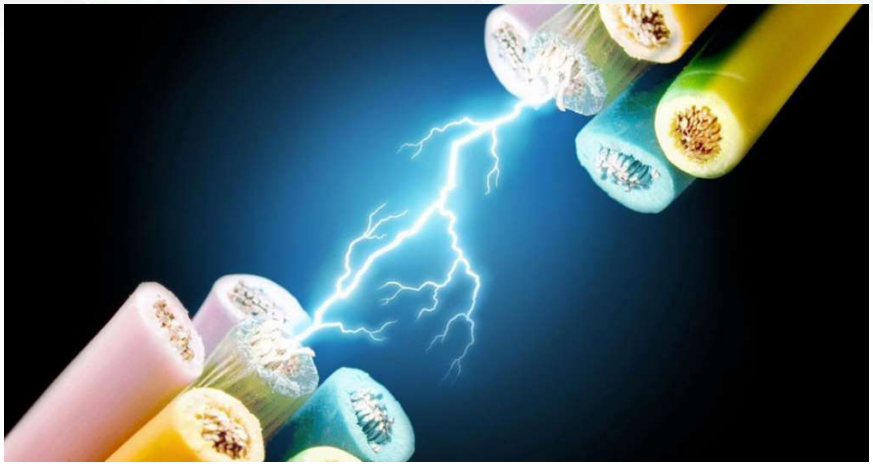
و) ظرفیت نهایی خازن

$$C = \frac{q}{V} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\,\text{C}}{52.3\,\text{V}}$$
$$= 1.34 \times 10^{-11}\,\text{F} = 13.4\,\text{pF}.$$

فصل ۲۶ : جریان ومقاومت



فصل ۲۶ : جریان ومقاومت



جریان و چگالی جریان

مقاومت ، مقاومت ویژه و رسانندگی

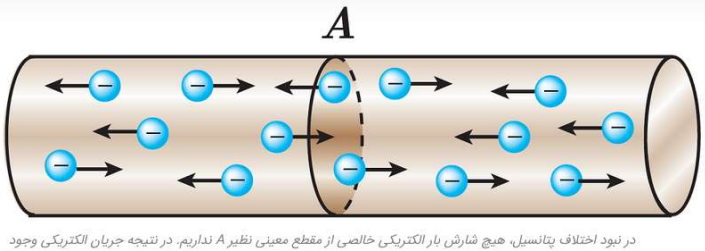
قانون اهم

قانون اهم – دید میکروسکوپیک

انتقال انرژی در مدار الکتریکی

فصل ۲۶ : جریان و چگالی جریان

حرکت بارهای الکتریکی تحت عنوان جریان الکتریکی شناخته می‌شود.

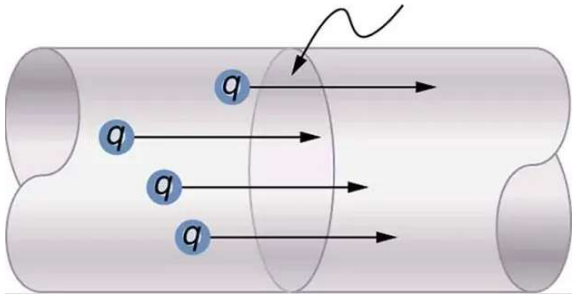


در نبود اختلاف پتانسیل، هیچ شارش بار الکتریکی خالصی از مقطع معینی نظیر A نداریم. در نتیجه جریان الکتریکی وجود

اگر دو سر سیم به ولتاژ ثابتی وصل شود و بار در زمان t از سطح مقطع سیم بگذرد جریان الکتریکی عبارت است از:

$$I = \frac{q}{t}$$

1 ampere = 1 A = 1 coulomb per second = 1 C/s.



اگر آهنگ شارش بار با زمان ثابت نباشد جریان ثابت نیست:

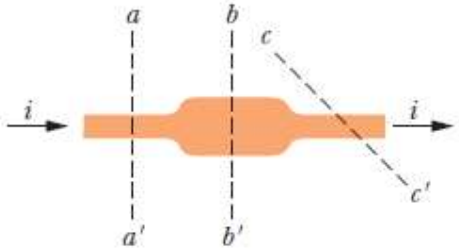
در این فصل فقط جریانهای ثابت مطالعه می گردد

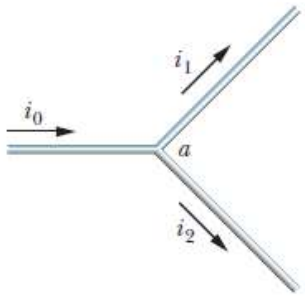
$$I = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad q = \int dq = \int_0^t i\,dt,$$

فصل ۲۶ : جریان و چگالی جریان

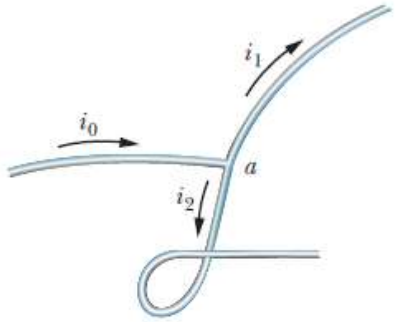
جریان در تمام مقاطع رسانا یکسان است .

برای شارش جریان در یک سیم باید میدان الکتریکی در داخل آن وجود داشته باشد تا بر الکترونها نیرو وارد کند . آیا این مسئله با صفر بودن میدان در رسانا ها تناقض دارد چرا ؟





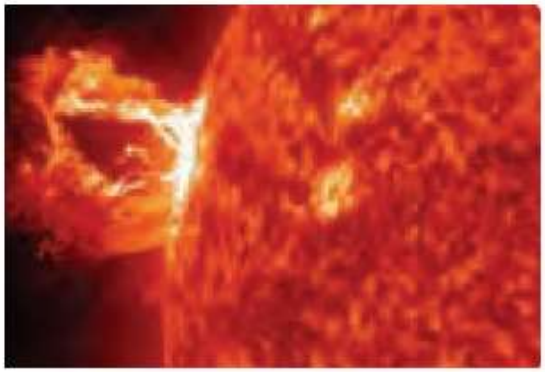
$$i_0 = i_1 + i_2.$$



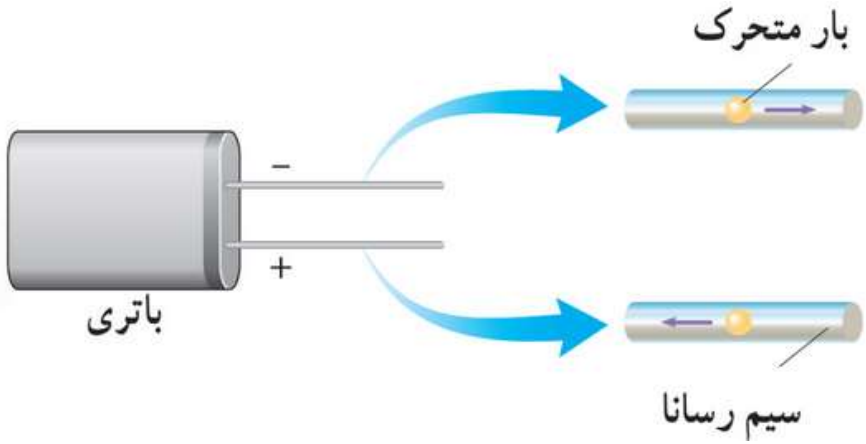
فصل ۲۶ : جریان و چگالی جریان

حاملهای بار تنها الکترونها نیستند مثلا در الکترولیت ها یونهای مثبت و منفی حامل بارند.

بنا به قرار داد جهت حرکت حاملهای بار مثبت جهت جریان فرض می شود.

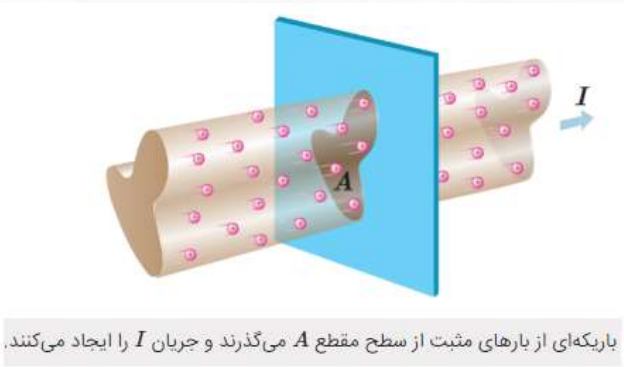


فوران عظیمی از الکترون‌ها و یون‌ها که از سطح خورشید پرتاب می‌شوند.

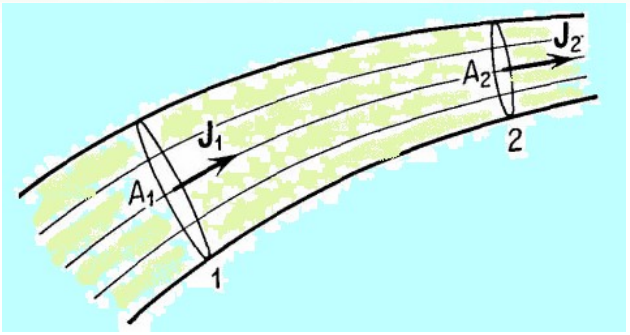


فصل ۲۶ : جریان و چگالی جریان

جریان کمیت ماکروسکوپیک است و مشخصه هر رسانا است . کمیت های میکروسکوپیک متناسب با آن چگالی جریان است.



باریکه‌ای از بارهای مثبت از سطح مقطع A می‌گذرند و جریان I را ایجاد می‌کنند.



چگالی جریان یک بردار است و مشخصه نقطه ای واقع در رسانا است . اگر جریان در سرتاسر رسانایی با مقطع یکسان باشد چگالی جریان برابر است با :

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}. \longrightarrow i = \int J\, dA = J \int dA = JA, \longrightarrow J = \frac{i}{A},$$

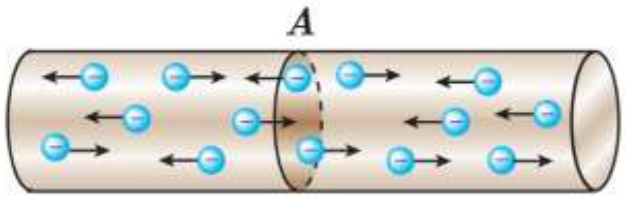
فصل ۲۶ : جریان و چگالی جریان

بردار **J** در هر نقطه در جهت حرکت حامل بار مثبت در آن نقطه است

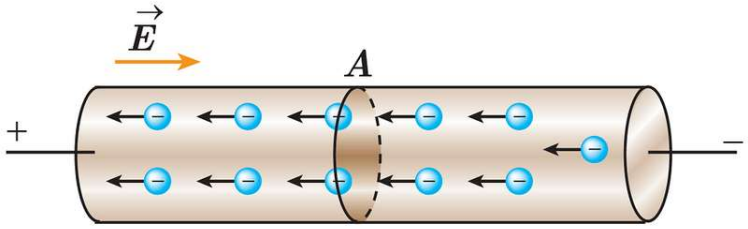
رابطه بین **J** و **i** برای سطح خاصی از رسانا :

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

که بردار dA برداری است عمود بر عنصر سطح



در نبود اختلاف پتانسیل، شارش بار خالصی از مقطع معیّن A سیم، نداریم.



با اعمال ولتاژ (اختلاف پتانسیل)، شارش بار الکتریکی خالص از سطح مقطع معین A صفر نبوده و لذا جریان الکتریکی داریم.

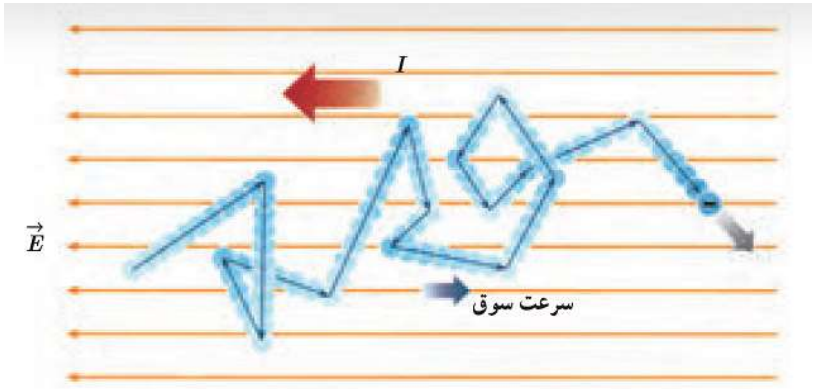
فصل ٢٦ : سرعت سوق حاملهای بار

انواع سرعت حاملهای بار :

سرعت گرمایی

سرعت سوق

سرعت سوق: سرعتی است که یک ذره (مثلا الکترون) به علت بودن در یک میدان الکتریکی بدست می‌آورد.

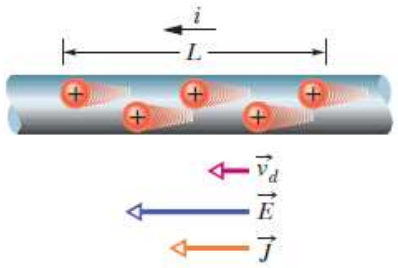


مسیر زیگزاگ یک الکترون آزاد در یک رسانای فلزی که در حضور میدان الکتریکی، این مسیر زیگزاگ در خلاف جهت میدان (بار منفی)، سوق یافته است.

فصل ۲۶ : سرعت سوق حاملهای بار

محاسبه سرعت سوق حاملهای بار با استفاده ازچگالی جریان:

با فرض اینکه چگالی حاملهای بار n باشد تعداد حاملها nAL درطول سیم در زمان t سطح مقطع سیم را قطع میکنند.



$$q = (nAL)e. \qquad t = \frac{L}{v_d}. \longrightarrow i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L/v_d} = nAev_d.$$

$$v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{J}{ne} \longrightarrow \vec{J} = (ne)\vec{v}_d.$$

فصل ٢٦ : سرعت سوق حاملهای بار

مثال : سر یک سیم آلومینیومی به قطر 2.5mm به سر یک سیم مسی به قطر1.8mm جوش خورده است . از سیم حاصل جریان ثابت ۱۰ آمپر می گذرد الف) چگالی جریان در هر سیم چقدر است ؟

حل:

$$A_{Al} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(2.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{M})^2$$
$$= 4.91 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2},$$
$$J_{Al} = \frac{i}{A_{Al}} = \frac{17 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}}{4.91 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2}}$$
$$= 3.5 \times 10^{3}\ \mathrm{A/m^2}.$$
$$J_{Cu} = \frac{i}{A_{Cu}} = \frac{17 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}}{2.54 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2}}$$
$$= 6.7 \times 10^{3}\ \mathrm{A/m^2}.$$

فصل ۲۶ : سرعت سوق حاملهای بار

ب) سرعت سوق الکترنهای هدایت در سیم مسی چقدر است؟

حل:

$$n = \frac{N_A \rho}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})(9.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)}{64 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}$$

$$= 8.47 \times 10^{28}\ \text{electrons/m}^3.$$

$$v_d = \frac{6.7 \times 10^3\ \text{A/m}^2}{\left(8.47 \times 10^{28}\ \frac{\text{electrons}}{\text{m}^3}\right)\left(1.6 \times 10^{-19}\ \frac{\text{C}}{\text{electron}}\right)}$$

$$= 4.9 \times 10^{-7}\ \text{m/s} = 1.8\ \text{mm/h}.$$

فصل ۲۶ : مقاومت ، مقاومت ویژه و رسانندگی

مقاومت دو نقطه از رسانا که به اختلاف پتانسیل V وصل شده و جریان i در آن جاری است برابر است با :

$$R = \frac{V}{i} \quad \text{(definition of } R\text{)}.$$

1 ohm = 1 Ω = 1 volt per ampere
= 1 V/A.

واحد مقاومت اهم است.



$$i = \frac{V}{R},$$

فصل ۲۶ : مقاومت ، مقاومت ویژه و رسانندگی

به هر مقاومتی یک مقاومت ویژه ρ وابسته است که مشخصه ماده است و برای ماده همسانگرد:

$$\rho = \frac{E}{J} \quad \text{(definition of } \rho\text{)}.$$

واحد مقاومت ویژه اهم – متر است چون:

$$\frac{\text{unit } (E)}{\text{unit } (J)} = \frac{\text{V/m}}{\text{A/m}^2} = \frac{\text{V}}{\text{A}}\,\text{m} = \Omega \cdot \text{m}.$$

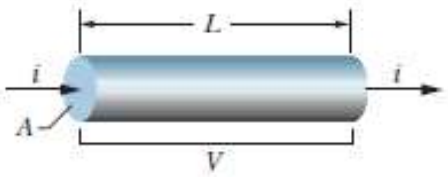
رسانندگی ویژه و مقاومت ویژه رابطه زیر را دارند

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \text{(definition of } \sigma\text{)}. \longrightarrow \vec{E} = \rho \vec{J}.$$

Material	Resistivity, ρ ($\Omega \cdot$m)	Coefficient of Resistivity, α (K^{-1})
	Typical Metals	
Silver	1.62×10^{-8}	4.1×10^{-3}
Copper	1.69×10^{-8}	4.3×10^{-3}
Gold	2.35×10^{-8}	4.0×10^{-3}
Aluminum	2.75×10^{-8}	4.4×10^{-3}
Manganin[a]	4.82×10^{-8}	0.002×10^{-3}
Tungsten	5.25×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Iron	9.68×10^{-8}	6.5×10^{-3}
Platinum	10.6×10^{-8}	3.9×10^{-3}
	Typical Semiconductors	
Silicon, pure	2.5×10^{3}	-70×10^{-3}
Silicon, *n*-type[b]	8.7×10^{-4}	
Silicon, *p*-type[c]	2.8×10^{-3}	
	Typical Insulators	
Glass	$10^{10} - 10^{14}$	
Fused quartz	$\sim 10^{16}$	

فصل ٢٦ : مقاومت ، مقاومت ویژه و رسانندگی

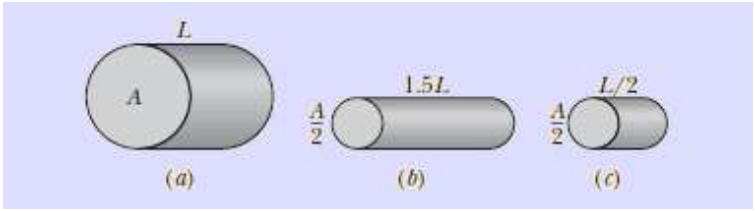
محاسبه مقاومت سیمی به طول L و سطح مقطع A و مقاومت ویژه ρ



$$E = V/L \quad \text{and} \quad J = i/A.$$

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{V/L}{i/A}.$$

$$R = \rho \frac{L}{A}.$$



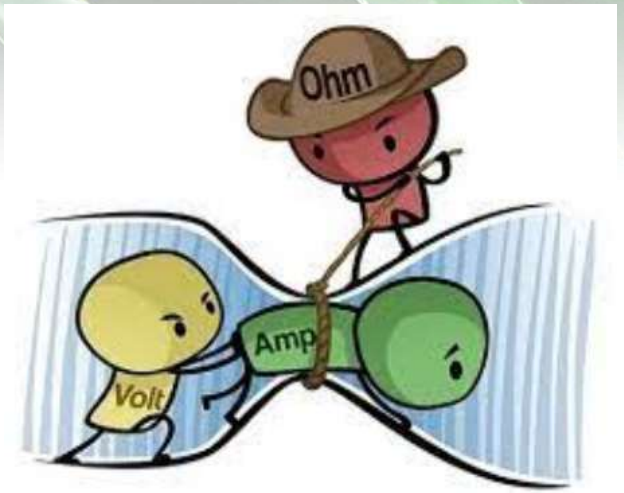
فصل ٢٦ : مقاومت ، مقاومت ویژه و رسانندگی

$$i = \int j.ds$$
$$v_{ab} = -\int \vec{E}.d\vec{l}$$

V, R , i کمیتهای ما کروسکپیکی هستند که برای یک جسم خاص یا یک ناحیه گسترده بکار می روند. کمیتهای E, J و ρ کمیت های میکروسکپیک متناظر با آنها هستند که در هر نقطه جسم مقادیری دارند.

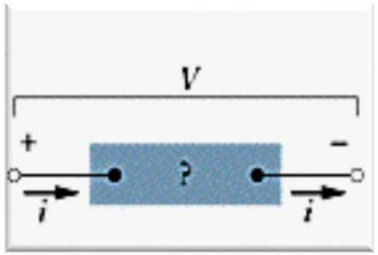
کمیتهای ماکرو سکپیک را می توان با انتگرالگیری از کمیتهای میکروسکپیک به دست آورد.

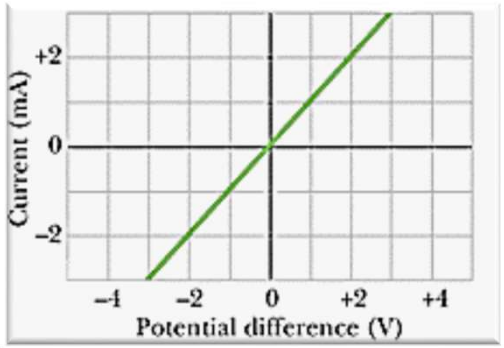
فصل ٢٦ : قانون اهم



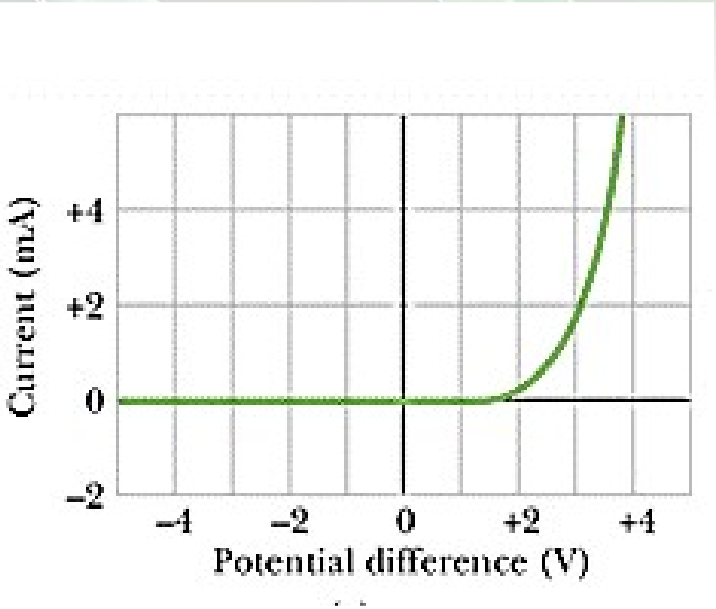
قانون اهم : مقاومت یک رسانا همواره ثابت است و به ولتاژ اعمالی بستگی ندارد .

برای مواد اهمی مشخصه ولتاژ – جریان یک خط راست است که شیب آن برابر مقاومت آن است





فصل ۲۶ : قانون اهم



بعضی از مواد مانند یک دیود نیمه رسانا از قانون اهم تبعیت نمی کنند.

مشخصه ولتاژ- جریان یک نیمه رسانا:

فصل ۲۶ : قانون اهم

فرمول میکروسکوپیک قانون اهم به صورت زیر است.

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}.$$

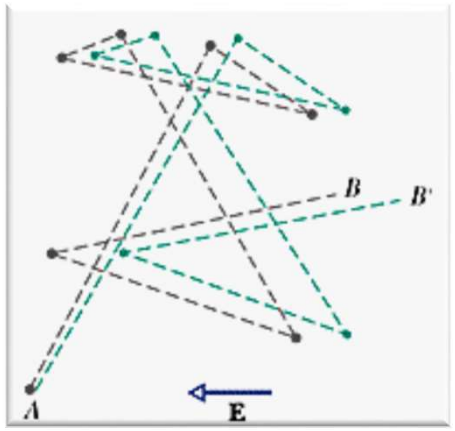
در غیاب میدان حرکت الکترونها ی آزاد کاملا کاتوره ای است و دارای سرعت متوسط بسیار زیادند.

$$v_d \approx (10^{-13}) v_{eff}$$

سرعت سوق بسیار کوچکتر از سرعت موثرحرارتی الکترونها است

فصل ٢٦ : قانون اهم ؛ دید میکروسکوپیک

در حضور میدان الکترونها حرکت کاتوره ای خود را طوری تغییر می دهند که درخلاف جهت میدان با سرعت سوق v_d به آرامی حرکت کنند.



فصل ٢٦ : قانون اهم ؛ دید میکروسکوپیک

محاسبه مقاومت ویژه در مدل کلاسیک الکترون آزاد:

زمان متوسط میان بین برخوردها الکترون و شبکه T است

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}.$$

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}.$$

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m}.$$

$$E = \left(\frac{m}{e^2 n\tau}\right) J$$

$$\rho = \frac{m}{e^2 n\tau}.$$

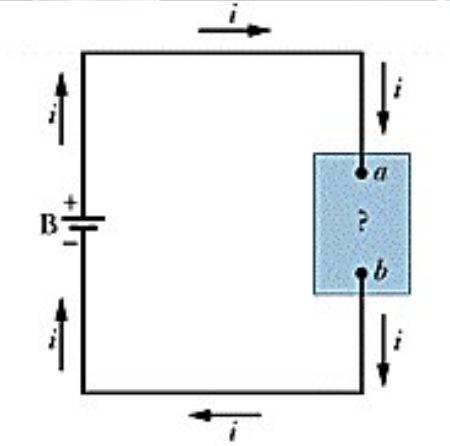
فصل ۲۶ : قانون اهم ؛ دید میکروسکوپیک

مثال: زمان متوسط میان برخوردها و پویش آزاد میانگین برای الکترونها هدایت مس را محاسبه کنید.

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho} = \frac{9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{3.66 \times 10^{-17}\ \text{kg/s}} = 2.5 \times 10^{-14}\ \text{s}.$$

$$\lambda = \tau v_{\text{eff}} = (2.5 \times 10^{-14}\ \text{s})(1.6 \times 10^{6}\ \text{m/s}) = 4.0 \times 10^{-8}\ \text{m} = 40\ \text{nm}.$$

فصل ۲۶ : انتقال انرژی در مدار الکتریکی



می خواهیم آهنگ انتقال انرژی الکتریکی به مصرف کننده ای که بین دو نقطه a و b است را محاسبه کنیم.

انرژی منتقل شده به مصرف کننده در زمان t برابر است با:

$$dU = dq\,V = i\,dt\,V.$$

$$P = iV$$

فصل ۲۶ : انتقال انرژی در مدار الکتریکی

آهنگ اتلاف انرژی الکتریکی در یک مقاومت و آهنگ تولید گرما:

$$P = i^2 R$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

مثال: سیم گرمکنی در آلیاژ نیکروم به مقاومت ۷۲ اهم در دست است در موارد زیر آهنگ ایجاد گرما را بدست آورید الف) ولتاژ ۱۲۰ ولت به سیم وصل می شود .ب) سیم را نصف کرده و همین ولتاژرا به آن وصل می کنیم

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120\ \mathrm{V})^2}{72\ \Omega} = 200\ \mathrm{W}.$$

$$P' = \frac{(120\ \mathrm{V})^2}{36\ \Omega} = 400\ \mathrm{W}.$$

فصل ۲۷: نیرو محرکه الکتریکی ومدارها



فصل ۲۷: نیرو محرکه الکتریکی ومدارها

نیروی محرکه

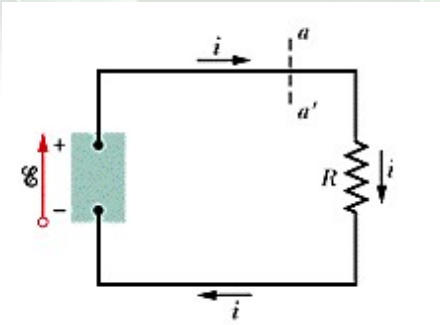
محاسبه جریان

مدارهای چند حلقه ای

اندازه گیری جریان و اختلاف پتانسیل

مدارهای RC

نیروی محرکه



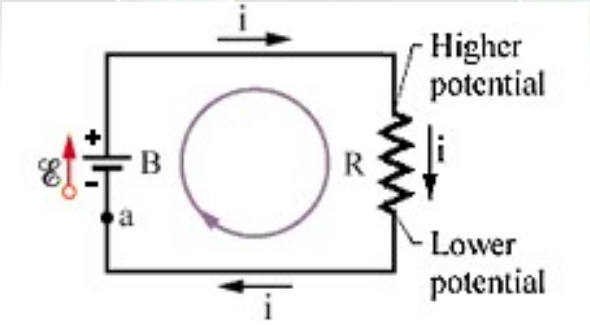
وسایلی چون باتری ها منبع نیروی محرکه الکتریکی هستند و قادرند میان هر دو قطعه اختلاف پتانسیل و جریان برقرار کنند.

واحد نیروی محرکه الکتریکی ژول بر کولن یا همان ولت است.

منبع نیرو ی محرکه الکتریکی ایده آل فاقد مقاومت داخلی است

نیروی محرکه

منبع نیروی محرکه الکتریکی روی حاملهای بار کار انجام می دهد و بار های مثبت را از نقطه با پتانسیل پایین به پتانسیل بالا منتقل می کند.

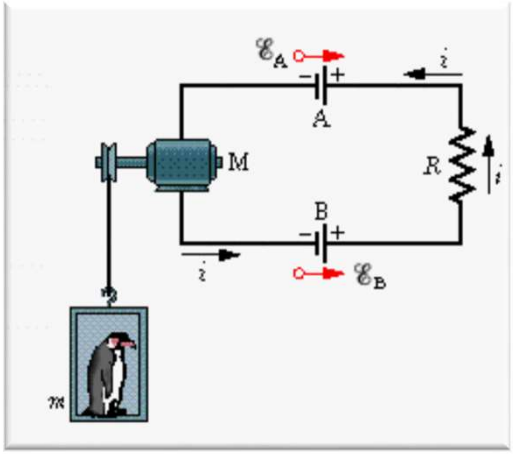


اگر درانتقال بار از سر منفی به مثبت منبع کار انجام دهد نیروی محرکه برابر است با :

$$\mathscr{E} = \frac{dW}{dq}$$

نیروی محرکه

در شکل زیر انرژی شیمیایی گرفته از باتری باعث بلند کردن وزنه – ذخیره انرژی شیمیایی در باتری و گرمای تولید شده در مقاومت و افزایش انرژی پتانسیل گرانشی جرم می شود.



محاسبه جریان

قوانین کیروشهوف برای محاسبه جریان :

الف) قانون حلقه : جمع جبری تغییرات پتانسیل در طی یک دوره کامل در هر مدار صفر است .

قانون حلقه همان قانون بقاء انرژی است .

ب) قانون گره : جمع جبری جریانهای وارد شده به هر گره صفر است.

قانون گره همان قانون بقاء بار الکتریکی است.

محاسبه جریان

چند نکته درحل مسائل :

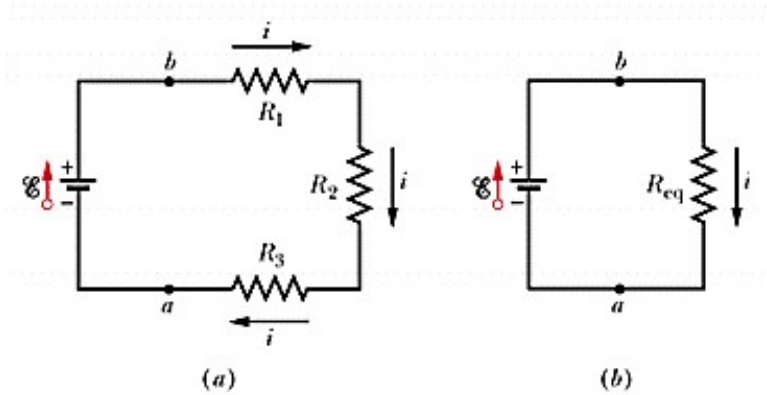
۱- هر گاه مقاومتی در جهت جریان طی شود تغییر پتانسیل آن -iR و در جهت مخالف iR است.

۲- اگر یک منبع نیروی محرکه در جهت نیروی محرکه طی شود تغییر پتانسیل آن ε + و در جهت مخالف ε- است.

۳- اگر یک خازن د رجهت خلاف جریان از صفحه منفی به مثبت طی شود تغییر پتانسیل q/c و -q/c بالعکس است.

محاسبه جریان

مثال : به هم بستن مقاومتها بطور متوالی ، مقاومت معادل را بدست آورید؟



محاسبه جریان

حل :

$$\mathscr{E} - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}.$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3.$$

محاسبه جریان

اگر مقاومت به صورت سری بسته شوند مقاومت معادل برابر است با :

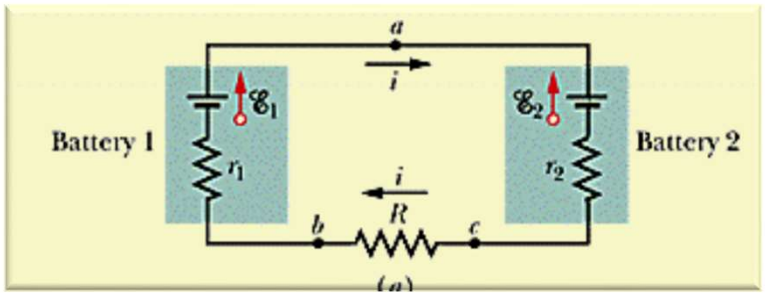
$$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j$$

در حالت سری جریان مقاومتها یکسان و پتانسیل کل دو سر آنها جمع پتانسیل هر یک از مقاومتها است.

محاسبه جریان

مثال : الف) جریان مدار شکل زیر را بدست آورید؟

ب) اختلاف پتانسیل دو سر a, b را محاسبه کنید .



$\mathscr{E}_1 = 4.4\ \text{V}, \quad \mathscr{E}_2 = 2.1\ \text{V},$

$r_1 = 2.3\ \Omega, \quad r_2 = 1.8\ \Omega, \quad R = 5.5\ \Omega.$

محاسبه جریان

حل :

$$-\mathscr{E}_1 + ir_1 + iR + ir_2 + \mathscr{E}_2 = 0.$$

$$i = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{4.4\ \text{V} - 2.1\ \text{V}}{5.5\ \Omega + 2.3\ \Omega + 1.8\ \Omega}$$

$$= 0.2396\ \text{A} \approx 240\ \text{mA}.$$

$$V_b - ir_1 + \mathscr{E}_1 = V_a$$

$$V_a - V_b = -ir_1 + \mathscr{E}_1$$

$$= -(0.2396\ \text{A})(2.3\ \Omega) + 4.4\ \text{V}$$

$$= +3.84\ \text{V} \approx 3.8\ \text{V}.$$

مدارهای چند حلقه ای

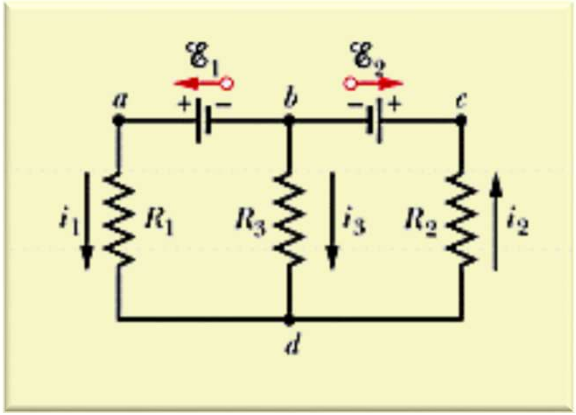
در مدار های چند حلقه ای برای محاسبه جریان در هر شاخه باید هم از قانون حلقه و هم گره استفاده کرد.

جهت جر یانها در هر شاخه از قبل معلوم نیست.

یک جهت فرضی برای جریان در نظر می گیریم. پس از حل مسئله اگر مقدار آن مثبت بود جهت فرضی جهت واقعی جریان است و اگر منفی بود جهت واقعی در خلاف جهت فرضی است.

مدارهای چند حلقه ای

مثال : در شکل زیر جریان هر شاخه را بدست آورید.



مدارهای چند حلقه ای

حل: از حل سه معادله زیر جریانها به دست می آید:

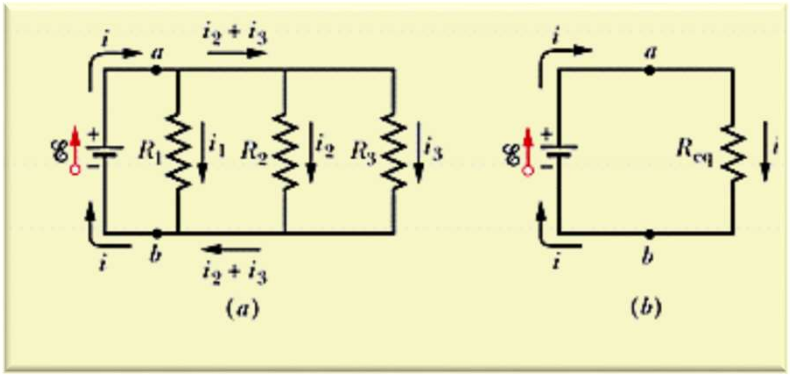
$$i_1 + i_3 = i_2.$$

$$-i_3R_3 - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0.$$

$$\mathscr{E}_1 - i_1R_1 - i_2R_2 - \mathscr{E}_2 = 0.$$

مدارهای چند حلقه ای

مثال : مقاومتهایی که به دو سر آنها اختلاف پتانسیل یکسان اعمال شود موازی خوانده می شوند . مقاومت هم ارز ترکیب موازی شکل زیر را بدست آورید.



مدارهای چند حلقه ای

حل:

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}, \quad \text{and} \quad i_3 = \frac{V}{R_3},$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$

$$i = \frac{V}{R_{eq}}.$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

اندازه گیری جریان و اختلاف پتانسیل

آمپر سنج برای اندازه گیری جریان و ولت سنج برای اندازه گیری اختلاف پتانسیل بکار می رود.

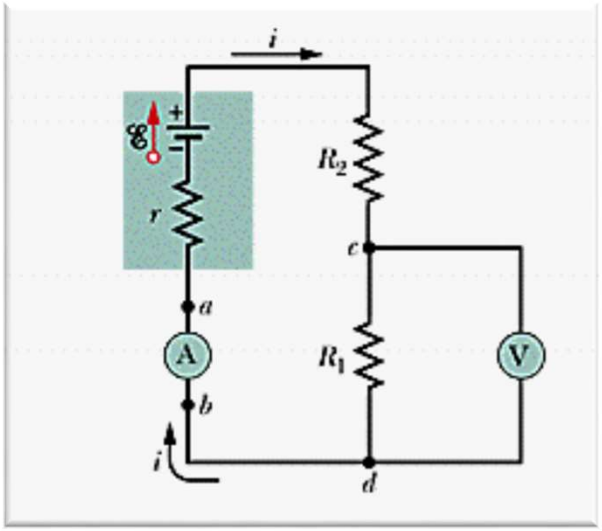
مقاومت داخلی یک آمپرسنج باید بسیار کم و ولت سنج بسیار زیاد باشد.





اندازه گیری جریان و اختلاف پتانسیل

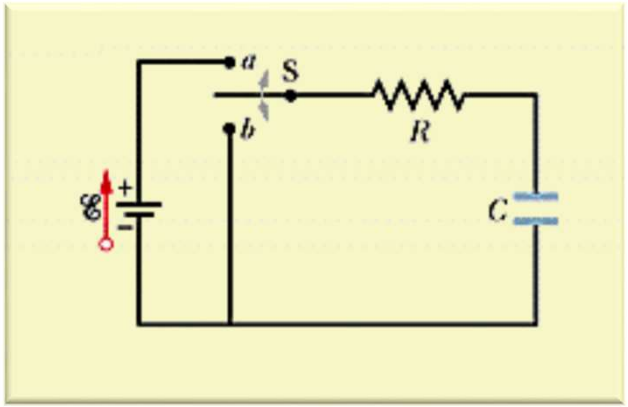
آمپرسنج به صورت سری و ولت سنج به صورت موازی در مدار قرار می گیرد.



مدارهای RC

شارژ خازن

در شکل زیر اگر کلید به سمت بالا زده شود خازن شروع به شارژ شدن می کند.



مدارهای RC

می خواهیم جریان مدار و بار خازن را به صورت تابعی از زمان بیابیم:

$$\mathscr{E} - iR - \frac{q}{C} = 0.$$

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}$$

$$q = C\mathscr{E}(1 - e^{-t/RC})$$

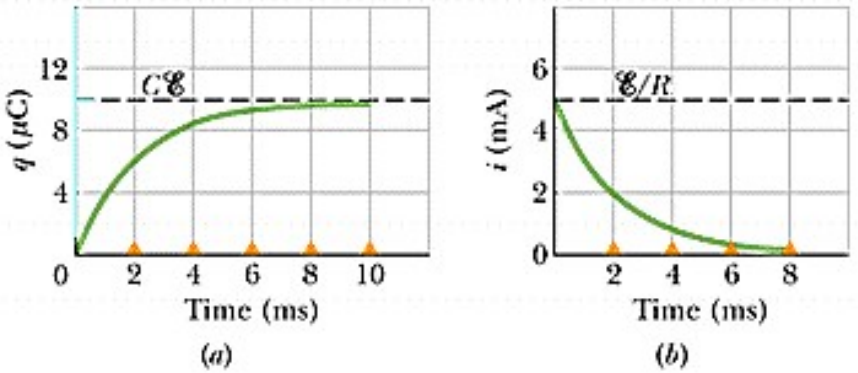
$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)e^{-t/RC}$$

مدارهای RC

کمیت RC را ثابت زمانی خازنی مدار نامند

زمانی است که بار خازن به ۶۳ درصد مقدار نهایی اش می رسد

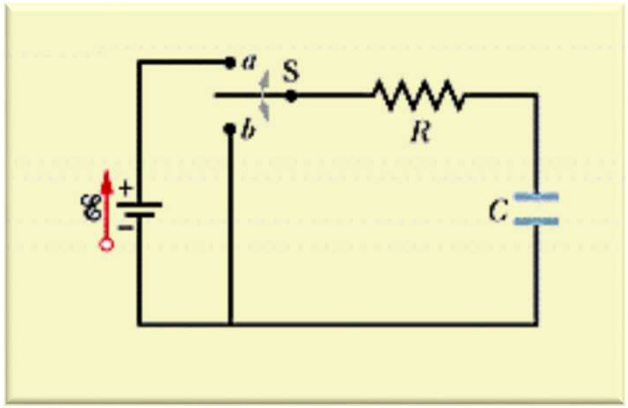
تغییرات بار خازن و جریان مدار به صورت تابع زمان :



مدارهای RC

دشارژ خازن

اگر کلید پس از باردار شدن خازن در وضع b قرار گیرد خازن در حال تخلیه شدن خواهد بود:



مدارهای RC

می خواهیم ببینیم بار خازن و جریان نسبت به زمان چگونه تغییر می کند

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$q=q_0e^{-t/RC}$$

$$i=\frac{dq}{dt}=\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC}$$

مدارهای RC

مثال : خازن دارای بار اولیه است و از طریق مقاومت تخلیه می شود . الف) در چه زمانی بر حسب بار به نصف مقدار اولیه اش می رسد.

حل:

$$q = q_0 e^{-t/RC},$$

$$\tfrac{1}{2}q_0 = q_0 e^{-t/RC},$$

$$\ln \tfrac{1}{2} = \ln(e^{-t/RC}) = -\frac{t}{RC}$$

$$t = (-\ln \tfrac{1}{2})RC = 0.69RC = 0.69\tau.$$

مدارهای RC

ب) پس از چه مدتی انرژی به نصف مقدار اولیه اش می رسد

حل:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2t/RC} = U_0 e^{-2t/RC},$$

$$\tfrac{1}{2}U_0 = U_0 e^{-2t/RC},$$

$$\ln \tfrac{1}{2} = -\frac{2t}{RC}$$

$$t = -RC\frac{\ln \frac{1}{2}}{2} = 0.35RC = 0.35\tau.$$

فصل ۲۸ : میدان مغناطیسی



فصل ۲۸ : میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی

تعریف

نیروی مغناطیس وارد بر جریان

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

بارهای در حال دوران

سیکلو ترونها و سنکرو ترونها

میدان مغناطیسی

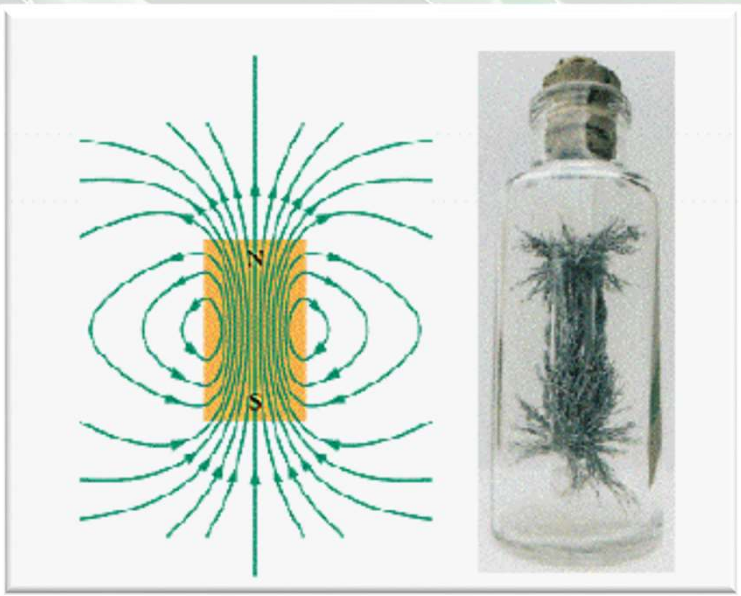


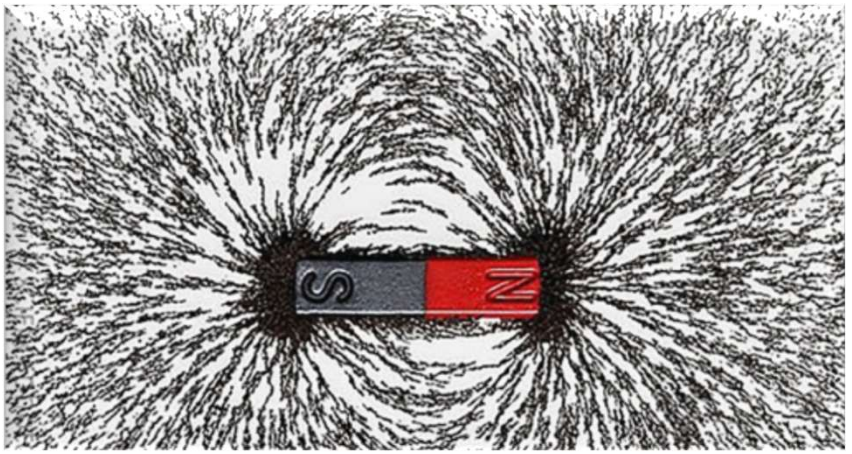
همان طور که فضا ی اطراف یک بار میدان الکتریکی تعریف کردیم فضای اطراف یک آهنربا را میدان مغناطیسی می نامیم.

میدان مغناطیسی

شدت میدان مغناطیسی در هر نقطه را با B نمایش میدهیم.

از خطوط میدان برای تشخیص کیفی اندازه و جهت استفاده می کنیم.

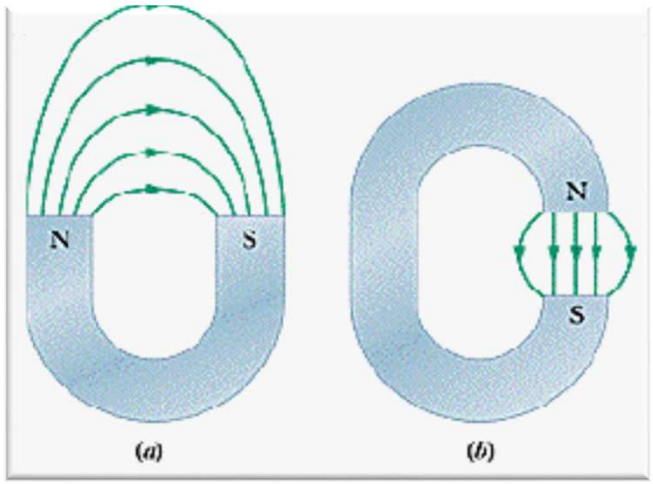




میدان مغناطیسی

بر خلاف الکتریسیته در مغناطیس تک قطبی مغناطیسی نداریم.

خطوط میدان از قطب شمال به جنوب است و مسیر بسته را تشکیل میدهد



تعریف میدان مغناطیسی

بارهای متحرک اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می کنند و ازطریق این میدان بر بارهای متحرک دیگر نیرو وارد می کنند.

همانطور که برای تعریف میدان الکتریکی از نیروی وارد بر بار آزمون کمک گرفتیم برای تعریف اندازه و جهت میدان الکتریکی مغناطیسی از نیروی وارد بر بار متحرک کمک می گیریم.

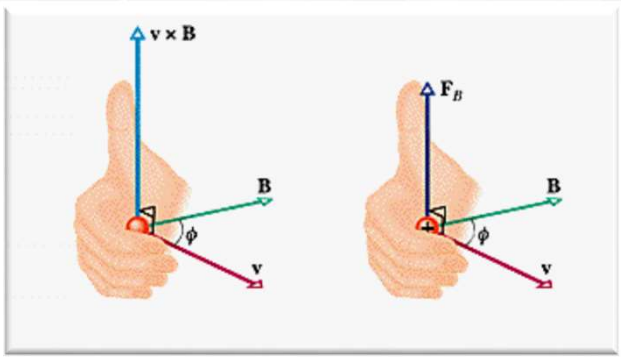
آزمایش نشان می دهد که اگر بار را با سرعت به داخل میدان مغناطیسی پرتاب کنیم بر آن نیروی عرضی زیر وارد می شود :

$$F_B = |q| vB \sin \phi.$$

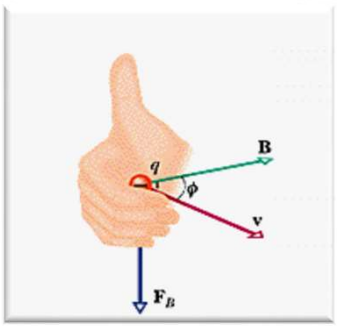
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

تعریف میدان مغناطیسی

جهت آن با قاعده دست راست تعیین می گردد.



جهت نیرو اگر بار منفی باشد عکس می گردد



ماکزیمم نیروی وارد بر بارهنگامی است که بردار سرعت عمود بر بردار میدان با شد

اگر بردار میدان و سرعت در یک امتداد باشند نیرو صفر است

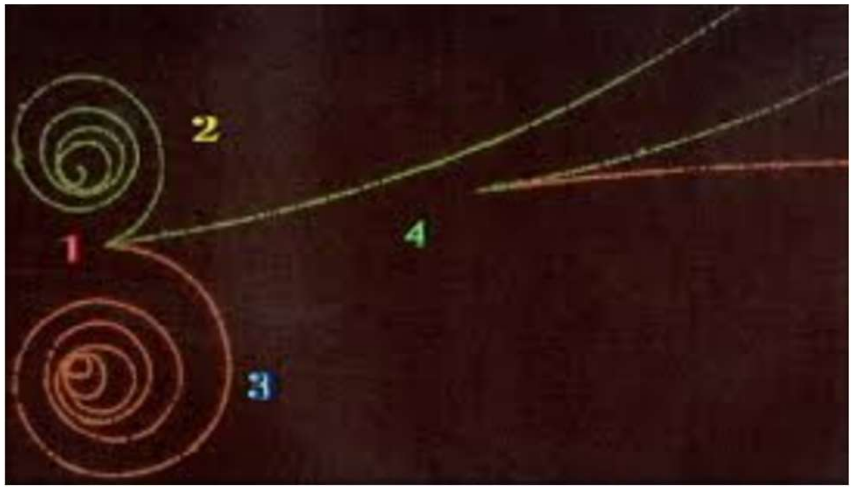
واحد شدت میدان تسلا است که :

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\frac{\text{newton}}{(\text{coulomb/second})(\text{meter}} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}.$$

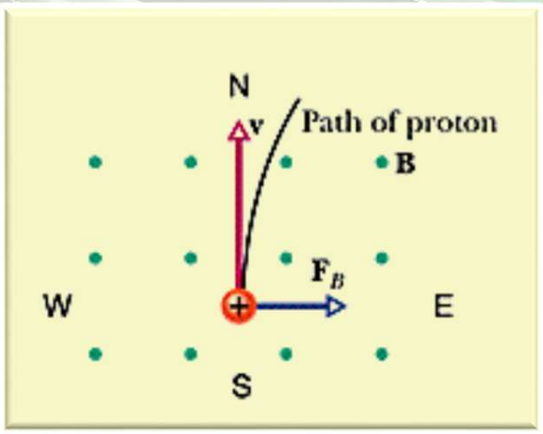
$$1\ \text{tesla} = 10^4\ \text{gauss}.$$

تعریف میدان مغناطیسی

شکل زیر یک آزمایش تجربی تولید الکترون – پوزیترون در اتاقک حباب است که علامت بار ها را مشخص می کند. جهت میدان عمود بر صفحه است. خارج یا داخل و چرا ؟



تعریف میدان مغناطیسی



مثال : پروتونی با انرژی جنبشی ۵/۳ مگا الکترون-ولت بطور افقی به داخل میدان مغناطیسی $B=1.2\ mT$ پرتاب می شود . نیروی مغناطیسی وارد بر آن چقدر است . جرم پروتون $1.67\times10^{-27}\ kg$ است.

حل:جهت نیرو در شکل نشان داده شده است.

تعریف میدان مغناطیسی

حل: اندازه نیرو

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5.3\ \text{MeV})(1.60 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}}$$

$$= 3.2 \times 10^{7}\ \text{m/s}.$$

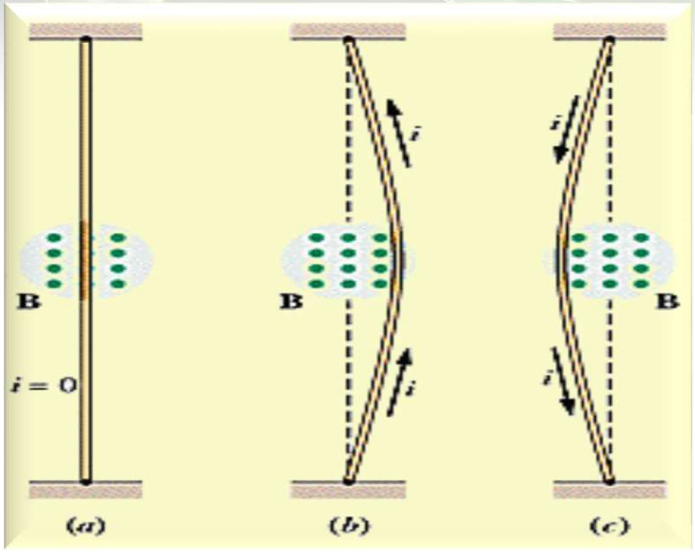
$$F_B = |q|vB \sin\phi$$

$$= (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3.2 \times 10^{7}\ \text{m/s})$$

$$\times (1.2 \times 10^{-3}\ \text{T})(\sin 90^\circ)$$

$$= 6.1 \times 10^{-15}\ \text{N}.$$

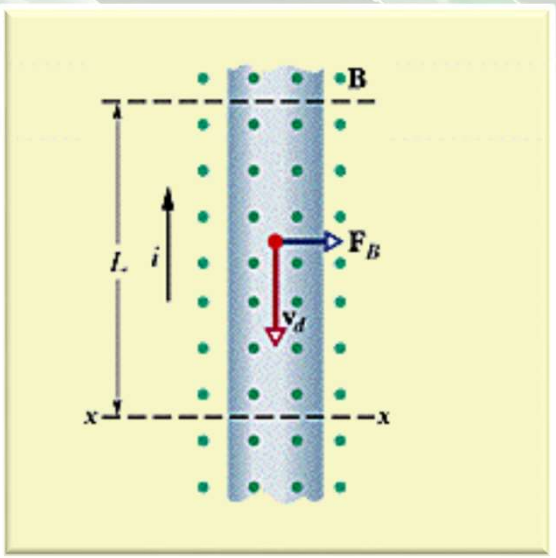
نیروی مغناطیس وارد بر جریان



آزمایش نشان می دهد که بر سیم حامل جریان نیرو وارد می شود.

اگر جهت جریان عوض شود جهت نیرو نیز عوض می شود.

نیروی مغناطیس وارد بر جریان



می خواهیم فرمولی برای نیروی مغناطیسی وارد بر سیمی که حامل جریان است را بدست آوریم . فرض می کنیم میدان بر سیم عمود باشد:

نیروی مغناطیس وارد بر جریان

حل: باری که در زمان **t** طول **L** را می پیماید:

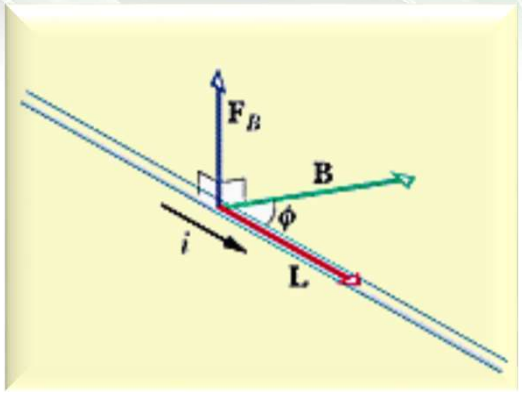
$$q = it = i\frac{L}{v_d}$$

نیروی وارد بر این مجموعه بار های متحرک بر سیم وارد میشود:

$$F_B = qv_dB\sin\phi = \frac{iL}{v_d}v_dB\sin 90^\circ$$

$$\boxed{F_B = iLB.}$$

نیروی مغناطیس وارد بر جریان



اگر میدان مغناطیسی برسیم عمود نباشد نیروی وارد بر طول L از سیم :

$$\mathbf{F}_B = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

که در آن L برداری است در جهت جریان.

نیروی مغناطیس وارد بر جریان

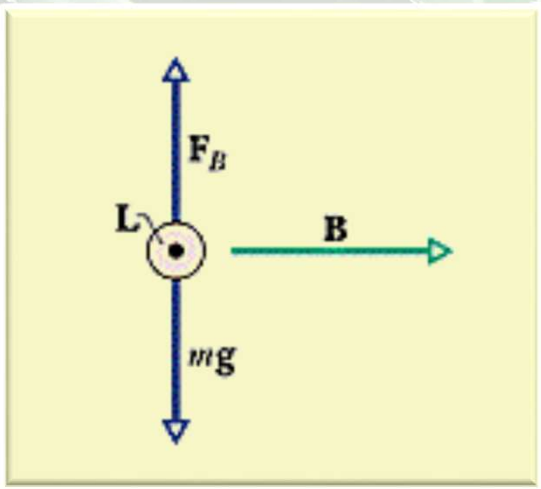
محاسبه نیروی وارد بر سیم انحنا دار:

اگر سیم حامل جریان مستقیم نباشد . آن را به اجزاء مستقیم dL تقسیم می کنیم . نیروی وارد بر هر جزء :

$$d\mathbf{F}_B = i\, d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

که با انتگرالگیری نیروی وارد بر هر سیم انحنا دار بدست می آید.

نیروی مغناطیس وارد بر جریان



مثال : می خواهیم سیم مسی افقی حامل جریان ۲۸ آمپر در مجاورت سطح زمین در یک میدان مغناطیسی معلق نگه داریم با فرض اینکه چگالی طولی جرم سیم ۶/۴۶ گرم بر متر باشد . اندازه و جهت میدان مغناطیسی لازم را تعیین کنید.

حل : جهت میدان باید به سمت راست باشد چرا؟

نیروی مغناطیس وارد بر جریان

حل - اندازه میدان:

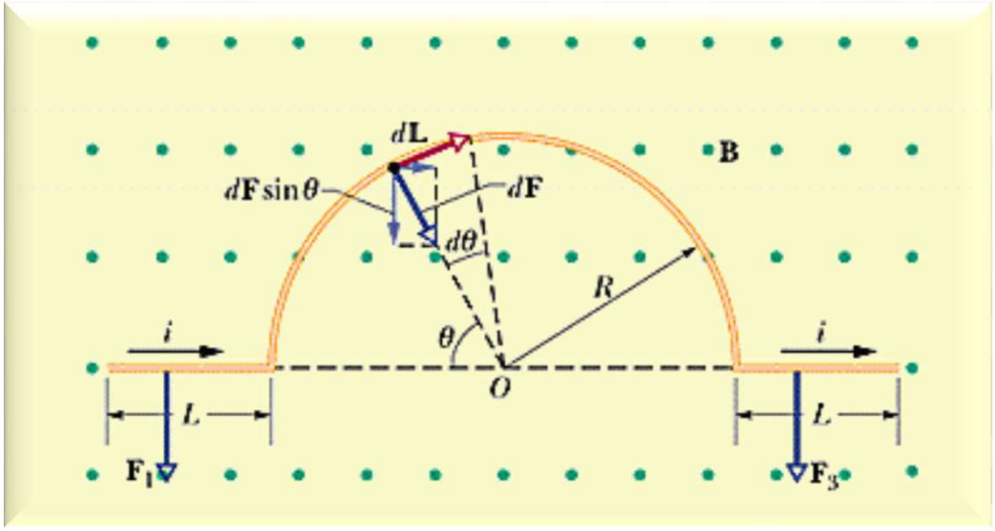
$$iLB = mg.$$

$$B = \frac{(m/L)g}{i} = \frac{(46.6 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(9.8\ \text{m/s}^2)}{28\ \text{A}}$$

$$= 1.6 \times 10^{-2}\ \text{T}.$$

نیروی مغناطیس وارد بر جریان

مثال : سیمی مطابق شکل خم شده است و حامل جریان i است و در میدان مغناطیسی یکنواخت که جهتش به طرف خارج صفحه شکل قرار دارد . نیروی وارد بر سیم را حساب کنید.



نیروی مغناطیس وارد بر جریان

حل :

$$F_1 = F_3 = iLB$$

$$dF = iB\,dL = iB(R\,d\theta)$$

$$F_2 = \int_0^{\pi} dF \sin\theta = \int_0^{\pi} (iBR\,d\theta)\sin\theta$$

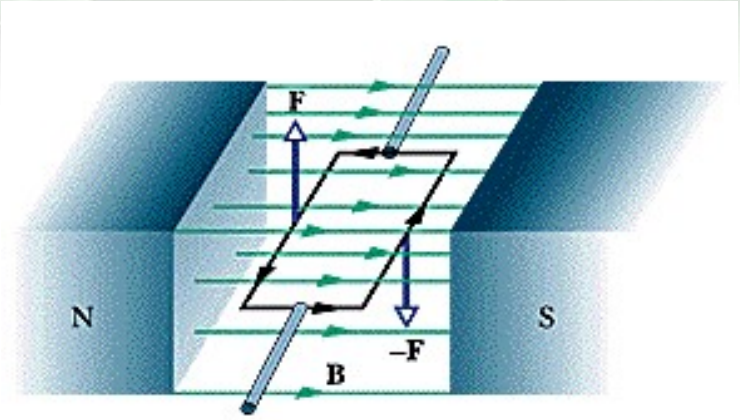
$$= iBR\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = 2iBR.$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = iLB + 2iBR + iLB$$

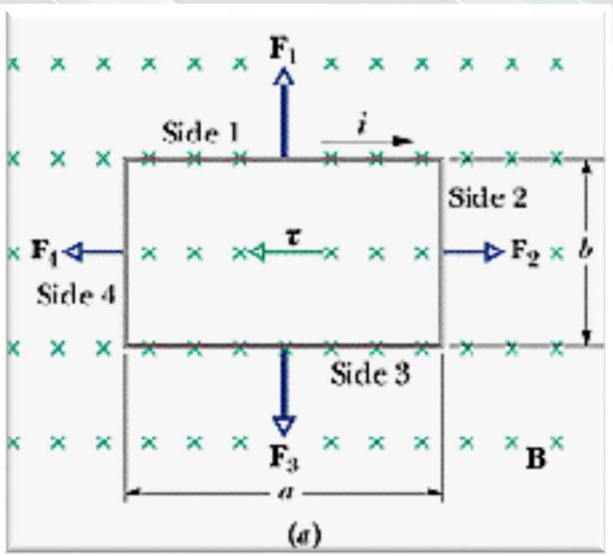
$$= 2iB(L + R).$$

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

شکل زیر یک موتور ساده را نشان می دهد که نیرو های مغناطیسی باعث گشتاور و دوران حلقه می گردند.



گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

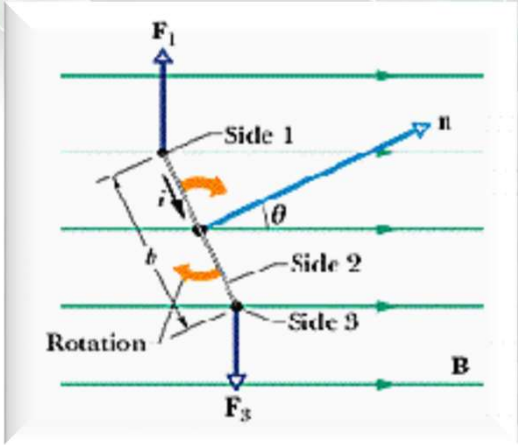


محاسبه گشتاور نیرو وارد بر یک حلقه جریان الکتریکی

شکل یک حلقه سیم مستطیل شکل به طول a و عرض b راکه حامل جریان i است و در میدان یکنواخت قرار گرفته است را نشان می دهد.

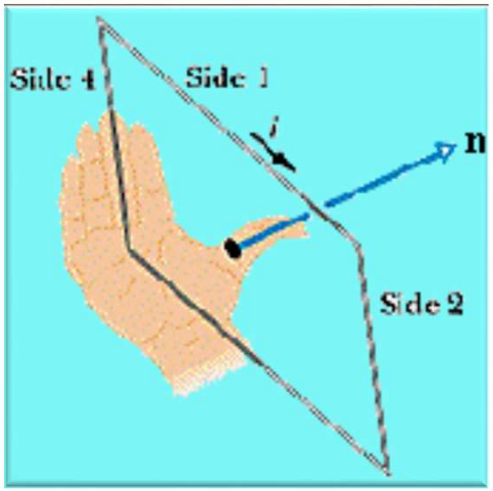
برآیند نیروهای های وارد بر حلقه صفر است.

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

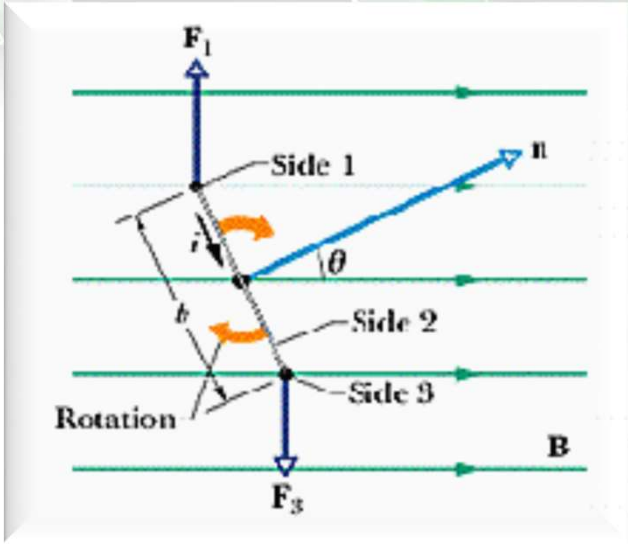


گشتاور نیرو صفر نیست. می خواهیم این گشتاور را محاسبه کنیم.

بردار بر صفحه حلقه عمود است و با راستای n زاویه θ می سازد.



گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان



گشتاور نیروهای ۲و ۴ صفر است ولی گشتاور نیروهای ۱ و ۳ با هم جمع می شود:

$$\tau = \left(iaB\frac{b}{2}\sin\theta\right) + \left(iaB\frac{b}{2}\sin\theta\right)$$
$$= iabB\sin\theta.$$

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

اگر N تعداد دور پیچه باشد.

$$\tau = N\tau' = NiabB = (NiA)B\sin\theta$$

گشتاور نیروهای فوق باعث چرخش حلقه شده بطوری که متمایل است n را در جهت میدان قرار دهد.

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

سمت گیری حلقه جریان در میدان مغناطیسی ، رفتار عقربه قطب نما را در چنین میدانی تداعی می کند.

یک روی حلقه مانند قطب شمال و روی دیگر آن مانند قطب جنوب عقربه رفتار می کند.

عقربه های قطب نما ،آهنرباهای میله ای و حلقه های جریان را می توان به عنوان دو قطبی های مغناطیسی در نظر گرفت.

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

بردار گشتاور دو قطبی مغناطیسی را طوری تعریف میکنیم که جهت آن در جهت n (بردار عمود بر سطح حلقه جریان) و اندازه آن:

$$\mu = NiA$$

با این تعریف اندازه گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان:

$$\tau = \mu B \sin\theta,$$

که در آن θ زاویه بین B و μ است.

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

در حالت کلی گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان در میدان B به صورت برداری:

$$\tau = \mu \times B$$

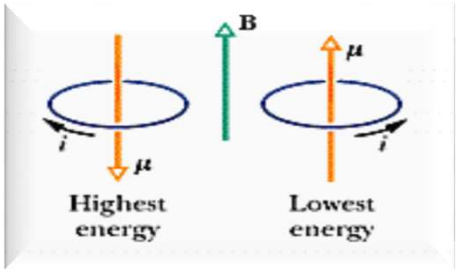
$$\tau = p \times E$$

که معادل با گشتاور نیروی وارد بر دو قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی است.

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

انرژی پتانسیل مغناطیسی دو قطبی در میدان B برابر است با کاری که باید انجام داد تا دو قطبی از وضعیت انرژی صفر (θ =۹۰) به وضع معین بچرخد:

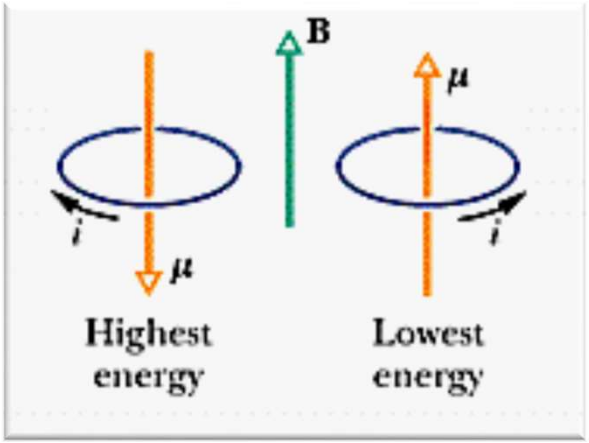
$$U(\theta) = -\mu \cdot \mathbf{B}.$$



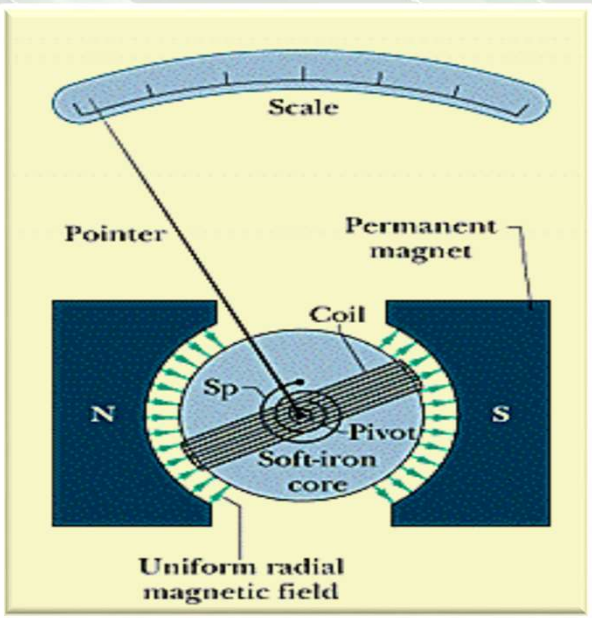
پس یک دو قطبی مغناطیسی دارای کمترین انرژی است هنگامی که هم سوی با B باشد . در چه وضعیتی دارای بیشترین انرژی است ؟

گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان

جهت گیری یک دو قطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی در حالت کمترین و بیشترین انرژی:

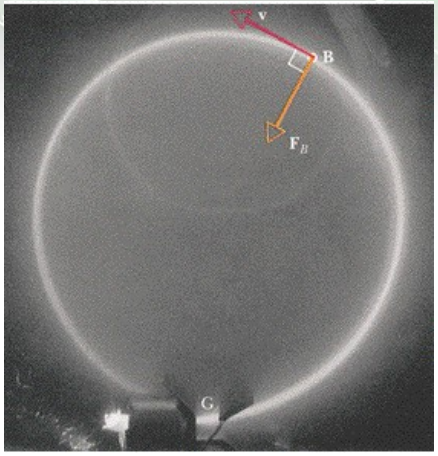


گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان



یکی از کار بردهای گشتاور نیرو در گالوانومتر است. آیا می توانید اصول کار آن را توضیح دهید؟

بارهای در حال دوران



بار های الکتریکی در میدان مغناطیسی دوران می کنند . شکل زیر پرتو الکترونها در میدان عمود بر صفحه (کدام سمت ؟) را نشان می دهد.

می خواهیم شعاع دوران و فرکانس دوران را محاسبه کنیم :

حل: چون حرکت دورانی است نیروی مغناطیسی وارد بر بار همان نیروی جانب به مر کز است

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}.$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}.$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

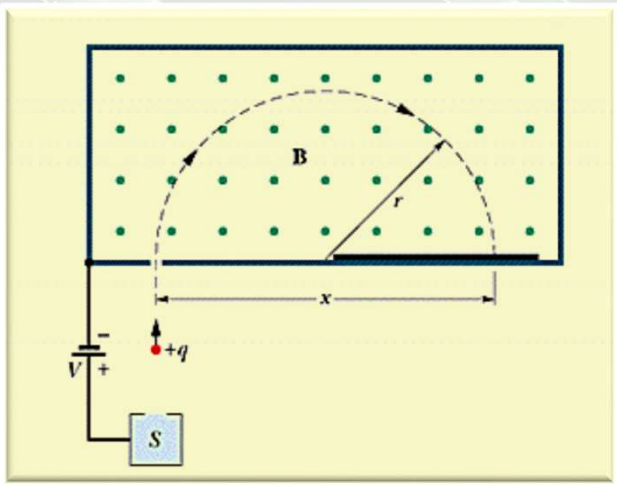
$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

بارهای در حال دوران

ملاحظه می شود که فرکانس دوران به سرعت پرتاب ذره به داخل میدان بستگی ندارد

در واقع ذرات سریع تر دایره بزرگتر و ذرات کوچکتر دایره کوچکتر را می پیمایند چرا؟

بارهای در حال دوران



مثال: شکل زیر طیف سنج جرمی را نشان میدهدکه با آن میتوان جرم یونهای با بار را اندازه گرفت. یونها توسط چشمه S تولید شده و سپس توسط پتانسیل V شتاب می گیرند و با سرعت معلوم v وارد محفظه میدان مغناطیسی می گردند. میدان باعث می گردد که یونها یک مسیر نیم دایره را طی کنند و در نقطه ای به فاصله x به جداره برخورد کنند .

بارهای در حال دوران

اگر $q=1.6\times10^{-19}C$ $B=80mT$ $x=1.63m$ باشد جرم یون را بر حسب واحد جرم اتمی ($u=1.6605 \times 10^{-27}$ kg) بدست آورید ؟

$V=1000v$

حل:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}.$$

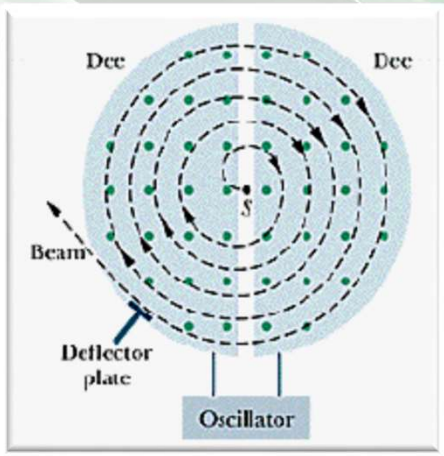
$$x = 2r = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}.$$

$$m = \frac{B^2qx^2}{8V}$$

$$= \frac{(0.080000\ \text{T})^2(1.6022 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.6254\ \text{m})^2}{8(1000.0\ \text{V})}$$

$$= 3.3863 \times 10^{-25}\ \text{kg} = 203.93\ \text{u}.$$

سیکلو ترونها و سنکرو ترونها



سیکلو ترون ها ذرات باردار را تا انرژی های بالا شتاب می دهند.

بین دی ها اختلاف پتانسیل الکتریکی یا میدان الکتریکی متغییر اعمال می گردد.

ذرات باردار در رفتن از یک دی به دی دیگر انرژی از میدان الکتریکی می گیرند وسرعت آنها افزایش می یابد.

دی ها در یک میدان مغناطیسی که جهت آن عمود بر صفحه است قرار دارند.

سیکلو ترونها و سنکرو ترونها

اگر ذارت بخواهند از میدان انرژی کسب کنند باید فرکانس دوران (که مستقل از سرعت است) آنها با فرکانس میدان مساوی باشد چرا ؟

به همبن دلیل فر کانس دوران در میدان مغناطیسی را فر کانس سیلکو ترونی آن می نامند

$$f = f_{osc.} \qquad \text{(resonance condition).}$$

$$qB = 2\pi m f_{osc.}$$

سیکلو ترونها و سنکرو ترونها

مثال : فرض کنیدکه یک سیکلوترون داری فرکانس نوسان ۱۲ مگا هرتز و شعاع آن ۵۳ متر است. میدان مغناطیسی لازم برای شتاب دادن به دوترون چقدر است . جرم دوترون $3.34 * 10^{-27}\ kg$ است.

حل:

$$B = \frac{2\pi m f_{osc}}{q} = \frac{(2\pi)(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})(12 \times 10^{6}\ s^{-1})}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 1.57\ \text{T} \approx 1.6\ \text{T}.$$

سیکلو ترونها و سنکرو ترونها



شمایی از سنکروترون در آزمایشگاه فرمی در الینویز آمریکا شعاع مسیر حدود ۳/۶ کیلومتراست!

فصل ۲۹ : محاسبه میدان مغناطیسی



محاسبه میدان مغناطیسی

قانون بیو – ساوار

قانون آمپر

دو رسانای موازی

محاسبه میدان حاصل از سیم لوله

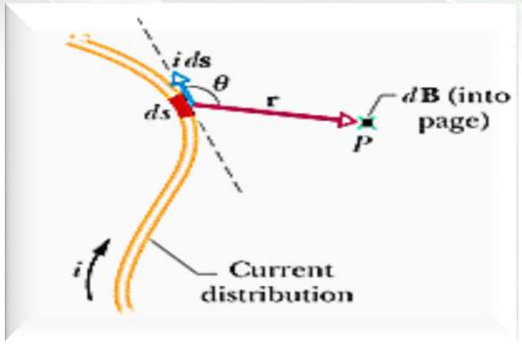
محاسبه میدان مغناطیسی

در این فصل در مورد تولید میدانهای مغناطیسی و محاسبه میدانهای حاصل از توزیع های جریان می پردازیم.

کشف اثر مغناطیسی جریان توسط اورستد انجام گرفت.

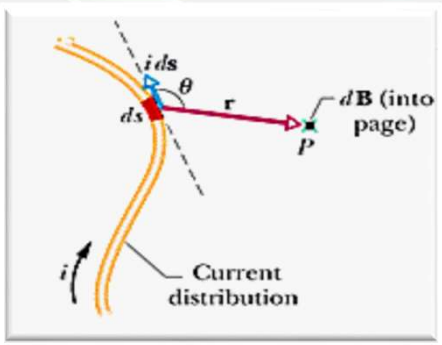
جریان های الکتریکی میدان مغناطیسی ایجاد می کنند و ازطریق این میدان بر جریان های دیگر نیرو وارد می کنند.

قانون بیو – ساوار



برای محاسبه میدان مغناطیسی حاصل از یک توزیع جریان از قانون بیو – ساوار استفاده می کنیم برای این کار جریان را به عناصر جریان تقسیم می کنیم :

قانون بیو – ساوار



میدان حاصل از عنصر جریان طبق قانون بیو – ساوار در نقطه p :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}$$
$$\approx 1.26 \times 10^{-6}\ \mathrm{T\cdot m/A}$$

و θ زاویه میان بردار r و ds که در آن بردار جابجایی از عنصر جریان تا نقطه p است.

قانون بیو – ساوار

بردار میدان مغناطیسی برابر است با:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

که در آن میدان مغناطیسی عمود بر صفحه r و ds است و جهت آن مطابق قاعده دست راست تعیین می گردد.

قانون آمپر

تجربه نشان می دهد که شدت میدان مغناطیسی در فاصله ازیک سیم حامل جریان :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

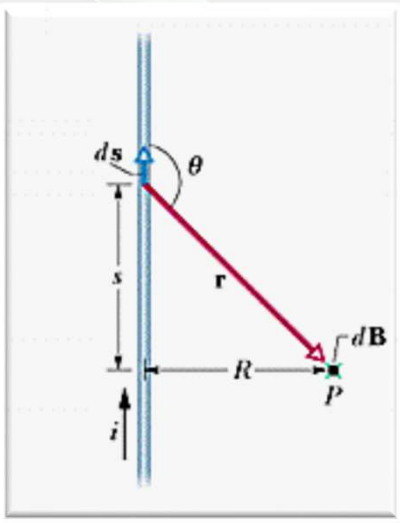
که را ثابت گذر دهی مغناطیسی خلاء یا هوا می نامند

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}$$
$$\approx 1.26 \times 10^{-6}\ \mathrm{T \cdot m/A}$$

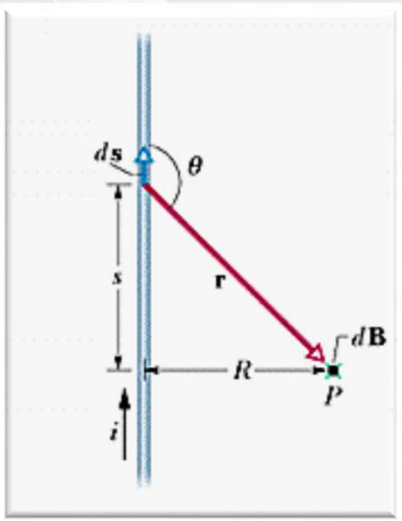
μ_0

قانون بیو – ساوار

مثال : با استفاده از قانون بیو - ساوار میدان مغناطیسی حاصل از سیم راست و دراز و در فاصله R از آن بدست آورید.



قانون بیو – ساوار



حل:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\sin\theta}{r^2}$$

$$B = 2\int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta\,ds}{r^2}$$

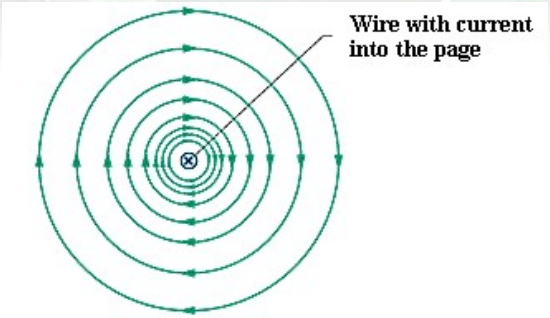
$$r = \sqrt{s^2 + R^2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{R\,ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}}$$

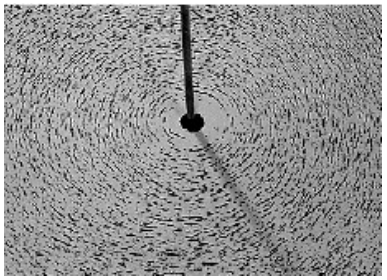
$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

قانون بیو – ساوار



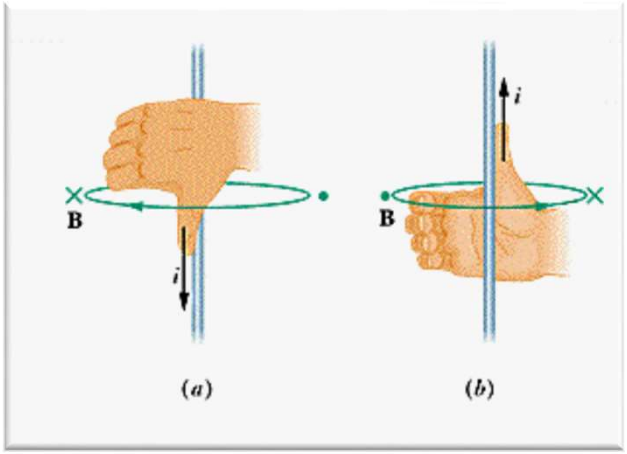
خطوط میدان مغناطیسی حاصل ا زیک سیم حامل جریان دوایری متحدالمرکز حول سیم می باشند.

با دور شدن از سیم خطوط میدان ا ز یکدیگر فاصله می گیرند



قانون آمپر

اگر سیم را با دست راست طوری بگیریم که انگشت شست در جهت جریان باشد چهار انگشت خم شده دیگر جهت میدان را در اطراف سیم نمایش می دهد :



قانون آمپر

قانون آمپر

قانون آمپر در مغناطیس شبیه به قانون گاوس در الکتریسیته است.

از قانون آمپر برای محاسبه میدان های مغناطیسی حاصل از توزیع جریان هایی که تقارن کافی دارند استفاده می شود.

از قانون آمپر فقط در مواردی که تقارن به حد کافی باشد می توان استفاده کرد.

قانون آمپر

قانون آمپر انتگرال خطی زیر است :

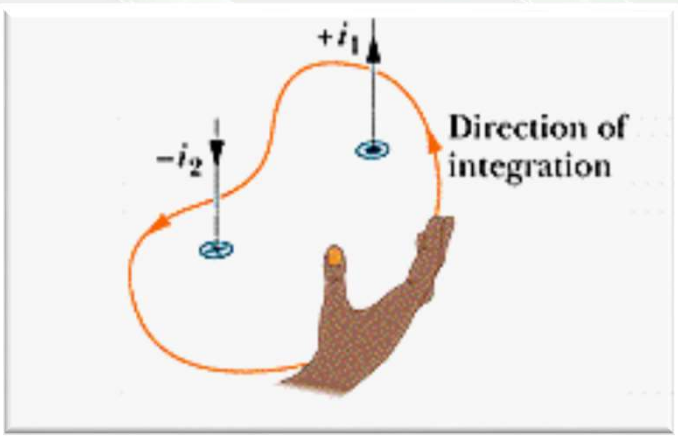
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_{enc} \quad \text{(Ampere's law)}.$$

مسیر هر مسیر بسته است.

علامت روی دایره روی انتگرال این است که مسیر باید بسته باشد

از قانون آمپر فقط در مواردی که تقارن به حد کافی باشد می توان استفاده کرد.

قانون آمپر

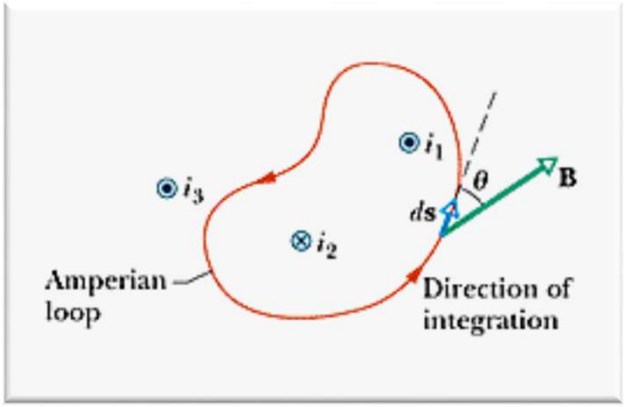


i جریان خالصی است که سطح محصور شده توسط مسیر بسته را قطع می کند مثلا در شکل زیر:

$$i_{enc} = i_1 - i_2$$

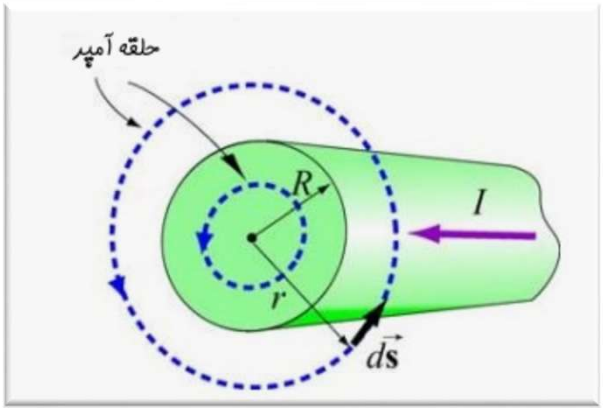
قانون آمپر

θ زاویه بین r و ds است که طول کوچکی از مسیر بسته است.



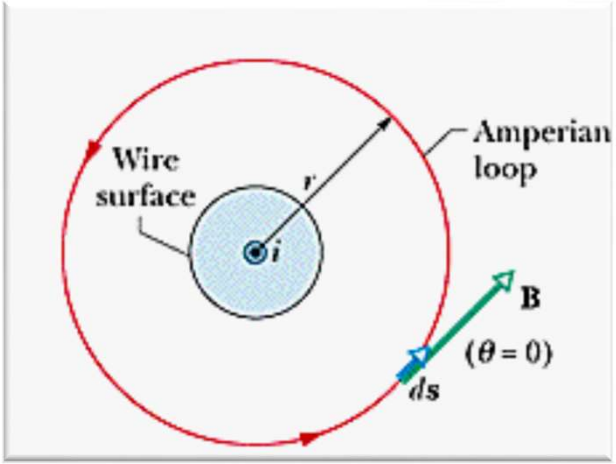
میدان مغناطیسی درون و بیرون سیم

مثال : با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی اطراف یک سیم راست بی نهایت حامل جریان دراز بدست آورید.



قانون آمپر

حل:



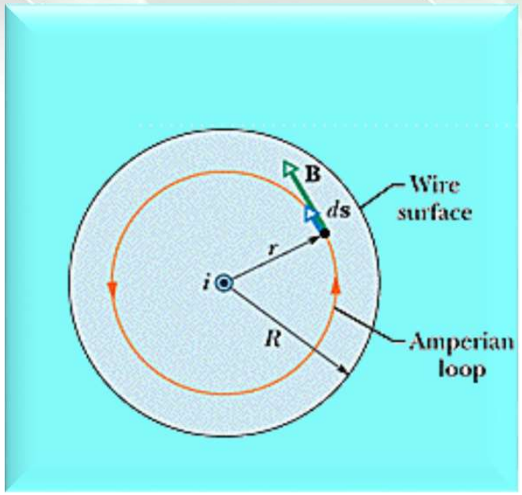
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B \cos\theta \, ds = B \oint ds = B(2\pi r)$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

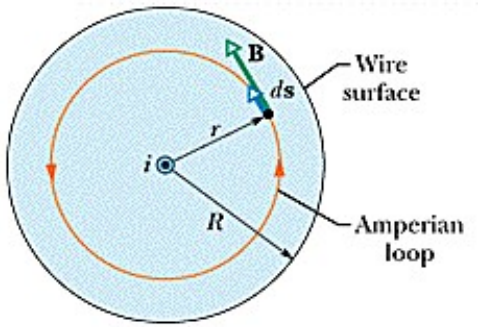
میدان مغناطیسی درون و بیرون سیم

مثال: رابطه ای برای میدان و فاصله از محور یک سیم استوانه ای دراز بلند درr< R بدست آورید . سیم حامل جریان i یکنواخت است .



میدان مغناطیسی درون و بیرون سیم

حل:



$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B\oint ds = B(2\pi r)$$

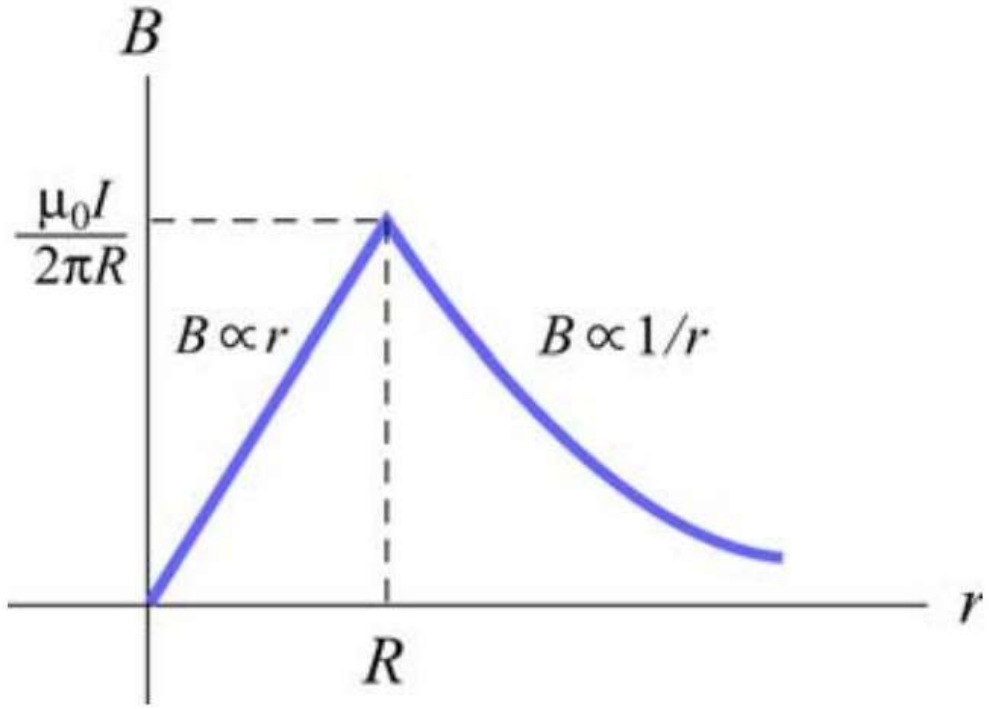
$$i_{enc} = i\frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i\frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

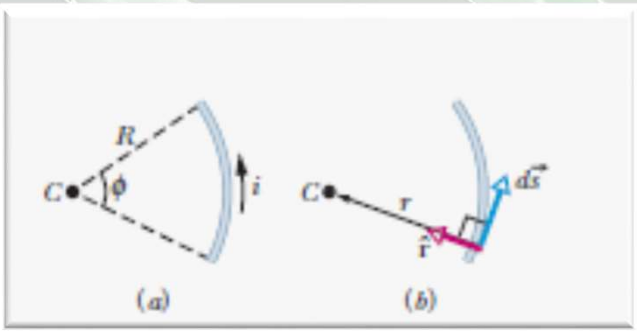
$$B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\right) r$$

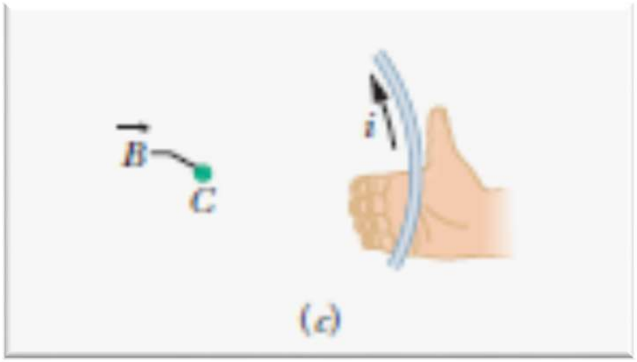
میدان مغناطیسی درون و بیرون سیم

با توجه به رابطه بالا میدان مغناطیسی در مرکز سیم برابر با صفر و در r=R به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد. همان‌طور که نمودار زیر نشان می‌دهد، میدان درون سیم به شکلی خطی تغییر می‌کند و میدان بیرون سیم، به‌صورت معکوس با r کم می‌شود.



میدان مغناطیسی سیم کمانی شکل





مثال) میدان مغناطیسی یک سیم کمانی شکل را در مرکز آن بدست آورید.

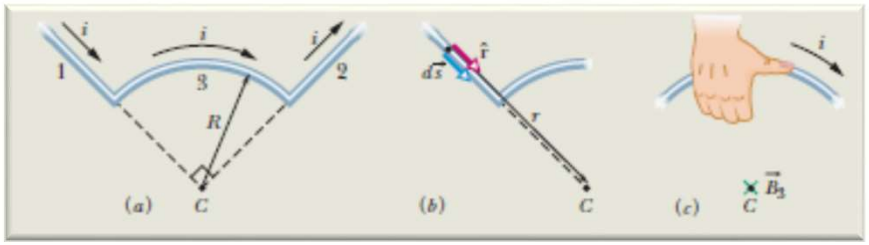
$$B = \int dB = \int_0^{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iR\,d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{\phi} d\phi.$$

$$B = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R} \quad \text{(at center of circular arc).}$$

$$B = \frac{\mu_0 i (2\pi)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad \text{(at center of full circle).}$$

میدان مغناطیسی سیم کمانی شکل

میدان مغناطیسی را برای سه ناحیه شکل مقابل بدست آورید؟



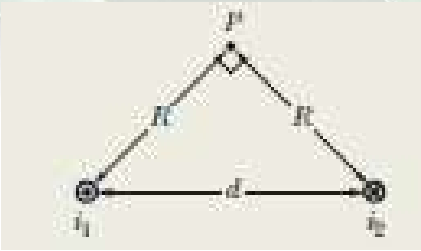
$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin 0}{r^2} = 0. \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0.$$

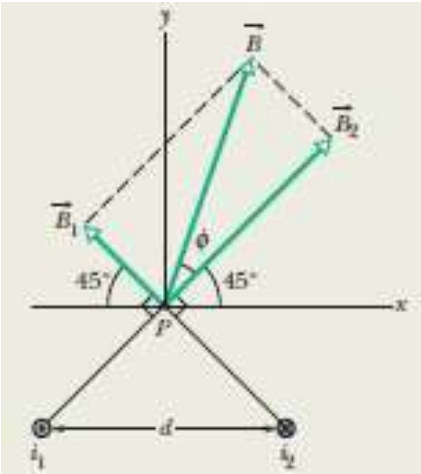
$$B_2 = 0.$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 i(\pi/2)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 i}{8R}.$$

میدان مغناطیسی سیم

میدان مغناطیسی را در شکل مقابل در نقطه P بدست آورید؟





$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} \quad \text{and} \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R}.$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d \cos 45^\circ} \quad \text{and} \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d \cos 45^\circ}.$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d(\cos 45^\circ)} \sqrt{i_1^2 + i_2^2}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\sqrt{(15\ \text{A})^2 + (32\ \text{A})^2}}{(2\pi)(5.3 \times 10^{-2}\ \text{m})(\cos 45^\circ)}$$

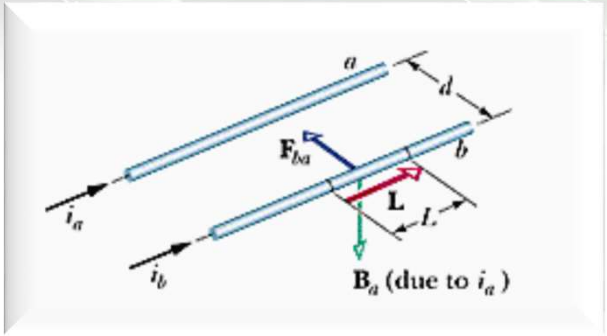
$$= 1.89 \times 10^{-4}\ \text{T} \approx 190\ \mu\text{T}.$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B_1}{B_2},$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{i_1}{i_2} = \tan^{-1}\frac{15\ \text{A}}{32\ \text{A}} = 25^\circ.$$

$$\phi + 45^\circ = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ.$$

دو رسانای موازی



مثال: شکل دو سیم موازی و دراز را نشان می دهد که به فاصله d از از سیم را هم قرار دارند وحامل جر یان هستند. نیروی وارد از سیم بدست آورید.

دو رسانای موازی

حل:

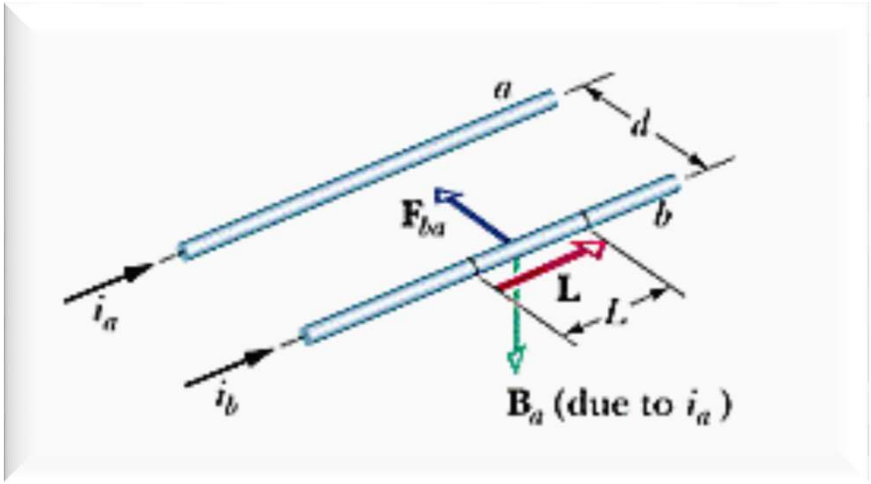
$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}.$$

$$\mathbf{F}_{ba} = i_b \mathbf{L} \times \mathbf{B}_a.$$

$$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90° = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}$$

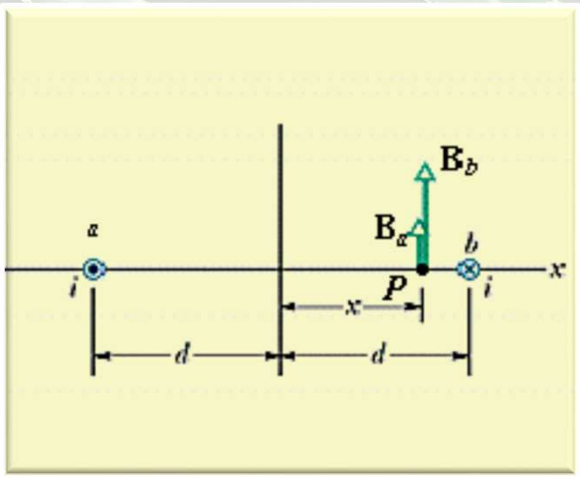
دو رسانای موازی

دو سیم حامل جریان هم جهت یکدیگر را جذب و در خلاف جهت یکدیگر را می رانند.



دو رسانای موازی

مثال : دو سیم موازی به فاصله 2d از هم قرار دارند و حامل جریانهای مختلف الجهت هستند میدان مغناطیسی را در نقاط میان سیمها پیدا کنید.

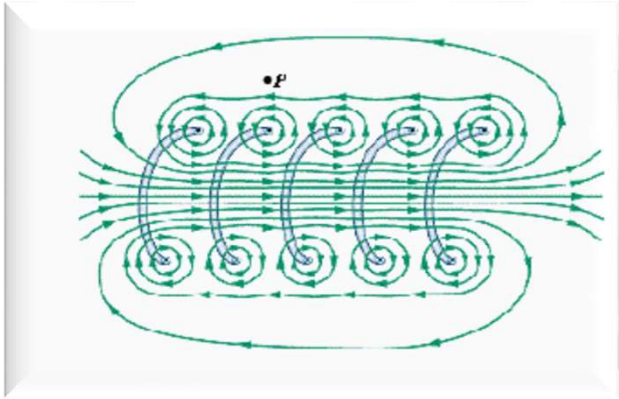


$$B(x) = B_a(x) + B_b(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(d+x)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)}$$
$$= \frac{\mu_0 i d}{\pi(d^2 - x^2)}.$$

محاسبه میدان حاصل از سیم لوله

سیم لوله سیم پیچ دارزی است که به صورت مارپیچ شده و حامل جریان است

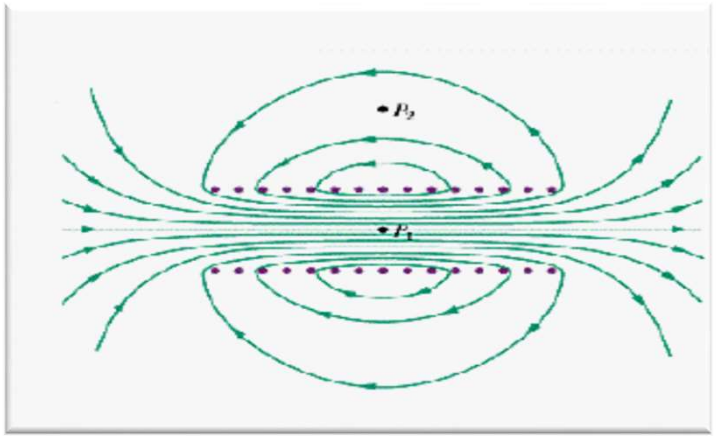




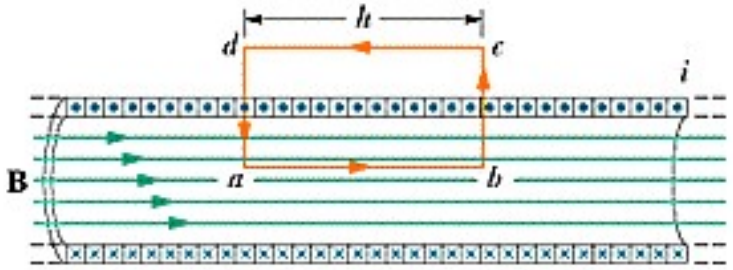
خطوط میدان اطراف یک سیم لوله :

محاسبه میدان حاصل از سیم لوله

اگر تعداد دورها بسیار زیاد و نزدیک به هم باشد میدان تقریبا در داخل موازی محورسیم لوله و در خارج صفر است



محاسبه میدان حاصل از سیم لوله



مثال : با استفاده از قانون آمپر ، میدان مغناطیسی در نقاط داخل یک سیم لوله ایده آل که حامل جریان i است و تعداد n دورهای در واحد طول آن میباشد را بدست آورید.

محاسبه میدان حاصل از سیم لوله

حل:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_{enc}$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \int_b^c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$$

$$+ \int_c^d \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \int_d^a \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$$

$$i_{enc} = i(nh)$$

$$Bh = \mu_0 inh$$

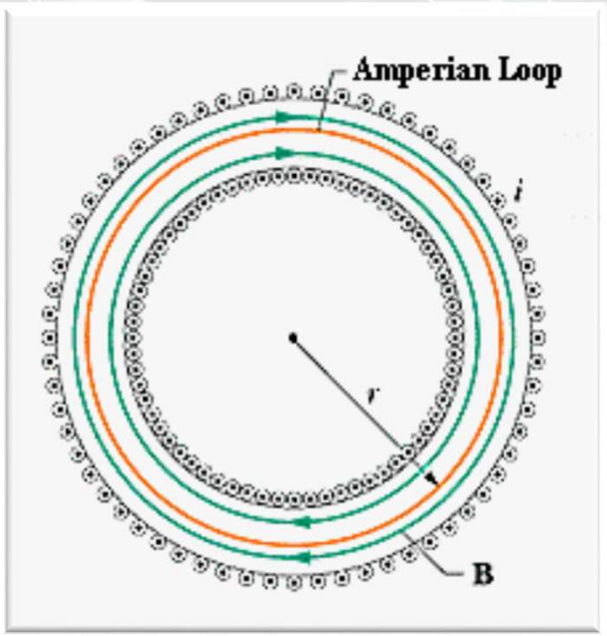
$$B = \mu_0 in$$

محاسبه میدان حاصل از سیم لوله



مثال : چنبره یک سیم لوله خمیده می باشد . میدان مغناطیسی را در نقاط داخل چنبر ه ای که حامل جریان است و تعداد دورهای آن N میباشد ، محاسبه کنید.

محاسبه میدان حاصل از سیم لوله



حل:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 iN$$

$$B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi}\frac{1}{r}$$

محاسبه میدان حاصل از سیم لوله

$$B = \mu_0 in = (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(5.57\ \mathrm{A})\frac{5 \times 850\ \mathrm{turns}}{1.23\ \mathrm{m}}$$
$$= 2.42 \times 10^{-2}\ \mathrm{T} = 24.2\ \mathrm{mT}.$$

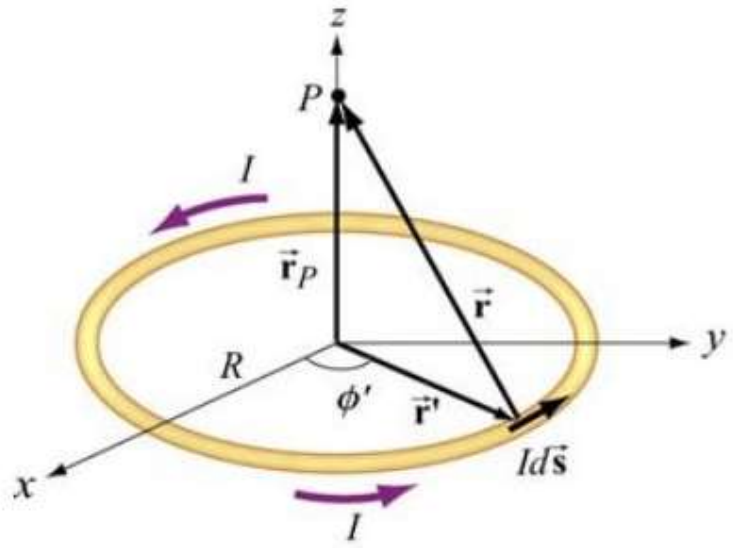
مثال : طول سیم لوله ای L=1.23m و قطر داخلی آن d=3.55cmاست . این سیم لوله پنج لایه و رد هر لایه ۸۵۰ دور سیم و حامل جریان ۵/۵۷ آمپر است مقدار میدان مغناطیسی در مرکز سیم لوله چقدر است ؟

حل:

قانون بیو – ساوار

مثال ۲: میدان ناشی از حلقه حاوی جریان

مطابق با شکل زیر حلقه‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید که در صفحه x-y قرار گرفته و جریان I در آن حرکت می‌کند.



قانون بیو – ساوار

با این فرض موارد زیر مطلوب است:

۱. میدان مغناطیسی در نقطه P در فاصله z از مرکز حلقه را بیابید.

۲. اگر یک دو قطبی مغناطیسی به اندازه $\vec{\mu} = \vec{\mu}_z \hat{k}$ را در میدان ناشی از سیم قرار دهیم، اندازه نیروی وارد شده به آن را بیابید؟

قانون بیو – ساوار

محاسبه میدان در نقطه P

همانند مثال ۱ در این مسئله نیز در ابتدا بایستی کمیت موجود در انتگرال را به‌صورت برداری تعریف کرد؛ از این رو جریان دیفرانسیلی از سیم که در $\vec{r'} = R[Cos(\phi')\hat{i} + sin(\phi')\hat{j}]$ قرار گرفته، برابر است با:

$$Id\vec{\mathbf{s}} = I(d\vec{\mathbf{r}}'/d\phi')d\phi' = IRd\phi'(-\sin\phi'\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi'\hat{\mathbf{j}})$$

در قدم بعدی بایستی موقعیت نقطه P را نیز به صورت برداری و به شکل زیر بیان کنیم:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}'$$

با توجه به دو بردار بدست آمده در مراحل قبل، بردار موقعیت نسبی برابر است با:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}' = -R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

قانون بیو – ساوار

همان‌طور که قبلا نیز بیان شد، به‌منظور بدست آوردن بردار یکه r بایستی اندازه آن محاسبه شود. اندازه بردار r برابر با مقدار زیر است.

$$r = |\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{(-R\cos\phi')^2 + (-R\sin\phi')^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}$$

مقدار بالا فاصله بین دیفرانسیل جریان و نقطه P را نشان می‌دهد. در نتیجه بردار یکه r برابر است با:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_p - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}}_p - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

در قدم بعدی بایستی حاصلضرب خارجی بردار موقعیت نسبی (r) و جهت دیفرانسیل جریان را بدست آوریم. این عبارت مطابق با رابطه زیر بدست می‌آید.

$$d\vec{\mathbf{s}} \times (\vec{\mathbf{r}}_p - \vec{\mathbf{r}}') = R\,d\phi'\left(-\sin\phi'\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi'\hat{\mathbf{j}}\right) \times [-R\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} - R\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}]$$

$$= R\,d\phi'[z\cos\phi'\hat{\mathbf{i}} + z\sin\phi'\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}]$$

قانون بیو – ساوار

با قرار دادن ضرب خارجی بالا در رابطه بیو-ساوار داریم:

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\mathbf{s}}\times\vec{\mathbf{r}}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\mathbf{s}}\times(\vec{\mathbf{r}}_P-\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}}_P-\vec{\mathbf{r}}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{z\cos\phi'\hat{\mathbf{i}}+z\sin\phi'\hat{\mathbf{j}}+R\hat{\mathbf{k}}}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\phi'$$

در نتیجه میدان B برابر است با:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\cos\phi'\hat{\mathbf{i}}+z\sin\phi'\hat{\mathbf{j}}+R\hat{\mathbf{k}}}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\phi'$$

قانون بیو – ساوار

می‌توان به شکل زیر نشان داد که مولفه x و y میدان برابر با صفر هستند. البته با استفاده از تقارن نیز این نتیجه قابل دست‌یابی است.

$$B_x = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\cos\phi' d\phi' = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\sin\phi'\Big|_0^{2\pi} = 0$$

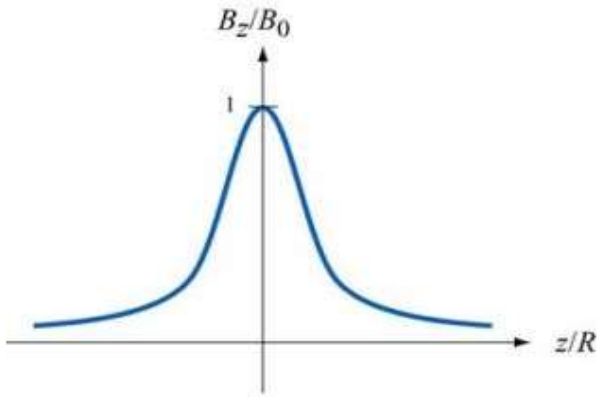
$$B_y = \frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin\phi' d\phi' = -\frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\cos\phi'\Big|_0^{2\pi} = 0$$

احتمالا متوجه شده‌اید که فقط مولفه z میدانِ بوجود آمده غیرصفر است که مقدار آن برابر است با:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

قانون بیو – ساوار

با توجه به رابطه بدست آمده، میدان در z=۰ – یا مرکز حلقه – برابر با $B_0 = \frac{\mu_o I}{2R}$ است. نمودار مربوط به میدان بدست آمده برابر است با:



با توجه به شکل بالا و همچنین رابطه بدست آمده برای میدان، می‌توان گفت که اندازه آن در مرکز حلقه ماکزیمم و در فواصل بسیار دور، میدان مغناطیسی برابر با صفر است.

نیروی وارد به دوقطبی

نیروی وارد به دوقطبی

اگر یک دوقطبی مغناطیسی برابر با $\mu = \mu_z \hat{k}$ در نقطه P قرار گیرد، با توجه به مطلب مقدمه **میدان مغناطیسی**، نیروی وارد به دوقطبی مفروض برابر است با:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = \nabla(\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) = \nabla(\mu_z B_z) = \mu_z \left(\frac{dB_z}{dz} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

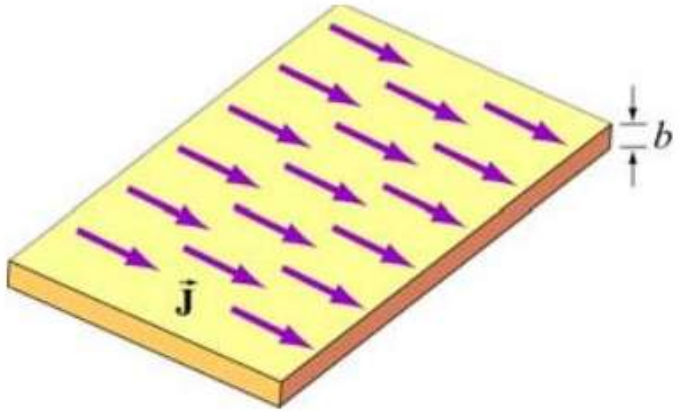
در نتیجه با مشتق‌گیری و جایگذاری میدان بدست آمده در رابطه بالا، نیروی F_B برابر می‌شود با:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = -\frac{3\mu_z \mu_0 I R^2 z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

میدان مغناطیسی صفحه

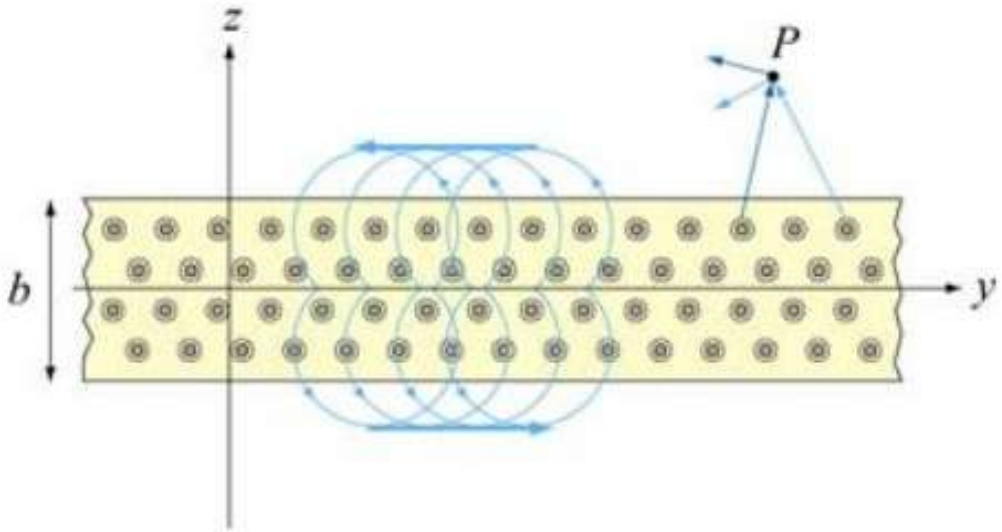
میدان ناشی از صفحه بینهایتِ حامل جریان

مطابق با شکل زیر صفحه‌ای بینهایت به ضخامت b را در نظر بگیرید که چگالی جریانِ آن یکنواخت و برابر با $J = J_0 \hat{i}$ است.



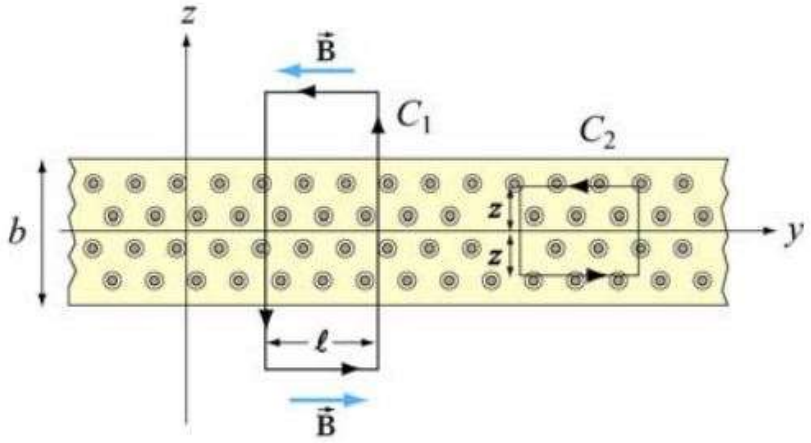
جهت ساده‌سازی مسئله می‌توان صفحه را معادل با بینهایت سیم حامل جریان در نظر گرفت. مطابق با شکل زیر، میدان مغناطیسی در جهت y- است. نقاط نشان داده شده در صفحه، جهت میدان مغناطیسی را به بیرون از صفحه نشان می‌دهند. همچنین با توجه به دایره‌های ترسیم شده در این شکل، مشاهده می‌شود برآیند میدان سیم‌ها در راستای z همدیگر را خنثی می‌کنند.

میدان مغناطیسی صفحه



جهت بدست آوردن میدان مغناطیسی، دو حلقه آمپری C_1 و C_2 را مطابق با شکل زیر در نظر بگیرید.

میدان مغناطیسی صفحه



در شکل بالا می‌بینید که دو مسیر C_1 و C_2 ترسیم شده‌اند. از C_1 جهت محاسبه میدان بیرون از صفحه و از C_2 جهت بدست آوردن میدان درون صفحه استفاده خواهیم کرد. مقدار جریان قرار گرفته درون حلقه C_1 با انتگرال‌گیری از چگالی جریان، به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$I_{\text{محصور شده}} = \iint \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = J_0(b\ell)$$

میدان مغناطیسی صفحه

حال با اعمال قانون آمپر روی حلقه C_1 داریم:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B(2\ell) = \mu_0 I_{\text{محصور شده}} = \mu_0 (J_0 b \ell)$$

در نتیجه میدان مغناطیسی در بیرون از صفحه برابر است با:

$$B = \mu_0 J_0 b / 2$$

نکته جالب پاسخ بالا این است که میدان در بیرون از صفحه و در تمامی نقاط با یکدیگر برابر هستند. همانند مسیر C_1، جریان قرار گرفته در مسیر C_2 برابر است با:

$$I_{\text{محصور شده}} = \iint \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = J_0 (2 \mid z \mid \ell)$$

قانون آمپر برای مسیر C_2 به شکل زیر قابل بیان است:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B(2\ell) = \mu_0 I_{\text{محصور شده}} = \mu_0 J_0 (2 \mid z \mid \ell)$$

میدان مغناطیسی صفحه

در نتیجه میدان مغناطیسی درون سیم برابر است با:

$$B = \mu_0 J_0 \, |z|$$

به‌منظور ایجاد تقارن، میدان مغناطیسی در z=۰ برابر با صفر است. نهایتا میدان مغناطیسی را می‌توان به صورت برداری و به شکل زیر نشان داد.

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 J_0 b}{2}\hat{\mathbf{j}}, & z > b/2 \\ -\mu_0 J_0 z\,\hat{\mathbf{j}}, & -b/2 < z < b/2 \\ \dfrac{\mu_0 J_0 b}{2}\hat{\mathbf{j}}, & z < -b/2 \end{cases}$$

میدان مغناطیسی صفحه

در حالتی حدی که صفحه بسیار نازک است $(b \to 0)$، به جای تعریف چگالی حجمی جریان از مفهومی تحت عنوان چگالی سطحی استفاده می‌شود. چگالی سطحی را با $\vec{K} = K\hat{i}$ نشان داده که در آن K=J.b است. نهایتا در حالتی که با صفحه بسیار نازکی با چگالی سطحی K مواجه‌ایم، میدان مغناطیسی ناشی از آن برابر با رابطه زیر است.

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{\mathbf{j}}, & z > 0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{\mathbf{j}}, & z < 0 \end{cases}$$



فصل ۳۰:

قانون القاء فارادی

فصل ۳۰: قانون القاء فارادی

آزمایشهای فارادی

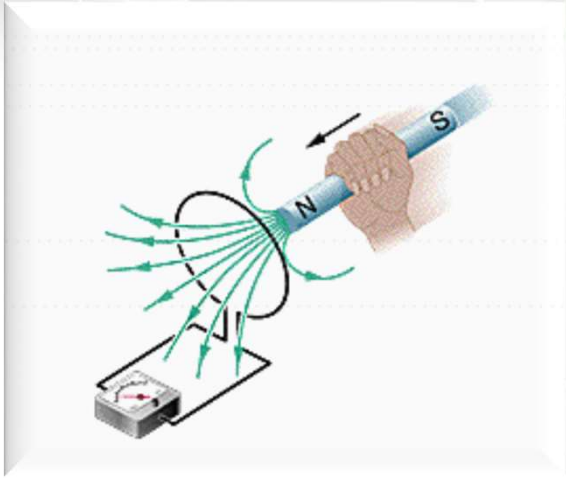
قانون القاء فارادی

قانون لنز

مطالعه کمی القاء

میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان

آزمایشهای فارادی

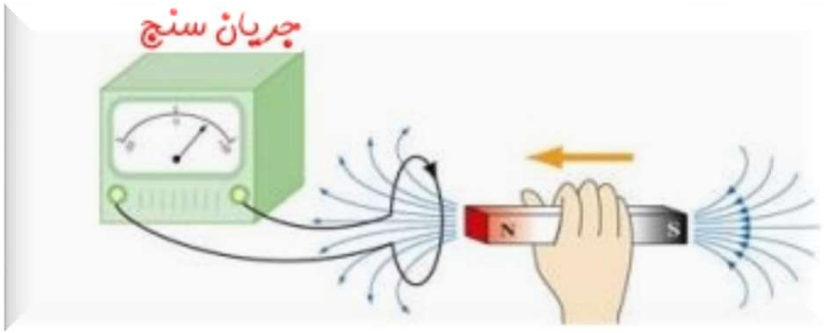


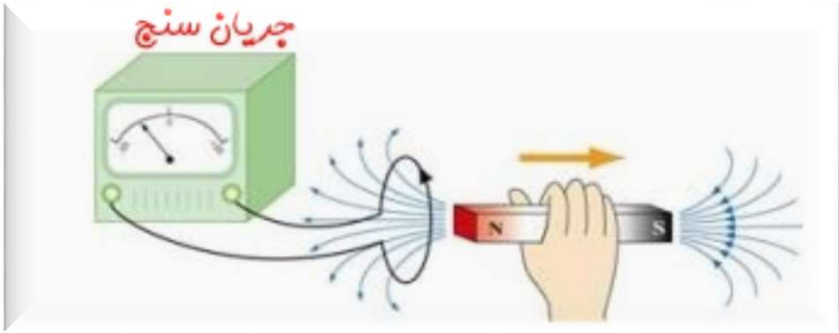
دو آزمایش زیر قانون القاء فاراده را روشن تر می کند:

۱- اگر آهن ربا را به طرف پیچه یا پیچه را به طرف آهنربا حرکت دهیم در نیروی محرکه القائی بوجود می آید:

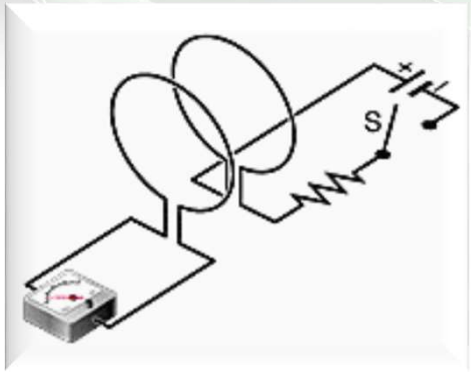
هرچه سرعت نسبی حرکت آهنربا و پیچه بیشتر باشد نیروی محرکه القائی و در نتیجه جریان القائی بیشتر است.

آزمایشهای فارادی





آزمایشهای فارادی



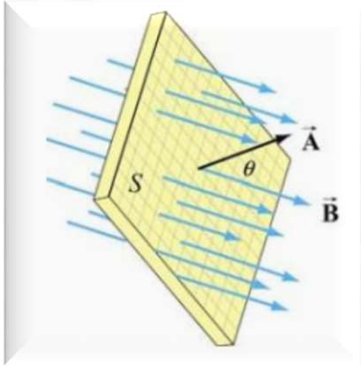
۲- پیچه ها ساکن اند ولی با زدن کلید جریان لحظه ای القایی بوجود می آید:

جریان و نیروی محرکه القائی به سبب تغییر زمانی یک چیز است . آن چیز چیست ؟

شار مغناطیسی

مطابق با شکل زیر میدانی مغناطیسی و یکنواخت را در نظر بگیرید که از صفحه‌ای عبور می‌کند.

بردار سطح به‌صورت $\vec{A} = A\hat{n}$ در نظر گرفته می‌شود. در این فرض A برابر با اندازه سطحی است که میدان مغناطیسی از آن عبور می‌کند؛ همچنین $\hat{n}$ بردار عمود به سطح را نشان می‌دهد که به سمت بیرون در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این فرضیات، شار گذرنده از سطح، برابر است با:



$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\theta$$

در رابطه بالا θ، زاویه بین بردارهای $\hat{n}$ و $\vec{B}$ را نشان می‌دهد. در حالتی که میدان یکنواخت نباشد، شار مغناطیسیِ Φ_B برابر است با:

شار مغناطیسی

واحد شار مغناطیسی در سیستم SI را «وِبِر» می‌نامند که با Wb نشان داده می‌شود. ۱ وبر برابر است با:

$$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2$$

$$\Phi_B = \iint_S \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

نیروی محرکه ایجاد شده در یک حلقه برابر با منفی تغییرات شار مغناطیسی است که از سطح سیم‌پیچ عبور می‌کند. بنابراین نیرو محرکه ایجاد شده برابر است با:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

قانون القاء فارادی

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

فارادی نشان داد که علت بوجود آمدن جریان و نیروی محرکه القائی در یک پیچه ، تغییر شار عبوری از آن پیچه نسبت به زمان است . این مطلب را قانون القاء فارادی نامند :

قانون القاء فارادی

برای سیم‌پیچی که از N حلقه تشکیل شده، نیروی محرکه القا شده برابر است با:

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

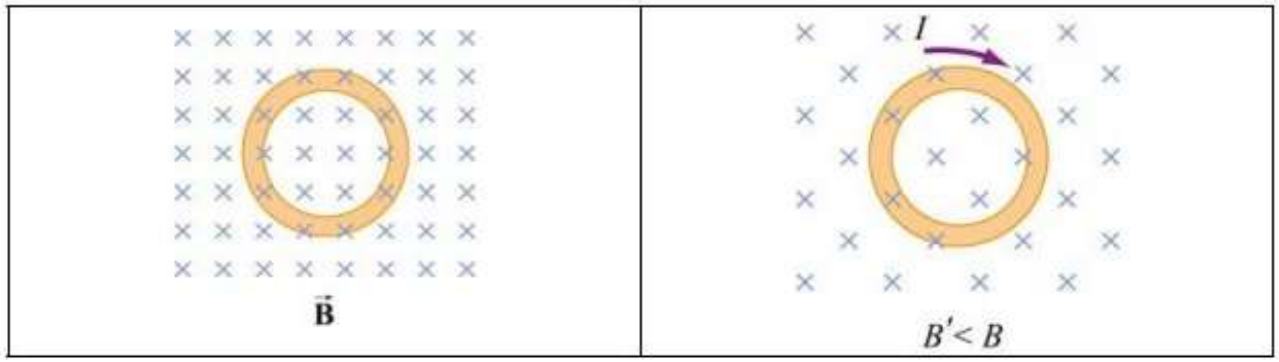
پس تغییر شدت میدان یا تغییر سطح مدار یا تغییرات زاویه بین میدان و بردار عمود بر سطح باعث تغییر شار و بنابراین ایجاد جریان القائی در پیچه می گردد.

قانون القاء فارادی

با ترکیب روابط ۱ و ۲، نیرو محرکه القا شده را می‌توان تابعی از تغییرات سطح و زاویه، به شکل زیر بدست آورد.

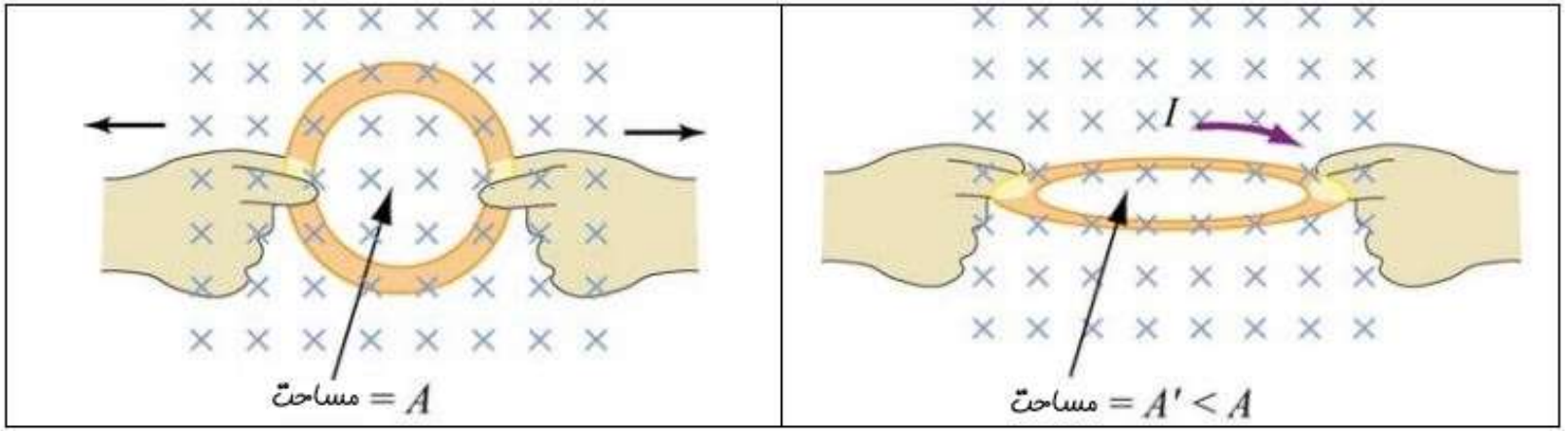
$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta) = -\left(\frac{dB}{dt}\right)A\cos\theta - B\left(\frac{dA}{dt}\right)\cos\theta + BA\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

۱. تغییر میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با زمان (شکل زیر)



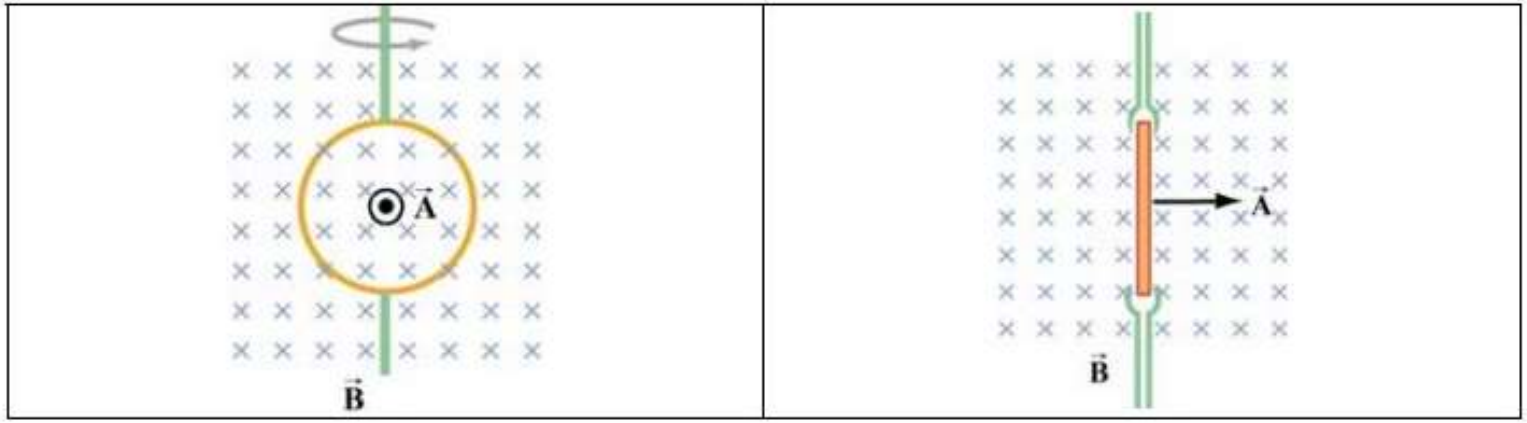
قانون القاء فارادی

۲. تغییر مساحتِ قرار گرفته در معرض میدان مغناطیسی (شکل زیر)



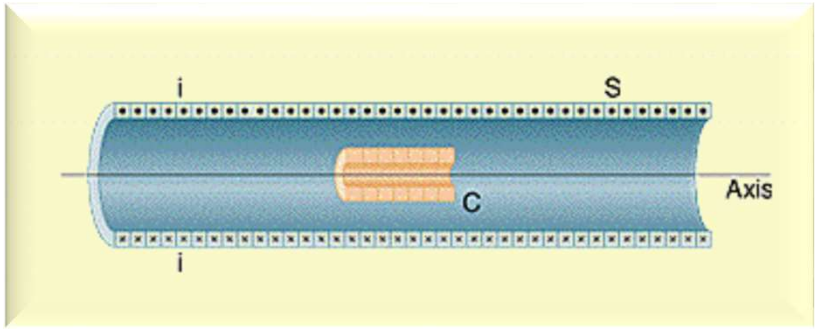
قانون القاء فارادی

۳. تغییر زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{A}$ با زمان (شکل زیر)



قانون القاء فارادی

مثال: سیم لوله درازی در هر سانتیمتر ۲۲۰ دور سیم دارد و حاوی جریان ۱/۵ آمپر است و قطر آن ۲/۳ سانتی متر است . در مرکز سیم لوله یک پیچه ۱۳۰ دوری به قطر ۱/۲ سانتیمتری قرار دارد . جریان سیم لوله با آهنگ یکنواخت در مدت ۲۵ به صفر کاهش می یابد. نیروی محرکه الکتریکی القائی در پیچه چقدر است؟



قانون القاء فارادی

حل:

$$B_i = \mu_0 in = (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}) \times (1.5\ \mathrm{A})(220\ \mathrm{turns/cm})(100\ \mathrm{cm/m}) = 4.15 \times 10^{-2}\ \mathrm{T}.$$

$$\Phi_{B,i} = BA = (4.15 \times 10^{-2}\ \mathrm{T})(3.46 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = 1.44 \times 10^{-5}\ \mathrm{Wb} = 14.4\ \mu\mathrm{Wb}.$$

$$\mathscr{E} = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = (130\ \mathrm{turns})\frac{14.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{Wb}}{25 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}} = 7.5 \times 10^{-2}\ \mathrm{V} = 75\ \mathrm{mV}.$$

قانون لنز

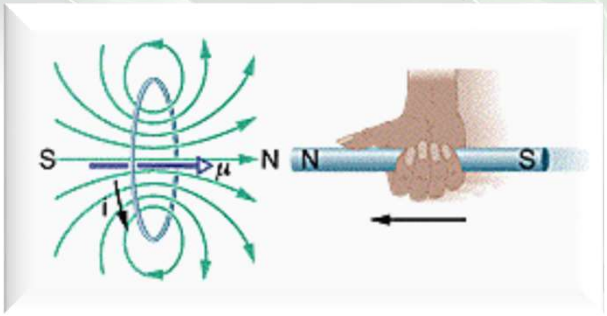


از قانون لنز برای تعیین جهت جریان القائی استفاده می کنیم و به صورت زیر بیان میشود:

جهت جریان القائی در جهتی است که با عامل بوجود آورنده اش مخالفت می کند.

علامت منفی در قانون فارادی مر بوط به قانون لنز است.

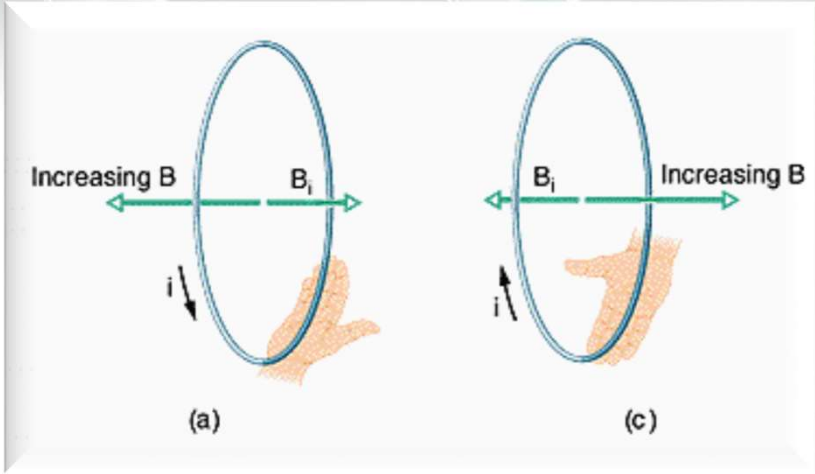
قانون لنز



در شکل قطب شمال یک آهنربا را به حلقه رسانا نزدیک می کنیم .
جهت جریان القائی چگونه است ؟

حلقه جریان مانند یک دو قطبی مغناطیسی اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می کند. وجهی که مقابل آهنربا است باید N باشد که با حرکت آهنربا مخالفت کند . پس جهت جریان بنا به قاعده دست راست مشخص می گردد

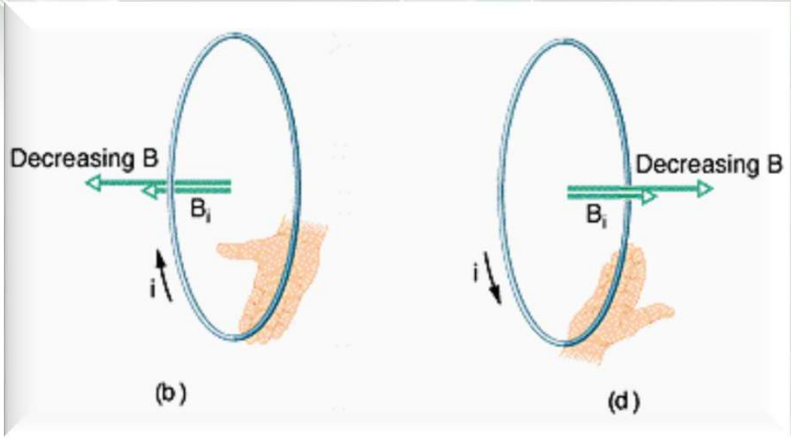
قانون لنز



بر حسب تغییرات نیز می توان جهت جریان القائی را مشخص کرد :

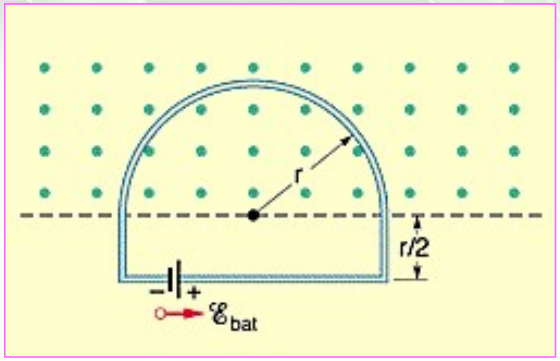
اگر میدان عبوری از حلقه در حال افزایش باشد جهت جریان باید طوری که میدان ناشی از آن در خلاف جهت باشد.

قانون لنز



اگر میدان خارجی عبوری از حلقه در حال کاهش باشد . جهت جریان حلقه باید طوری باشد که ناشی ا زجریان در جهت میدان خارجی باشد که با کاهش مخالفت کند.

قانون لنز



مثال : شکل زیر یک نیم حلقه رسانا بعه شعاع ۰/۲ را نشان می دهد میدان $B=4t^2+2t+3$ متغییر عمود بر حلقه اعمال شده است. باتری ایده آلی با نیروی محرکه ۲ ولت در مدار قرار دارد جریان مقاومت مدار ۲ اهم است. نیروی محرکه القائی و جریان در لحظه اول چقدر است؟

قانون لنز

حل:

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = A\frac{dB}{dt}$$

$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = A\frac{dB}{dt} = \frac{\pi r^2}{2}\frac{d}{dt}(4.0t^2 + 2.0t + 3.0)$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}(8.0t + 2.0).$$

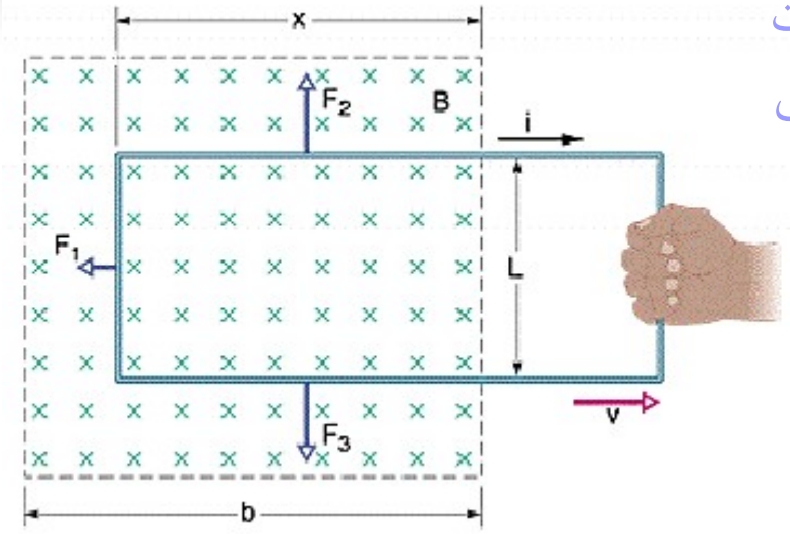
$$\mathscr{E}_{\text{ind}} = \frac{\pi(0.20\ \text{m})^2}{2}[8.0(10) + 2.0]$$

$$= 5.152\ \text{V} \approx 5.2\ \text{V}.$$

$$i = \frac{\mathscr{E}_{\text{net}}}{R} = \frac{\mathscr{E}_{\text{ind}} - \mathscr{E}_{\text{bat}}}{R} = \frac{5.152\ \text{V} - 2.0\ \text{V}}{2.0\ \Omega}$$

$$= 1.58\ \text{A} \approx 1.6\ \text{A}.$$

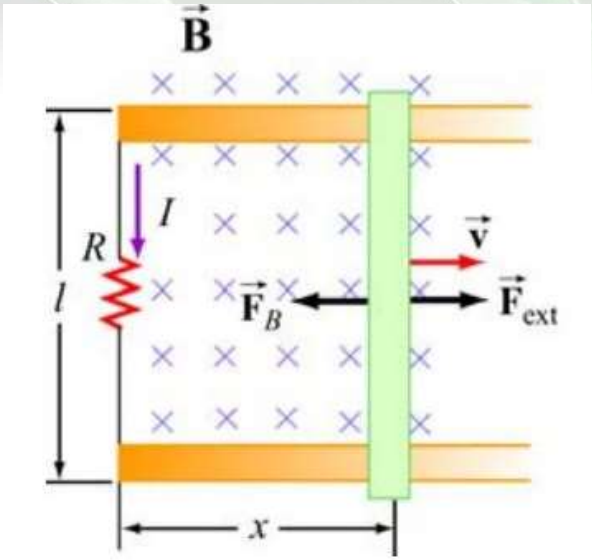
مطالعه کمی القاء



مثال: حلقه رسانایی به پهنای X را در میدان مغناطیسی یکنواخت مطابق شکل با سرعت ثابت می کشیم. الف)نیروی محرکه الکتریکی القایی و جریان القایی را محاسبه کنید.

مطالعه کمی القاء

حل:

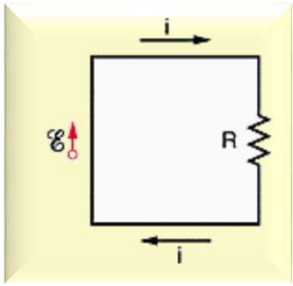


$$\Phi = BA = BLx.$$

$$\mathscr{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} BLx = BL \frac{dx}{dt} = BLv$$

$$i = \mathscr{E}/R$$

$$i = \frac{BLv}{R}$$



مطالعه کمی القاء

ب) توان انجام کار روی حلقه و توان ایجاد گرما در حلقه را محاسبه کنید.

حل:

$$F = F_1 = iLB \sin 90° = iLB$$

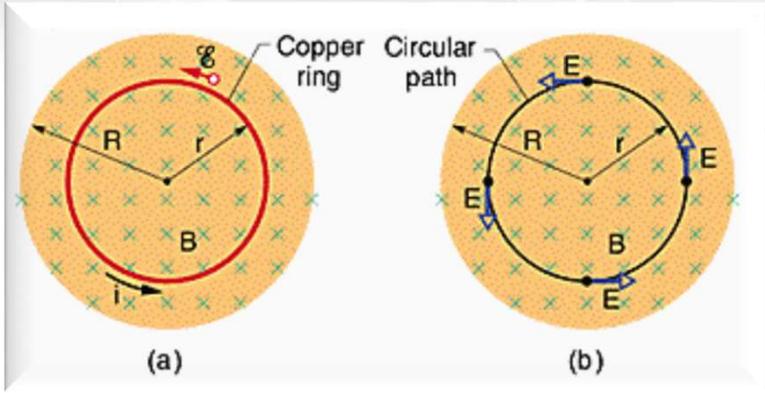
$$F = \frac{B^2L^2v}{R}$$

$$P = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

$$P = i^2R$$

$$P = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

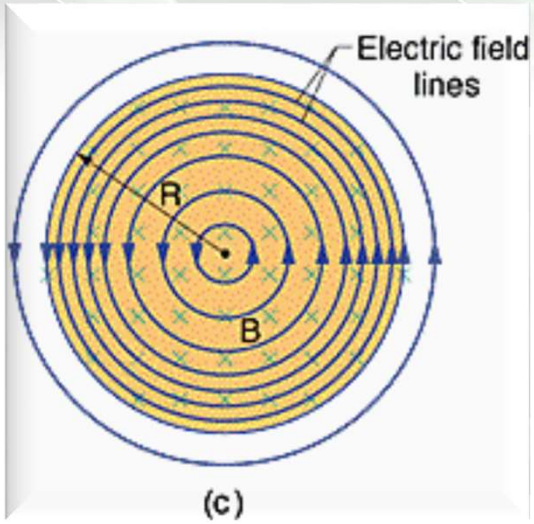
میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان



اکنون اگر فقط شدت میدان مغناطیسی با زمان تغییر کند نیروی محرکه الکتریکی را بدست می آوریم.

چون با تغییر میدان مغناطیسی در حلقه، جریان بوجود می آید باید میدان الکتریکی در حلقه رسانا ایجاد شده باشد.

میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان



حتی هنگامی که حلقه برداشته شود، با تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی در نقاط مختلف ظاهر می شود که خطوط آن دوایری متحد المرکز است.

میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان

اگر ایجاد نیروی محرکه به دلیل تغییر در اندازه میدان مغناطیسی باشد می توان قانون القاء فارادی را به صورت زیر دوباره فرموله کرد:

$$W = \mathscr{E} q_0 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (q_0 E)(2\pi r).$$

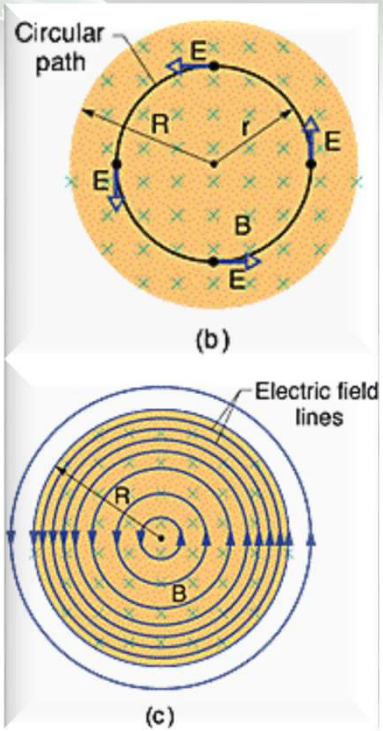
$$\mathscr{E} = 2\pi r E$$

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \oint E \cdot d\mathbf{s}.$$

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

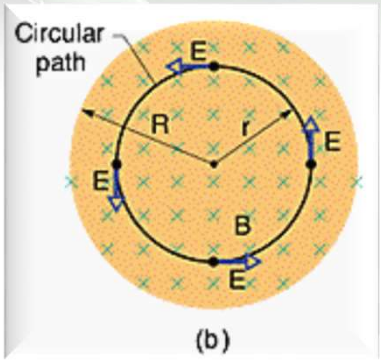
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان



مثال: در شکل زیر اگر تغییرات شدت میدان نسبت به زمان $0.13\ TS^{-1}$ باشد. الف) بزرگی میدان الکتریکی را در نقطه ای به $r=5.2\ cm$ فاصله از مرکز بدست آورید. $R=8.2\ m$

میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان



حل الف:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint E\,ds = E\oint ds = E(2\pi r) = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = BA = B(\pi r^2)$$

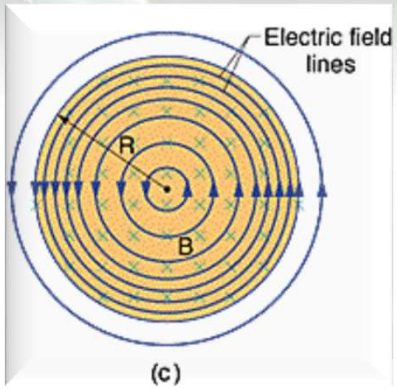
$$E(2\pi r) = (\pi r^2)\frac{dB}{dt},$$

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}.$$

$$E = \frac{(5.2\times 10^{-2}\ \text{m})}{2}(0.13\ \text{T/s})$$

$$= 0.0034\ \text{V/m} = 3.4\ \text{mV/m}.$$

میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان



ب) رابطه ای برای خارج حلقه بدست آورده و مقدار میدان را در r=12.5cm محاسبه کنید.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint E\,ds = E\oint ds = E(2\pi r) = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = BA = B(\pi R^2).$$

$$E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}.$$

$$E = \frac{(8.5\times 10^{-2}\ \text{m})^2}{(2)(12.5\times 10^{-2}\ \text{m})}(0.13\ \text{T/s})$$

$$= 3.8\times 10^{-3}\ \text{V/m} = 3.8\ \text{mV/m}.$$

فصل ۳۰- القائیدگی

القائیدگی

محاسبه القاییدگی

مدار LR

انرژی و میدان مغناطیسی

چگالی انرژی میدان مغناطیسی

القای متقابل

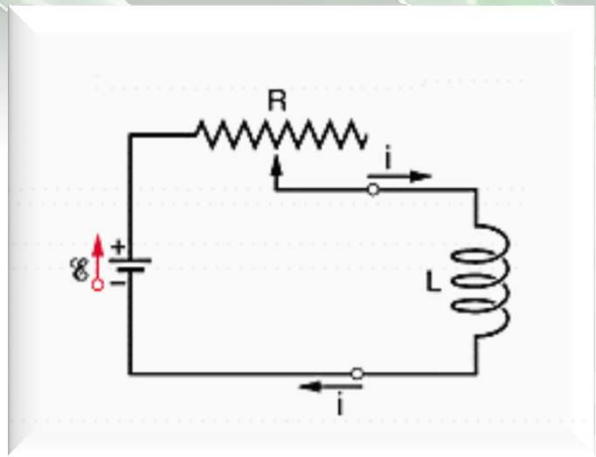
القائیدگی

اگر دو پیچه نزدیک به هم باشند جریان یک پیچه شاری در دیگری ایجاد می کند.

اگر این شار با تغییر جریان تغییر کند در پیچه دیگر نیروی محرکه الکتریکی القائی ظاهر می شود.

در حالت کلی برای نشان دادن اثر القائی نیازی به دو پیچه نیست.

القائیدگی



اگر جریان در یک پیچه تغییر کند درخود آن پیچه نیروی محرکه القایی ظاهر می شود این پدیده را خود القایی و نیروی محرکه تولید شده را نیروی محرکه خود القائی می نامند.

القائیدگی

در یک پیچه معین تعداد ارتباط های شاری (تعداد دورها است) به شرطی که در داخل پیچه ماده مغناطیسی مانند آهن نباشد، با جریان پیچه متناسب است:

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

که، یعنی ثابت تناسب، القا پیچه نامیده می شود.

واحد، هانری است که:

$$1\ \text{henry} = 1\ \text{H} = 1\ \text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A}.$$

القائیدگی

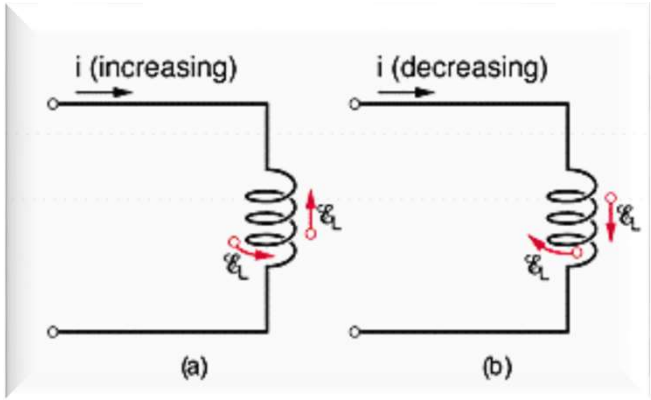
$$N\Phi = Li.$$

$$\mathscr{E}_L = -\frac{d(N\Phi)}{dt}$$

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{di}{dt}$$

باتوجه به قانون فارادی نیروی محرکه اکتریکی خود القایی در پیچه:

پس با تغییر جریان هر القاگر در آن نیروی محرکه القایی بوجود می آید.



جهت نیروی محرکه الکتریکی خود القایی با
افزایش و کاهش جریان آن نشان داده شده است:

محاسبه القاییدگی

مثال: القاییدگی یا ضریب خود القاء واحد طول یک سیم لوله دراز به سطح مقطع A در نزدیکی مرکز آن را بدست آورید (چرا در مرکز؟).

حل:

$$N\Phi = (nl)(BA)$$

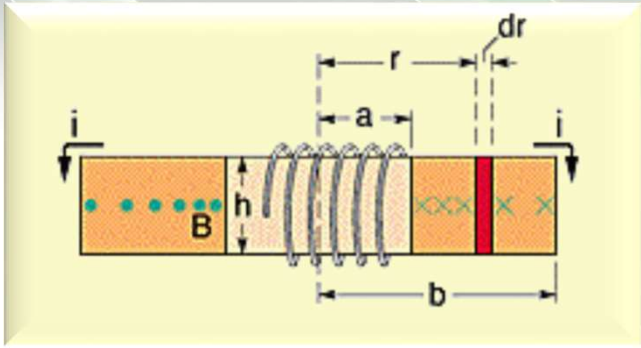
$$B = \mu_0 in.$$

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{(nl)(BA)}{i} = \frac{(nl)(\mu_0 in)(A)}{i}$$

$$= \mu_0 n^2 lA.$$

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A$$

محاسبه القاییدگی



مثال : شکل سطح مقطع یک چنبره دوری با مقطع مستطیل را نشان می دهد. الف) ضریب خود القاء آن را بدست آورید.

محاسبه القاییدگی

حل:

$$\Phi = \int_a^b Bh\,dr = \int_a^b \frac{\mu_0 iN}{2\pi r} h\,dr$$

$$= \frac{\mu_0 iNh}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iNh}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N}{i} \frac{\mu_0 iNh}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

محاسبه القاییدگی

ب) القاییدگی چقدر است؟

N=1250،a=52 mm، b=95 mm h=13 mm

حل:

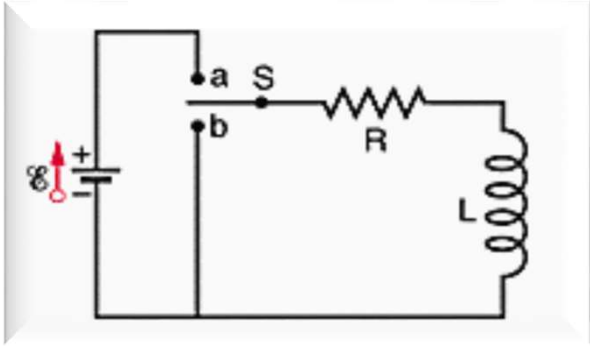
$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(1250)^2(13 \times 10^{-3}\ \text{m})}{2\pi} \ln \frac{95\ \text{mm}}{52\ \text{mm}}$$

$$= 2.45 \times 10^{-3}\ \text{H} \approx 2.5\ \text{mH}.$$

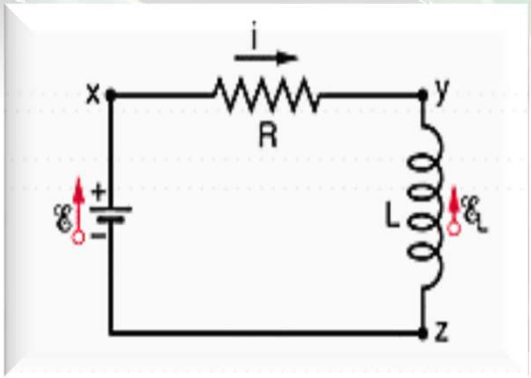
مدار LR

در مدار شکل زیر اگر کلید به طرف بالا زده شود القاگر با افزایش آنی جریان مخالفت می کند:



مدار LR

می توان تغییرات زمانی جریان را از قانون حلقه بدست آورد:



$$-iR - L\frac{di}{dt} + \mathscr{E} = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E}$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L})$$

مدار LR

ثابت زمانی القائی:

$$\tau_L = \frac{L}{R} \qquad \text{(time constant)}$$

که واحد آن ثانیه است:

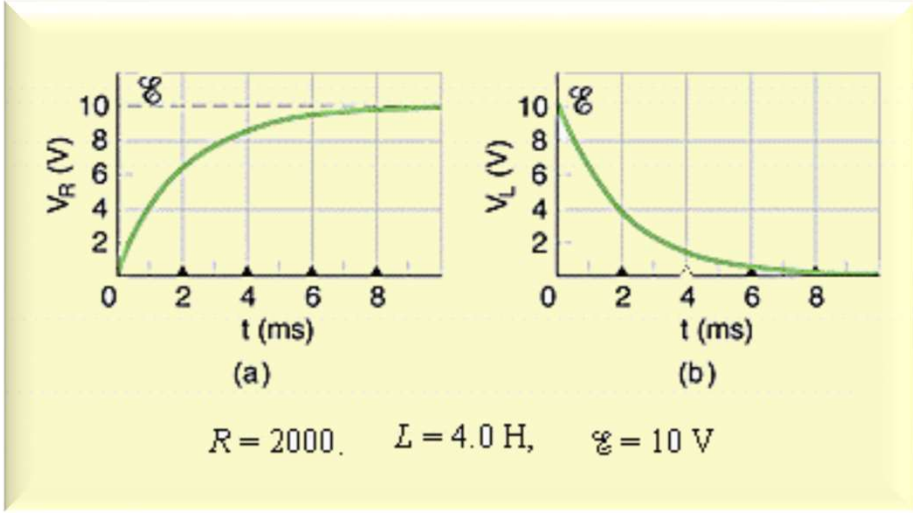
$$1\,\frac{\text{H}}{\Omega} = 1\,\frac{\text{H}}{\Omega}\left(\frac{1\ \text{V}\cdot\text{s}}{1\ \text{H}\cdot\text{A}}\right)\left(\frac{1\ \Omega\cdot\text{A}}{1\ \text{V}}\right) = 1\,\text{s}.$$

در زمان ثابت زمانی جریان به ۶۳ درصد مقدار نهایی اش می رسد.

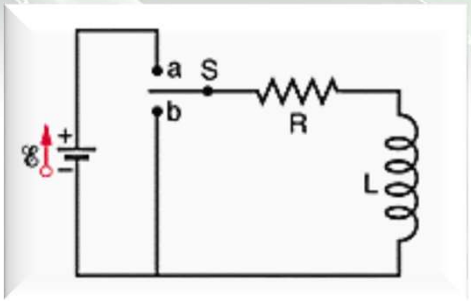
$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-1}) = 0.63\,\frac{\mathscr{E}}{R}$$

مدار LR

تغییرات پتانسیل دو سر مقاومت و القاگر به صورت تابعی از زمان است:



مدار LR



در شکل زیر اگر کلید بعد از آنکه جریان به مقدار تعادلی رسید به پایین وصل شود می خواهیم تغییرات جریان را بیابیم؟

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0.$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-t/\tau_L} = i_0 e^{-t/\tau_L}$$

مدار LR

مثال: القاییدگی یک سیم ۵۳ میلی هانری و مقاومت آن ۰/۳۷ اهم است اگر آن را به یک باتری وصل کنیم چه مدت طول می کشد تا جریان به نصف مقدار نهایی برسد؟

حل:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t_0/\tau_L}).$$

$$t_0 = \tau_L \ln 2$$

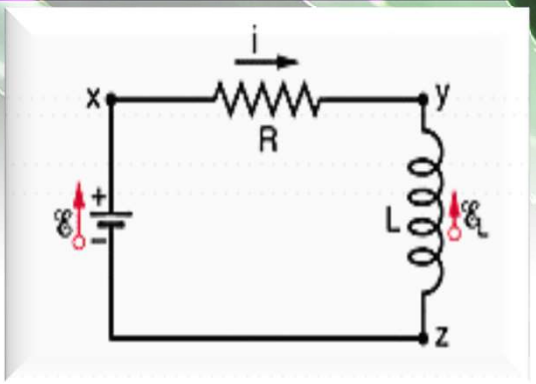
$$= \frac{L}{R}\ln 2 = \frac{53 \times 10^{-3}\ \text{H}}{0.37\ \Omega}\ln 2$$

$$= 0.10\ \text{s}.$$

انرژی و میدان مغناطیسی

وقتی دو سیم حامل جریان را از یکدیگر دور می کنیم کار انجام می دهیم که به صورت انرژی مغناطیسی ذخیره می گردد.

برای بدست آوردن یک رابطه کمی برای انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیس مدار زیر را با توجه به قانون حلقه درنظر بگیرید :



$$\mathscr{E} = L\frac{di}{dt} + iR$$

$$\mathscr{E}i = Li\frac{di}{dt} + i^2R$$

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li\,di$$

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2.$$

رابطه انرژی ذخیره شده در یک سلف معادل با انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن است:

$$U_E = \frac{q^2}{2C}.$$

انرژی و میدان مغناطیسی

مثال : القائیدگی یک پیچه 53 میلی هانری و مقاومت آن 35/. اهم است . اگر یک نیروی محرکه الکتریکی 12 ولتی به پیچه وصل شود ، بعد از آن که جریان به مقدار ما کزیمم رسید ، الف) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیس را حساب کنید.

حل:

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2$$

$$i_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12\ \text{V}}{0.35\ \Omega} = 34.3\ \text{A}.$$

$$U_{B\infty} = \tfrac{1}{2}Li_\infty^2 = (\tfrac{1}{2})(53 \times 10^{-3}\ \text{H})(34.3\ \text{A})^2$$
$$= 31\ \text{J}.$$

انرژی و میدان مغناطیسی

ب) بعد از چند ثابت زمانی نصف این انرژی در میدان ذخیره می شود ؟

حل:

$$U_B = \tfrac{1}{2}U_{B\infty}$$

$$\tfrac{1}{2}Li^2 = (\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}Li_\infty^2$$

$$i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i_\infty.$$

$$\frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}R}.$$

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.293,$$

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0.293 = 1.23$$

$$t \approx 1.2\,\tau_L.$$

انرژی و میدان مغناطیسی

مثال : یک القاگر ۳/۵۶ میلی هانری به طور متوالی به مقاومت ۱۲/۸ اهم بسته شده است . یک نیروی محرکه ۳/۲۴ ولت بطور ناگهانی به این ترکیب اعمال می شود ۲۷/. ثانیه (که مساوی یک ثابت زمانی القائی است) پس از بستن مدار ، الف) آهنگ انرژی گرفته شده از باتری چقدر است؟

حل:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L})$$

$$i = \frac{3.24\ \text{V}}{12.8\ \Omega}(1 - e^{-1}) = 0.1600\ \text{A}$$

$$P = \mathscr{E}i = (3.24\ \text{V})(0.1600\ \text{A})$$

$$= 0.5184\ \text{W} \approx 518\ \text{mW}.$$

انرژی و میدان مغناطیسی

ب) آهنگ تولید گرما در مقاومت چقدر است ؟

حل:

$$P_R = i^2R = (0.1600\ \text{A})^2(12.8\ \Omega)$$
$$= 0.3277\ \text{W} \approx 328\ \text{mW}.$$

انرژی و میدان مغناطیسی

ج) آهنگ ذخیره انرژی در میدان مغناطیسی چقدر است؟

حل:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\frac{R}{L}(e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-t/\tau_L}.$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{3.24\ \text{V}}{3.56\ \text{H}}e^{-1} = 0.3348\ \text{A/s}.$$

$$P_B = \frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

$$= (3.56\ \text{H})(0.1600\ \text{A})(0.3348\ \text{A/s})$$

$$= 0.1907\ \text{W} \approx 191\ \text{mW}.$$

چگالی انرژی میدان مغناطیسی

می خواهیم رابطه ای برای چگالی انرژی مغناطیسی بدست آوریم

حل: سیم لوله درازی به طول و سطح مقطع در نظر می گیریم:

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2$$

$$u_B = \frac{Li^2}{2Al} = \frac{L}{l}\frac{i^2}{2A}$$

$$u_B = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2$$

$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

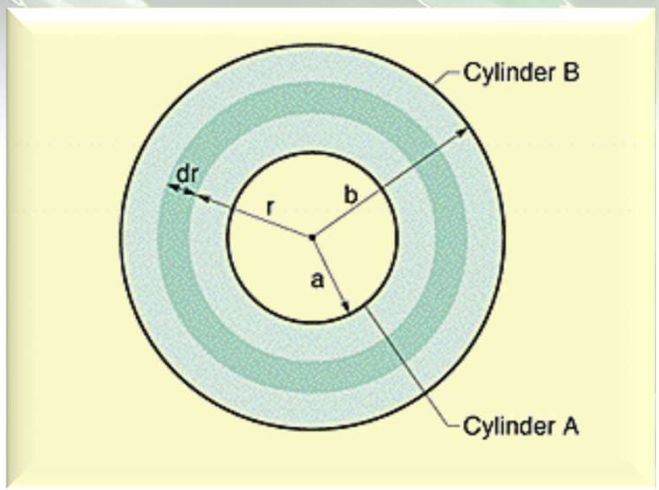
چگالی انرژی میدان مغناطیسی

چگالی انرژی در میدان مغناطیسی والکتریکی هردو متناسب با مربع میدان هستند:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

چگالی انرژی میدان مغناطیسی



مثال : یک کابل هم محور دراز به شعاعهای a, b را در نظر بگیرید . رسانای داخلی حامل جریان پایا است واستوانه بیرونی مسیر بر گشت جریان را تامین می کند الف) انرژی مغناطیسی ذخیره شده در طول از کابل را محاسبه کنید.

چگالی انرژی میدان مغناطیسی

حل: نخست از قانون آمپر میدان را در نقاط بین دو استوانه محاسبه می کنیم:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i,$$

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 i,$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

$$dU = u_B\, dV,$$

$$u_B = B^2/2\mu_0.$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}.$$

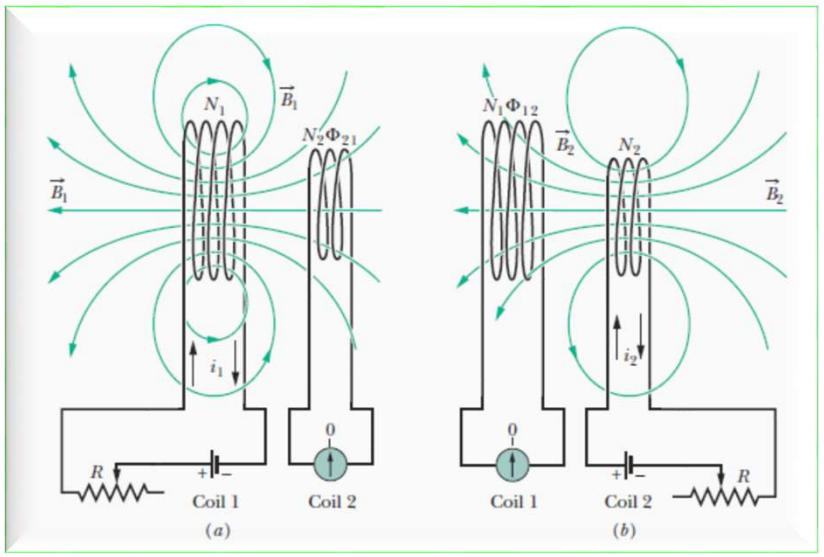
$$dU = u_B\, dV = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi r l)(dr) = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\frac{dr}{r}.$$

$$U = \int dU = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

القای متقابل

در این بخش موردی را بررسی می کنیم که دو پیچه نسبت به هم القای متقابل دارند.



القای متقابل در سیم پیچ دوم ناشی از تغییر در جریان سیم پیچ اول برابر است با:

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1} \quad \longleftrightarrow \quad L = N\Phi/i,$$

$$M_{21}i_1 = N_2\Phi_{21} \quad \Rightarrow \quad M_{21}\frac{di_1}{dt} = N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

القای متقابل

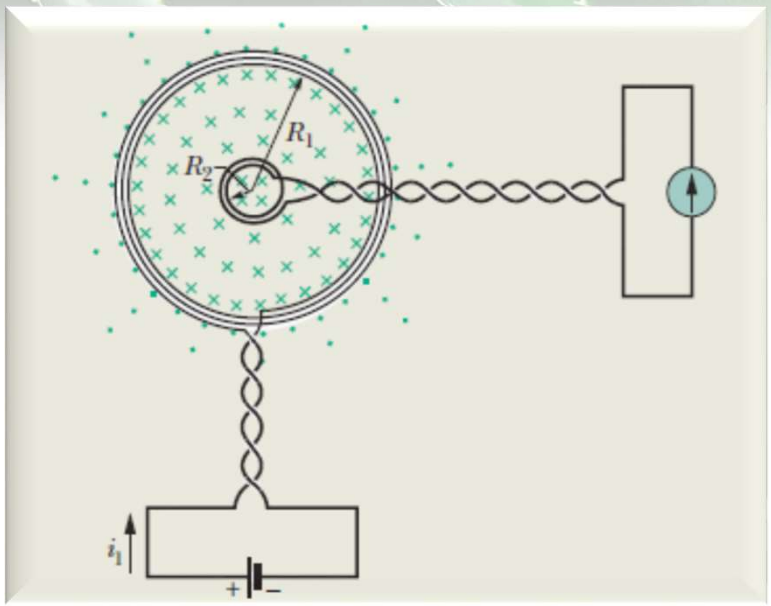
$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

$$M_{21} = M_{12} = M,$$

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}.$$

القای متقابل



مثال) در شکل مقابل سیم پیچ بزرگتر با شعاع R1سیم پیچ کوچکتر را محاط کزده است. برای این آرایش القای متقابل را بدست آورید؟

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}$$

$$\Phi_{21} = B_1 A_2$$

$$\Rightarrow \quad N_2\Phi_{21} = N_2 B_1 A_2$$

القای متقابل

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$N_2\Phi_{21} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2 i_1}{2R_1}$$

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1}$$